畢　達　哥　拉　斯

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 約在公元前 569 年生於薩摩斯島 (Samos，小亞細亞西岸)；約在公元前 475 年卒於梅塔蓬圖姆 (Metapontum，今義大利半島南部塔蘭托附近)。哲學、數學、天文學、音樂理論。

畢達哥拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Pythagoras.html

畢　達　哥　拉　斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

畢達哥拉斯 (Pythagoras) 約在公元前 569 年生於薩摩斯島 (Samos，小亞細亞西岸)；約在公元前 475 年卒於梅塔蓬圖姆 (Metapontum，今義大利半島南部塔蘭托附近)。哲學、數學、天文學、音樂理論。

畢達哥拉斯約與中國的孔子 (公元前 551 – 前 479 年) 同時。他早年曾在錫羅斯島 (Syros，在愛琴海中) 向費雷西底 (Pherecydes) 學習，又曾師事伊奧尼亞學派的安納西曼德 (Anaximander)。以後遊歷埃及、巴比倫等地 (一說到過更遠的印度)，接受古代流傳下來的天文、數學知識。回到家鄉以後，開始講學，未見成效。在公元前 520 年左右，爲了擺脫波利克拉底 (Polycrates) 的暴政，和母親及唯一的一個門徒離開薩摩斯島，移居西西里島，而最後定居於克洛通 (Croton，義大利半島南端)。在那裡他廣收門徒，建立一個宗教、政治、學術合一的團體。他的講演吸引了大量的聽衆，包括各個階層的人，特別是上層社會的人士。當時婦女是被禁止出席公開會議的，畢達哥拉斯打破這個界限，允許她們聽講。在熱心的聽衆中有房主米洛 (Milo) 的女兒西雅娜 (Theano)，綺年玉貌，後來成爲他的妻子，還給他寫過傳記，可惜已失傳。

畢達哥拉斯將信徒們分爲兩等。一等是普通的聽講者，這是大多數。他們只能聽講，不能發問，更不能參加討論，高深的知識是不向他們傳授的。另一等才能眞正說是正牌畢達哥拉斯學派的成員，叫做 $\mu\alpha\theta\eta\alpha\tau\iota\kappa o'\iota$，這個字的原意是指那些獲得較高深知

識的人，是源出於 $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$，指課程、教誨、學說等。以後繼續演化變爲數學家 ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{o}\zeta$) 及數學 ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa\grave{\alpha}$)。這就是歐洲文字 “數學” (拉丁文 mathematica、英文 mathematics、德文 Mathematik 等等) 一詞的來源。

這個學派的組織是很嚴密的，帶有濃厚的宗教色彩。每個成員都要接受長期的訓練和考核，遵守很多清規戒律，宣誓永不洩露學派的秘密和學說，在學術上要達到一定的水準。加入組織還要通過一系列的神秘儀式，以求達到 “心靈的淨化”。他們相信依靠數學可使靈魂昇華，與上帝融爲一體。數學是教義的組成部分。他們不僅認爲萬物都包含數，而且萬物都是數，宣稱上帝用數來統御宇宙。這是畢達哥拉斯學派和其他教派的主要區別。

學派的成員有共同的哲學信仰和政治理想，訓練是嚴格的，食物是簡單的。學派的教義是鼓勵人們自制、節慾、純潔、服從。他們起初在大希臘 (Magna Graecia，今義大利南部一帶) 贏得了很高的聲譽，產生過相當大的政治影響，但卻引起敵對派的忌恨。後來受到民主運動風暴的衝擊，畢達哥拉斯被迫移居梅塔蓬圖姆，終於被暴徒殺害。在克洛通的活動場所連續遭到破壞，許多門徒逃回希臘本土，在弗利奧斯 (Phlius，伯羅奔尼撒半島東北部) 重新建立據點，也有些人到塔蘭托去，繼續進行數學、哲學研究以及政治活動，直到公元前四世紀中葉。這個學派繁榮興旺達一個世紀以上。

畢達哥拉斯本人沒有留下什麼著作，而學派內部的發明創造是秘而不宣的，外人鮮知其詳。不過也有少數通過各種途徑流傳開來。以後組織漸漸分散，保密的教條被放棄，才出現一些公開講述這個學派教義的著作。第一本這類的書是由學派的晚期成員菲洛勞斯 (Philolaus) 在公元前 370 年左右寫的，當時柏拉圖等人曾看到過，現今只殘留片斷，其內容偏重哲學，數學的記載不多。此後許多學者開展畢達哥拉斯的研究，其思想和學說逐漸爲

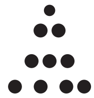
人所知。

數的理論

畢達哥拉斯學派將抽象的數作爲萬物的本原。研究數的目的不是爲了實際應用，而是想通過揭露數的奧秘來探索宇宙的永恆眞理。他們對數作過深入的研究，並得到很多結果，但常常將數和迷信奇特地結合起來。他們注意到數與音樂和諧之間的關係、數與幾何圖形的關係、數與天體運行的關係。把整個學習課程分爲四大部分：1. 數的絕對理論 —— 算術；2. 數的應用 —— 音樂；3. 靜止的量 —— 幾何；4. 運動的量 —— 天文。合起來叫做 "四道"(quadrivium，四條道路，或 "四藝")，這名稱一直沿用到中世紀。後來又加上文法、修辭、邏輯，合稱 "七藝"。中國古代有 "四術"(詩、書、禮、樂)，"六藝" (禮、樂、射、御、書、數) 之說，堪與媲美。

畢達哥拉斯發現一根拉緊的弦彈出一個音調，比方說是 do，那麼取其長度的 1/2，彈出的音調就是高一均 (讀ㄩㄣˊ) 的 ḋo，這時弦振動的頻率加倍 (頻率與弦長成反比)。如取原長的 2/3，彈出的音調就是 so。這幾個音一起彈奏是悅耳的，這種愉快感覺叫做諧和 (或調和)。1/2、2/3、1 這三個數的倒數 2、3/2、1 成爲一個等差數列，那麼原來這三個數就叫做調和數列。這就是調和數列名稱的起源。同樣，取原長的 3/4，彈出的音是 fa。總的來說，如果兩弦緊張的程度 (張力) 相同，長度爲簡單的整數比時，奏出來就是和諧悅耳的樂音。這原理對管樂 (笛、簫之類) 也是適用的，不過情況較爲複雜，因爲聲波的波長並不嚴格地正比於管長，還和管的粗細有關[1]。

[1]中國古代用竹管來定音律，是根據 "三分損益" 的原則。取一根 9 寸長的竹子作標準，然後 "三分損一"(去掉 1/3)，剩下 6 寸作爲第二根管的長。再 "三分益一"(乘以 4/3)，所得的 8 寸作爲第三根管長。這樣連做四次，得到五根長度不同的管子，吹出五個音：宮、商、角、徵 (ㄓˇ)、羽，相當於 do、re、mi、so、la，和畢達哥拉斯方法不同。

根據 “簡單整數比” 的這一個原理， 這個學派還創造了一套音樂理論。1、2、3、 4 這頭四個正整數， 按 4 : 3、3 : 2、2 : 1 的比構成幾個主要的音調， 而這四個數的和是 10。 於是他們認爲 10 是一個完美的數， 稱之爲 “四數組”(tetractys)， 用  來表示， 作爲神聖的象徵， 10 同時成爲宣誓時的誓詞。 後來斯標西波 (Speusippus， 柏拉圖的外甥， 公元前 408 − 前 339 年是柏拉圖學園的領導人) 指出 10 包含點、 線、 面、 體各種類型的數： 1 是點、2 是線、3 是三角形、4 是四面體。 這更增加了 10 的神秘性。 這是他們的信條 “一切事物都按數來安排” 的又一例證。

他們認爲偶數是陰性的， 奇數是陽性的。 偶數可以分爲相等的兩部分， 而奇數只能分成不相等的兩部分。 按照這個定義，1 既不是奇數也不是偶數。5 是第一個陰性數 2 與第一個陽性數 3 之和， 所以是結婚的象徵。

畢達哥拉斯特別厭惡 17 這個數， 它正好在 16 與 18 之間。 而 16 與 18 是僅有的兩個數 (正整數)， 它同時等於一個矩形 (包括正方形) 的面積與周長。 邊長是 4 的正方形面積與周長都是 16， 邊長是 3、6 的矩形面積與周長都是 18。 容易證明不可能有別的正整數具有這種性質。 事實上， 設矩形的兩邊是 x、 y， 解不定方程

$$xy = 2x + 2y \text{、} \; y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2} \text{，}$$

x 只可能取 3、4、6， 對應的 y 是 6、4、3。 xy 只可能是 16 和 18。

晚期的希臘學者如尼科馬霍斯 (Nicomachus of Gerasa) 等對這一類數的神秘主義仍然很迷戀， 在他所著的《算術入門》(*Introductio Arithmetica*) 一書中大力宣揚數的神秘性和神聖性。 他雖然後於畢達哥拉斯好幾個世紀， 但他的思想和學說卻比較全面地反映畢達哥拉斯學派的本來面目， 更晚的伊安布利霍斯 (Iamblichus， 約 245 − 325) 也是如此， 將數說得玄妙莫測， 他們被後人稱爲新畢達哥

拉斯學派。

在歐幾里得的《原本》(*Elements*) 中，卷 VII，VIII，IX 講的是數論，畢達哥拉斯的理論有許多在這裡得到了反映。不過完全摒棄了神秘的色彩，所有的論斷都給出了嚴格的證明。

完全數與親和數

如果一個數等於除它本身以外的全部因子之和，這個數叫做完全數。例如

$$6 = 1 + 2 + 3、 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14，$$

6、28 就是完全數。完全數的發現，是畢達哥拉斯學派卓越的貢獻之一。尼科馬霍斯給出四個完全數 6、28、496、8128，並且指出一般規律：若 $1+2+2^2+\cdots+2^n = P$ 是質數，那麼 2^nP 就是完全數。這在歐幾里得《原本》中已有證明 (卷 IX 命題 36)。道理很簡單，因爲 2^nP 能被下列各數整除：

$$1、2、\cdots、2^n、P、2P、\cdots、2^{n-1}P。$$

除此以外，不能被任何小於它本身的數整除，而這些除數 (因子) 之和爲

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \cdots + 2^n + P + 2P + \cdots + 2^{n-1}P \\ = \;& P + P(2^n - 1) = 2^nP。\end{aligned}$$

證明中用到等比數列的求和公式

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1，$$

這公式曾在畢達哥拉斯學派的著作中出現。據此推測畢達哥拉斯本人可能已經知道完全數的這一性質：若 $2^n - 1$ 是質數，則 $2^{n-1}(2^n - 1)$ 是完全數。尼科馬霍斯提到四個完全數是 $6 = 2(2^2 - 1)$，$28 = 2^2(2^3 - 1)$，$496 = 2^4(2^5 - 1)$，$8128 = 2^6(2^7 - 1)$。

$2^n - 1$ 類型的數，十七世紀時 M. 梅森 (Mersenne，1588 – 1648) 曾詳加研究。由畢達哥拉斯開創的完全數研究，至今還有很

多問題沒有解決。

和完全數有關的還有親和數。畢達哥拉斯發現，284 這個數除它本身外的所有因子之和等於 220，而 220 除它本身外的所有因子之和又等於 284，即

$$\begin{aligned}220 &= 1+2+4+71+142，\\ 284 &= 1+2+4+5+10+11+20+22+44\\ &\quad +55+110。\end{aligned}$$

這一對數叫做親和數，象徵著友誼。當別人問及“朋友是什麼”時，畢達哥拉斯回答說：“是另一個我 (Alter ego)”，可用親和數來表示。

兩千多年後，P. de 費馬 (Fermat，1601－1665) 才找到第二對親和數 17296 和 18416。1750 年，L. 歐拉 (Euler，1707－1783) 寫出 62 對親和數 (包括以前知道的)。現在已經知道上千對親和數。

形數

畢達哥拉斯很注意形與數的結合，許多論斷既是數的關係，也是形的關係。他把算術中的單位叫做“沒有位置的點”，而幾何中的點叫做“有位置的單位”。

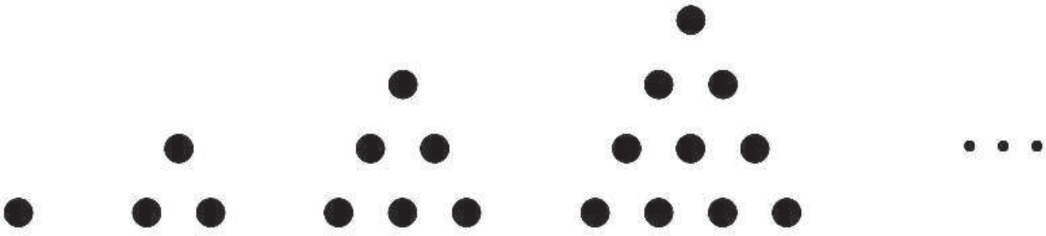


圖 1

形數 (figurate number) 是形與數的結合物。用點排成圖 1 所示圖形。每一個圖的點數叫做三角數，第 1 個三角數是 1，第 2 個

三角數是 $1+2=3$， 第 3 個三角數是 $1+2+3=6$， $\cdots$， 第 n 個三角數是

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

畢達哥拉斯大概已經知道這個公式， 後來出現在尼科馬霍斯的書。 同樣 (圖 2) 的點數 1、 4、 9、 16、 $\cdots$ 、 n^2、 $\cdots$ 叫做平方數。 平方數可以看作從 1 起連續奇數之和， 如圖 3 所示：

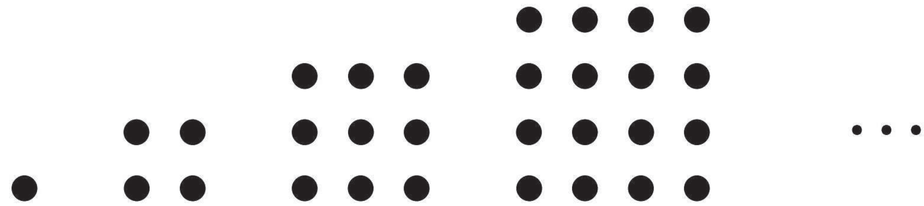


圖 2

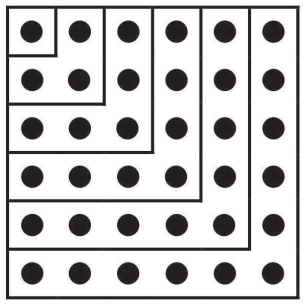


圖 3

$$1+3+5+7+9+11=6^2 \text{。}$$

一般地說， 作出平方數 n^2 的圖形之後， 再鑲上一個曲尺形的邊， 點數是 $2n+1$， 就得到下一個平方數。 即

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2 \text{。}$$

曲尺形叫做磬折形 (gnomon)， 這字的原意是指一根直立的杆， 觀測日影的位置以定時刻， 也就是日晷。 後來和水平尺連起來， 構成一個畫直角的工具， 同時也可以測日影。 在中國叫做 “矩”， 它的用處很大， 現今仍然是木工所不可或缺的器具。 在歐幾里得《 原本 》中， 磬折形的意義有所推廣， 它指在平行四邊形的一個角上截去一個相似的平行四邊形後所剩下的圖形， 如圖 4 的陰影部分。 後來再進一步推廣。

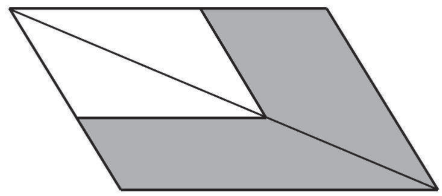


圖 4

類似地， 可用點子排出五角數 (圖 5)， 六角數 (圖 6) 等等。

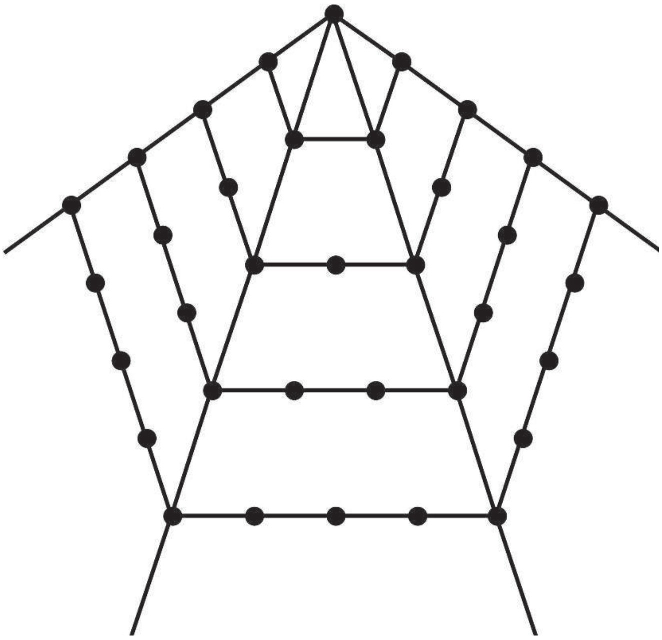


圖 5

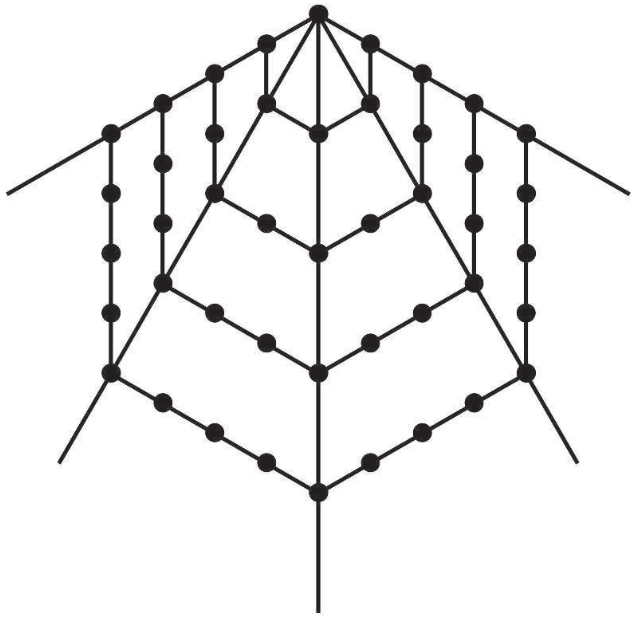


圖 6

五角數是 1， 5， 12， 22， 35， ···

六角數是 1， 6， 15， 28， 45， ···

知道五角數 (或六角數) 的某一項， 用鑲邊的辦法就可以得下一項。 這一點從圖形看得很清楚。 所鑲的邊， 仍叫做 gnomon， 當然意義是推廣了的。

這一類數列現在可歸入高階等差數列的範圍。 畢達哥拉斯本人及其學派開展了研究， 但究竟深入到什麼程度， 很難確知。

勾股定理

傳統的說法， 一致認爲勾股定理是畢達哥拉斯發現的， 因此西方叫做畢達哥拉斯定理， 這幾乎是家喻戶曉的。 還傳說他爲了慶祝這偉大的勝利， 宰了一頭牛來祭神。 這傳說不大可信， 因爲他們的教義是極力反對以動物特別是牛作犧牲的， 有的作者還肯定他們是素食主義者。

經過仔細的研究， 現在已經有充分的證據表明巴比倫人在漢穆拉比 (Hammurabi， 約公元前 1700 年) 時代已經知道這一定理。 特別是 O. 諾伊格鮑爾 (Neugebauer) 等人 1945 年詮釋了巴比

倫泥板"普林頓 322"[2]， 更肯定了這一結論。 那上面列有 15 組"畢達哥拉斯數"(即滿足 $x^2 + y^2 = z^2$ 的整數)， 最大的一組斜邊是 18541， 一個直角邊是 12709。 令人驚訝的時間竟早了一千多年！畢達哥拉斯本人曾到過巴比倫， 很可能從那裡學來。 不過從他們欣喜若狂的情況來看， 也不排除重新發現的可能性， 或者是找到了證明的方法。

對於勾股定理， 現在至少有三種不同的理解， 當然表達方式也不同：

1. 在直角三角形斜邊上的正方形等於直角邊上的兩個正方形。

這就是歐幾里得《原本》卷 I 命題 47。 注意這裡講的純粹是幾何圖形間的關係， 完全不牽涉到數的問題。 所謂相等， 是指拼補相等， 即將兩個正方形剖分爲若干塊， 且可以拼湊成斜邊上的大正方形。

2. 直角三角形直角邊上的兩個正方形面積之和， 等於斜邊上正方形的面積。

圖形的面積是一個數， 定理指出兩個數的和等於第三個數。 應注意歐幾里得從來沒有把面積看作一個數來加以運算。

3. 直角三角形斜邊長度的平方， 等於兩個直角邊長度平方之和。

長度是數， 數的平方還是數， 定理講的是數與數之間的關係， 並不考慮數的平方的幾何意義。

這三種提法的意義是不同的， 第一種不妨稱爲"形的勾股定理"， 後兩種稱爲"數的勾股定理"。 畢達哥拉斯當時怎樣理解這個定理？根據他對於數的認識， 似乎應該是第一種。 這個學派雖然發現了不可通約量， 但拒絕承認無理數是數。 就拿最簡單的等腰直角三角形來說， 設直角邊是 1， 如果數的勾股定理成立， 斜邊長度的平方應該是 2， 於是出現什麼數的平方是 2 的問題， 也就是

[2]G.A. 普林頓 (Plimpton) 收藏的 322 號泥板， 長方形 12.7×8.8 釐米， 現存美國哥倫比亞大學。

要回答 “斜邊的長度是多少？” 當他們進一步了解到任何數 (他們所知道的有理數) 都不是斜邊的長時， 必定會大惑不解。 因此很難說他們已經建立了數的勾股定理。 至於他們怎樣發現這個定理， 又怎樣去證明它， 後人倒作了一些合乎情理的推測。

這個學派曾研究過鋪地磚的問題。 像圖 7 那樣用等腰直角三角形來鋪地是常見的。 不難看出， $\triangle ABC$ 的直角邊上的兩個正方形合起來正好是斜邊上的正方形。 受此啓發後， 自然會推想對於非等腰的直角三角形這關係也能成立。

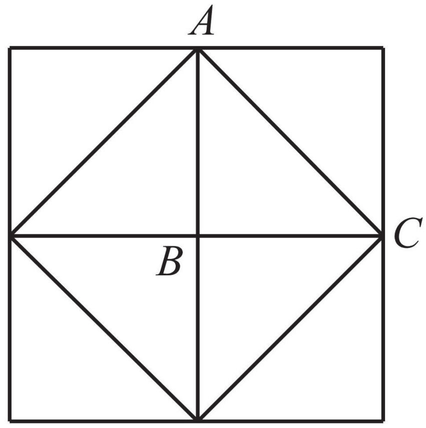


圖 7

任給 $\triangle ABC$(圖 8)， 各邊長分別爲 a、 b、 c。 以 $a+b$ 爲邊完成 $\square EFCD$， 它由四個全等的 $\triangle$ 和 C 邊上的 $\square$ III 拼成。 如果將 $\triangle$ 移動一下位置， 立刻看出 $\square EFCD$ 也可以由四個 $\triangle$ 和 a、 b 上的兩個 $\square$I， $\square$II 拼成圖 9。 從而得到

$$\square \text{III} = \square \text{I} + \square \text{II}。$$

畢達哥拉斯的證法也許和這個類似。

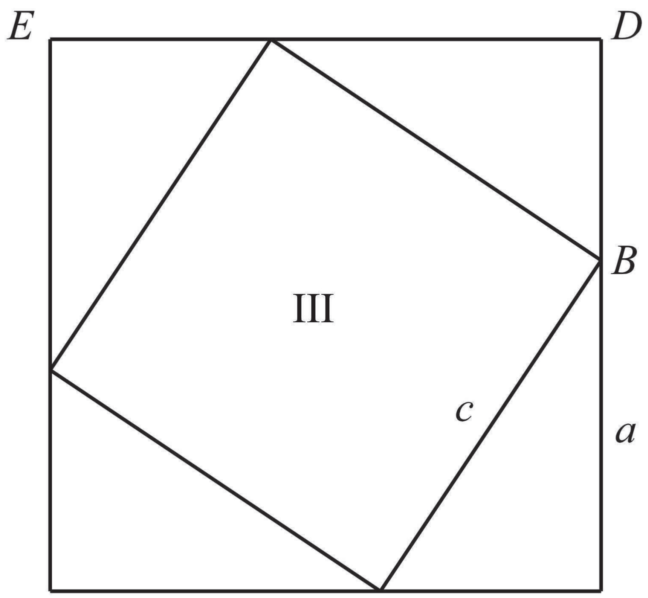


圖 8

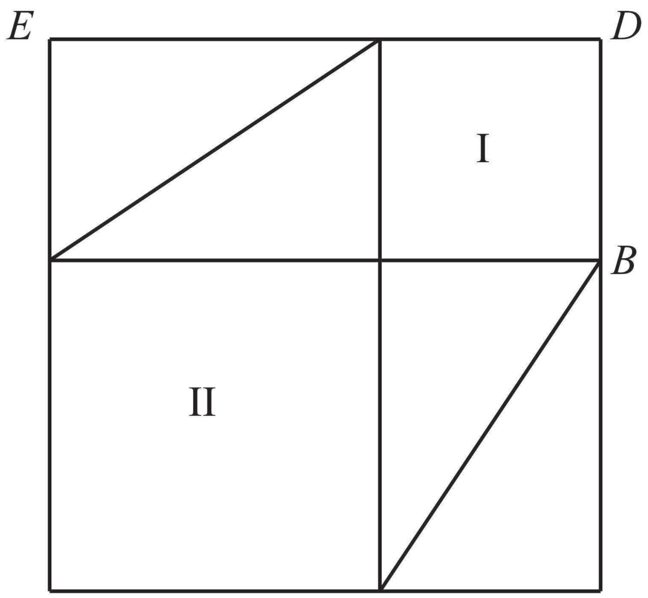


圖 9

勾股定理大概是所有數學定理中證法最多的， 在路明思（Elisha Scott Loomis）的《*Pythagorean Proposition*》一書中已收集到 367 種之多。

畢達哥拉斯還發現用三個整數表示直角三角形邊長的一種公式， 也就是不定方程

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

的一組解： $2n+1$ 、 $2n^2+2n$ 分別是二直角邊， $2n^2+2n+1$ 是斜邊。 滿足 (1) 的正整數， 現在叫做畢達哥拉斯或勾股數組。 上面這一組解並不是 (1) 的全部解， 只限於斜邊與一個直角邊的差是 1 的那一種解。 它很容易從前面提到的連續奇數和是平方數這一關係推出。 討論形數時已知

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$$

若左端最後一個奇數恰好是某一個奇數 $2n+1$ 的平方 (如 $25 = 5^2$ 、 $49 = 7^2$ 等)：

$$2k + 1 = (2n+1)^2 \tag{2}$$

那麼左端就是兩個平方數 k^2 ， $(2n+1)^2$ 之和， 又由 (2) 知 $k = 2n^2 + 2n$ ， 於是有

$$(2n^2+2n)^2 + (2n+1)^2 = (2n^2+2n+1)^2。$$

畢達哥拉斯通過這一關係得出他的結果， 是順理成章的。

晚期的希臘代數學家丟番圖 (Diophantus) 雖然已經知道 (1) 的一般解法， 但他未明顯地表述出來。 直到七世紀初， (1) 的完整解答 $2mn$ 、 m^2-n^2 、 $m^2+n^2 (m > n)$ 才由印度的婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 明確地給出。

正多面體

這個學派在幾何方面還發現了五種正多面體。 關於這一點， 有幾種不同的說法， 一種說畢達哥拉斯本人原先只知道四種： 四面

體、六面體、八面體、二十面體。另一方面，他主張一切物質都由土、水、氣、火四大元素構成。土是固體、水是液體、氣是氣體、火是比氣體更稀薄的東西。他把這四大元素和四種正多面體聯繫起來，說土生於正六面體，水生於正二十面體，氣生正八面體，火生於正四面體。後來發現還有正十二面體，但沒有第五種元素，只好同整個宇宙對應。

另一種意見認爲畢達哥拉斯早就知道正十二面體，還有正四面體和正六面體。理由是正十二面體的每一個面都是正五邊形，而這個學派對正五邊形的作圖法深有所知，並且用五角星來作他們秘密組織的徽章或聯絡的標誌，稱之爲“健康”。有一則故事說這個組織的一個成員流落異鄉，貧病交迫，無力酬謝房主的款待，臨終前要求房主在門前畫一個五角星。若干年後，有同派的人看到這個標誌，詢問事情的經過，厚報房主而去。

1885 年，在義大利帕多瓦 (Padua) 附近的歐加內丘陵 (Colli Euganei) 發現用皂石製造的正十二面體，這是公元前 500 年以前的遺物，源出於義大利西北部的伊特拉斯坎 (Etruscan)。此外，在別處也發現類似的正十二面體，不下二十六個。可以推想當時畢達哥拉斯學派的人見過這種東西，以後作爲數學研究的對象。

不管是正五邊形或正十二面體，都和希帕索斯 (Hippasus，約公元前 470 年，是梅塔蓬圖姆地方的人) 這個人物有關。他原先是學派的成員，後來被開除或被投入大海中淹死，也有的說是船隻出事沉沒，因而喪生。關於原因，至少有三種傳說：1. 是政治問題，他違反教規，參與反貴族的民主運動；2. 自誇發現了正十二面體或不可通約量；3. 洩漏了這些秘密。

不可通約量

不可通約量或無理量的發現，也許是這個學派最重大的貢

獻，但卻和他們的信條相抵觸。他們認爲萬物都可以用數來表示，所謂數，就是正整數與分數。除此以外，他們不認識也不承認有別的數。無理量的發現表明有些量不能用數來表示。這對他們的信條是一個致命的打擊。他們惶恐不安，妄圖用保密的辦法來掩蓋這一事實，但實際只能是掩耳盜鈴。

他們通過什麼途徑取得這一項成就？衆說紛紜。歸結起來，有下列這幾種可能：

1. 用輾轉相截的方法求正方形的邊與對角線的公度，發現公度根本不存在。

如圖 10 所示，BC 是正方形的一邊，AC 是對角線，現求

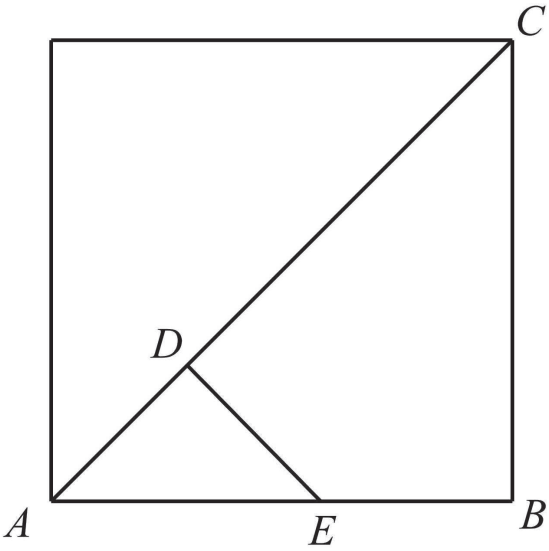


圖 10

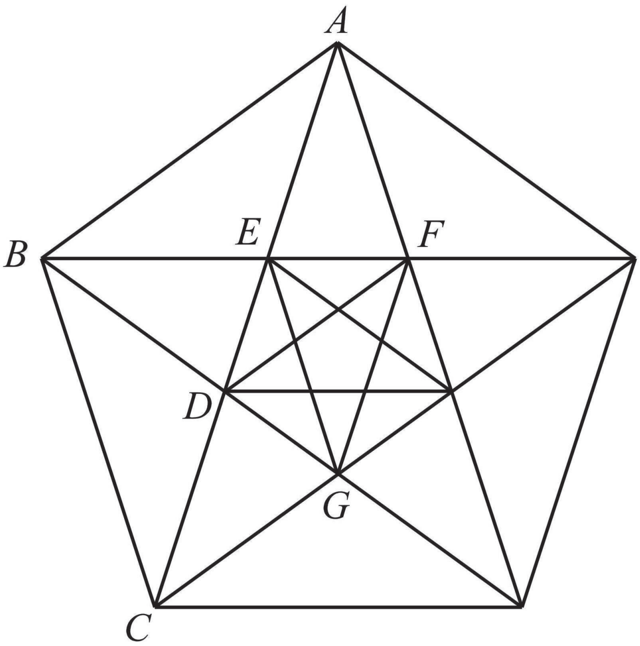


圖 11

兩者的公度。先在 AC 上截取 $DC = BC$，作 $DE \perp AC$ 交 AB 於 E，易知 $AD = DE = EB$。AC 截去 DC 後剩下的一段 $AD < AE < AB = BC$。下一步應該在 BC 上截取等於 AD 的線段，但 $AB = BC$，故也可以在 AB 上截取。截取 $EB = AD$ 之後，剩下的 AE，正好是以 AD 爲邊的正方形的對角線。於是情況又和開始時一樣，以下的步驟只是重複上述的手續，這種重複永遠不會完結。因此不可能存在公度。即 AC 與 AB 不可通約。

2. 用同樣的方法求正五邊形的一邊與對角線的公度， 或者將一個線段分爲中末比之後， 求大、 小兩部分線段的公度， 最後證明公度不存在。

正五邊形的五條對角線構成一個五角星形， 它的中心會形成一個小正五邊形 (圖 11)。 容易證明 $AB = AD = EC$、 $AE = DC = FG$。 現在求一邊 AB 與對角線 AC 的公度。 先在 AC 上截取 $AD = AB$， 剩下一小段 $DC < EC = AB$， 下一步應該用 DC 或 AE 去截 AD， AD 截去 AE 後剩下的 ED 是小正五邊形的一邊， 而 $FG = AE$ 是對角線。 接著應該是用 ED 去截 AE 或 FG。 於是又重複上述求正五邊形的一邊與對角線的公度的手續， 而且永遠這樣重複下去， 所以不存在公度。

中末比的情形與此類似， 不再複述。

3. 建立了算術 (等差) 中項、 幾何 (等比) 中項、 調和中項的概念之後， 很自然會提出 “ 兩個最小的數 1、 2 的等比中項是什麼” 的問題。 後來證明不存在這樣的數。

4. 用幾何方法證明了勾股定理之後， 他們相信 “數的勾股定理 ” 也一定成立。 於是便有 “單位正方形的對角線等於多少” 的問題。 結果出現了不可克服的矛盾。

3. 和 4. 這兩個問題都是要找出一個數來， 使得它的平方等於 2。 設這個數是最簡分數 $\dfrac{n}{m}$， 則有 $n^2 = 2m^2$， 故 n^2 爲偶數， 但只有偶數的平方才是偶數， 故 n 是偶數。 令 $n = 2k$， 則 $n^2 = 4k^2 = 2m^2$， 或 $2k^2 = m^2$， 於是 m^2 是偶數， m 也是偶數。 這與 $\dfrac{n}{m}$ 是最簡分數的假設矛盾。 故不存在一個數 (分數)， 它的平方等於 2。

這個 “奇偶證法” 有時叫做 “歐幾里得證法”， 實際最早見於亞里士多德 (Aristotle) 的著作中， 後來成爲歐幾里得《 原本 》卷 X 命

題 117， 這是後人添加上去的。 許多標準的版本都將它刪去， 只放在附錄中。

畢達哥拉斯學派有一個教規， 就是將一切發明都歸功於學派的領袖， 而且對外保密。 所以討論他們的學術成就時， 很難將畢達哥拉斯本人和他的學派分開。 不過不可通約量的發現， 大約是在公元前 470 年左右， 那時畢達哥拉斯已不在世。 他們討論比率與比例， 僅限於可公度的量。 設一個量是公度的 p 倍， 另一個量是公度的 q 倍， 那麼兩者的比就是 $p:q$， 用 $\grave{\rho}\eta\tau\acute{\zeta}$ 這個詞來表示， 原意是 “可表達的”， “可比的”。 後來轉成拉丁文 ratio， rationalis， ratio 除了保留 “比” 的意義外， 還有 “理由” 的意思。 rationalis 由 ratio 派生出來， 它的意義應該是 “可比的”， 但同時又有 “ 有理 (合乎情理) 的 ” 的含義。 前者漸漸被人遺忘， 只剩下 “ 有理的 ”、“ 合理的 ” 的含義。 轉成英文 rational， 法文 rationnel 等也都已經沒有 “ 可比的 ” 的意思。 對於不可公度 (不可通約) 的量， 這個學派認爲是 “ 不可比的 ”($\ddot{\alpha}\lambda o\gamma o\zeta$) 或 “ 不可表達的 ”($\ddot{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\zeta$)。 $\ddot{\alpha}\lambda o\gamma o\zeta$ 同時也有 “ 不合理的 ” 的意思， 相當於拉丁文 inrationalis， 英文 irrational。

六世紀時羅馬人 A. 卡西奧多拉斯 (Cassiodorius) 首先在現代的意義下使用了 “有理的”(rationalis)、“無理的”(inrationalis) 這兩個詞， 確實認爲有一些數是合理的， 有一些數是不合理的。 他未必想到原來的意義是 “ 可比的 ” 與 “ 不可比的 ”。

對幾何量建立一般的比例論， 它適用於可公度量與不可通約量， 這是歐多克索斯 (Eudoxus) 的功勞。 他的理論後來成爲《 原本 》第 5 卷的主要內容。

天文學

這個學派在天文方面也有不少獨特的見解， 有一些是正確

的， 也有一些是假說或臆斷。 例如他們認爲日 、 月 、 五星以及其它天體都呈球形， 浮懸在太空中， 天體的運行都沿著圓形的軌跡， 因爲圓是最完美的平面圖形， 而球是最完美的立體。 畢達哥拉斯原先認爲地球是宇宙的中心， 但他的門徒如希塞塔斯 (Hicetas， 敍拉古地方的人) 、 菲洛勞斯等人放棄了這一主張， 說地球繞著 “中心火”(Central fire， 不是太陽) 旋轉。 在中心火的另一面， 還存在一個和地球對稱的 “對地星”(counter–earth， 或譯 “反地球”)。 而人類永遠不能看見對地星與中心火， 因爲居住人的那一半球總是朝著相反的方向。 有人以爲他們已經建立了太陽中心說， 這是誤解。

他們還認爲天體與地球的距離以及運行的週期等等天文數據與和諧的音樂是合拍的， 換句話說， 天體運動就是在演奏音樂。 有的信徒還牽強附會地說這種音樂只有畢達哥拉斯能夠聽到， 一般人是聽不到的。 十七世紀時一位天文學家 J. 刻卜勒 (Kepler) 將這一思想大加發揮， 說太空的運動是一部樂曲， 它爲智力思維所理解， 而不爲聽覺所感知。 有趣的是， 1979 年竟有人用現代電子技術將刻卜勒的天文數據譯成音樂， 彈奏出來， 幻想居然變成了現實。

結語

畢達哥拉斯和他建立的學派是不可分割的， 它是繼伊奧尼亞學派之後， 古希臘第二個重要的學派。 它存在的時間達兩個世紀之久， 影響之大， 遠遠超過前一個學派。

近代數學特點之一是它的高度抽象性。 人類最初認識數是從具體的事物開始的，3 頭牛 、 5 棵樹是容易理解的， 但從這些實際的事物中抽象出純粹的數 3 與 5， 卻經歷了漫長的歲月。 這是人類認識上的一次巨大的飛躍， 這一飛躍首先應歸功於畢達哥拉

斯學派。他們承認並強調數學的對象是抽象的思維，和實際的事物有所區別。他們將抽象的數與形結合起來，進行了一系列的探討，使數學逐漸成爲一門獨立的學科。同時又給它披上一層神秘的外衣，使人莫測高深。

在數學中引入邏輯因素，對命題加以證明，一般認爲是從伊奥尼亞學派開始的，但畢達哥拉斯學派在這一方面作了重大的推進。他們的工作可以說是歐幾里得公理化體系的前驅。

這個學派延續的時間很長，因此早期和晚期的思想和學說並不完全相同。他們所取得的成果，在當時的確是最先進的，然而由於保密的關係，沒有立刻在廣大群衆中產生應有的影響。等局外人得知這些成果時，他們已經被別的學派超過了。不過他們的歷史功績，是不可磨滅的。

文　　獻

[1] B.L. van der Waerden, *Erwahende Wissenschaft*, Birkhüser Verlag, 1966。

[2] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1921。

[3] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[4] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Dublin University Press, 1889; Arno Press, New York, reprint, 1976。

[5] W.W.R. Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover, 1908。

[6] Á. Szabó, *The beginnings of Greek mathematics*, D. Reidel publishing Company, 1978。