

歐 多 克 索 斯

歐多克索斯 (Eudoxus)，約在公元前 408 年生於尼多斯 (Cnidus，今土耳其的西南部)；約公元前 355 年卒於尼多斯。數學、天文學、地理學。

歐多克索斯

周煥山

(江蘇教育學院)

歐多克索斯 (Eudoxus) ，約在公元前 408 年生於尼多斯 (Cnidus，今土耳其的西南部)；約公元前 355 年卒於尼多斯。數學、天文學、地理學。

歐多克索斯出生於一個世代行醫的家庭，年輕時就讀於著名的尼多斯醫科學校。在他卒業後，當過醫生賽奧梅頓 (Theomedon) 的助手。可能在這個時期曾去過義大利和西西里，向阿契塔 (Archytas) 學習幾何。公元前 368 年，他隨同賽奧梅頓去雅典作為期兩個月的訪問。賽奧梅頓在皮雷埃夫斯 (Piraeus) 為他安排了住所，但是求知渴望驅使他每天都步行十多公里，往返於皮雷埃夫斯和雅典之間，去“學園”聆聽柏拉圖等大師們的演講。他深受激勵，增強研究數學、天文學和哲學的志趣，並和柏拉圖本人建立了友誼。返回尼多斯之後，他一邊行醫，一邊研究學問。約公元前 365 年，他同另一位醫生克里西帕斯 (Chrysippus) 去埃及訪問。這一次，他受斯巴達國王的委托向埃及法老遞交一封表示親善的外交書信。他因此得以晉謁法老，並由此得以結交赫里俄波里斯 (Heliopolis，太陽神廟所在地) 的一些高僧。由於東道國的好客和朋友的資助，他在埃及旅居了約十五個月之久。他在那裡觀測了希臘人看不到的南天星座，以及尼羅河的起落。他虛心地向僧侶們學習天文曆算知識，仔細研究埃及曆法，並考察了當地的風土民俗和神話傳說，但他表示不相信占星、算命可以預知人的一生命運。

自埃及返回小亞細亞以後，歐多克索斯在基齊庫斯 (Cyzicus，

今馬爾馬拉海南岸) 創辦了一所學校。他在那裡培養了許多學生，聲譽日隆，還應邀訪問了卡里亞 (Caria) 的君主馬索洛斯 (Mausolus)。他的第一本著作《現象》(Phaenomena) 就是在基齊庫斯發表的。

在公元前 360 年到前 350 年之間，歐多克索斯曾帶領一些學生遷往雅典，和柏拉圖學園建立了更為密切的聯繫，他們很可能加入了柏拉圖學園。後來尼多斯發生重大的政治變革，人民推翻了獨裁政權，建立了民主政體，歐多克索斯應邀回歸故國，為尼多斯人起草了必要的法典，並獲得極高的榮譽。此後他在尼多斯定居下來，繼續從事教學和科學研究，並支持天文觀測，直至逝世。

歐多克索斯是古希臘時代中成就卓著的數學家和天文學家。他對數學的最大的功績是創立了關於比例的一個新理論。根據亞里士多德 (Aristotle) 著作中的有關記述和後來評註家對歐幾里得 (Euclid) 《原本》(Elements) 的分析，可以斷定《原本》卷 V 和卷 XII 主要來自歐多克索斯的工作。畢達哥拉斯 (Pythagoras) 學派也有建立過比例論，但只適用於可公度量。設 A 、 B 兩個量是可公度的， A 是公度的 m 倍、 B 是公度的 n 倍，則 $A : B = m : n$ 是一個數。這個時候 A 、 B 就叫做“可比的”。如果這兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等，就構成了比例式 $A : B = C : D$ 。最初，他們認為所有的量都是可公度的，因此任何兩個量都可比。但後來發現有些量是不可公度的。比例論的建立就發生了困難。徹底擺脫這一困難的是歐多克索斯。可惜他的著作已失傳。他的貢獻只能從別人的工作中去了解。

他首先引入“量”的概念，將“量”和“數”區別開來。用現代的術語來說，他的“量”指的是“連續量”，如長度、面積、重量等，而“數”是“離散的”，僅限於有理數。其次改變“比”的定

義：“比”是同類量之間的大小關係。如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量，則說這兩個量有一個“比”。這個定義含蓄地把零排除在可比量之外；並且它實質上相當於所謂“阿基米德公理”(阿基米德本人將此公理歸功於歐多克索斯。不過在現存文獻中正式作為公理形式提出的，則以阿基米德為最早)。

根據現代的比例論可知，如果已知 A 、 B 、 C 、 D 四個量成比例： $A/B = C/D$ ，接著將兩邊同時分別乘以分數 m/n 後，就可以得到 $(mA)/(nB) = (mC)/(nD)$ 。

由 $mA > nB$ ，立即可以推出 $mC > nD$ ；

由 $mA = nB$ ，立即可以推出 $mC = nD$ ；

由 $mA < nB$ ，立即可以推出 $mC < nD$ 。

歐多克索斯比例論的關鍵，是將這一性質作為比例的定義，即設有 A 、 B 、 C 、 D 四個量，將 A 與 C 、 B 與 D 分別乘以相同的倍數，如果

由 $mA \geqslant nB$ ，可以推出 $mC \geqslant nD$ ，

就說兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等，四個量可構成比例式 $A : B = C : D$ 。

從這一定義出發，可以推出有關比例的若干命題，而不必考慮這些量是否可公度。這在希臘數學史上是個大突破。不難看出，當兩個量 a 和 b 不可公度時，可按 $m/n < a/b$ 或 $m/n > a/b$ ，把全體有理數劃分成兩個不相交的集合 L 和 U ，使得 L 的每一元素都小於 U 的每一元素，並以此來定義無理數 a/b ，這不禁令人想起了“戴德金分割”。事實上，十九世紀的無理數理論是歐多克索斯思想的繼承和發展。不過歐多克索斯理論是建築在幾何量的基礎之上的，因而迴避了把無理數作為數來處理。儘管如此，歐多克索斯的這些定義無疑給不可公度比提供了邏輯基礎。為了防止在處理這些量時出錯，他進一步建立了以明確公理為依據的演繹體

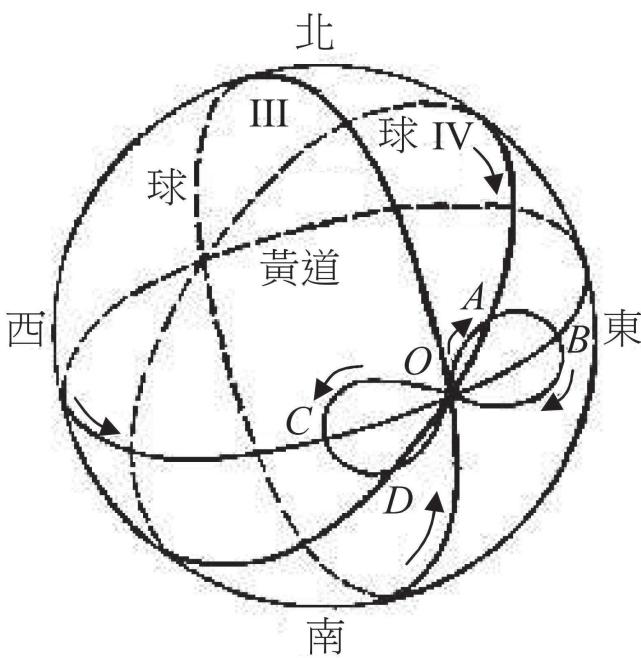
系，從而大大推進了幾何學的發展。從他之後，幾何學成了希臘數學的主流。

歐多克索斯對數學的第二個貢獻是建立嚴謹的窮竭法，並用它證明一些重要的求積定理。窮竭法起源於安蒂豐 (Antiphon)，後來希波克拉底 (Hippocrates) 也曾使用過，但只是到了歐多克索斯手裡，窮竭法才真正成爲一種合格的幾何方法。窮竭法的邏輯依據，是歐多克索斯由上述定義 4 推得的下述結果：“設給定了兩個不相等的量，如果從其中較大的量減去比它的一半大的量，再從所餘的量減去比這餘量的一半大的量，繼續重複這一過程，必有某個餘量將小於給定的較小的量”。這個結果，現在被稱爲歐多克索斯原理。阿基米德曾明確地指出，“稜錐體積是同底同高的稜柱體積的三分之一”和“圓錐體積是同底同高的圓柱體積的三分之一”，這兩個定理是歐多克索斯首先證明的。不過前一個結論曾先由德謨克利特 (Democritus) 未加證明地提出過。歐多克索斯的窮竭法可看做是微積分的第一步，但沒有明確地用極限概念，也迴避了“無窮小”概念。

此外，歐多克索斯還研究過“中末比”(後人稱黃金分割) 和“倍立方”等著名的數學問題。根據歐德莫斯 (Eudemus) 在《幾何學史》中的記載，他在研究中末比時應用了分析法。他在這方面的工作痕跡，可用《原本》卷 XIII 命題 5 來說明。命題 5 是一個關於中末比的定理。一些古代手稿表明，命題 5 原先是根據比例的一般性質用分析法予以證明的。這一證法很可能出自歐多克索斯之手。他在解倍立方問題時，像阿契塔一樣，曾應用機械來解幾何問題，爲此遭到主張把作圖工具嚴格限制爲直尺和圓規的柏拉圖的批評。埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 曾經在一本書中引述過歐多克索斯的解法，可惜的是這段記述失傳了。

歐多克索斯在天文學方面最有影響的工作，在於把球面幾何用於天文研究，提出一個以地球爲中心的同心球理論。這種理

論起源於早期的畢達哥拉斯學派，而為柏拉圖所繼承。按照柏拉圖的說法，整個宇宙以及其中的一切天體都是球形的，因為球形是一切形狀中最完美的。位於宇宙中心的地球，宇宙的軸通過地球中心，一切都按從東向西的方向繞軸作勻速圓周運動。然而事實上，行星的運動速度時快時慢，時而靜止，甚至逆行。對此，柏拉圖認為這只是一種表面現象，可用勻速圓周運動的結合來解釋。他在《蒂邁歐》(*Timaeus*) 篇中說，太陽、月亮和五顆行星除了每日像恆星一樣從東向西運轉一周以外，它們同時還在和天球赤道平面成一傾角的另一平面內做獨立的圓周運動，這兩種運動的合成，就使行星在空間的路線被扭曲成螺旋形了。歐多克索斯發展了柏拉圖的觀點，在《論速度》(*On speeds*) 一書中提出了自己的同心球理論。他認為所有恆星共處於半徑最大的一個球面上，此球每日環繞通過地心的軸線自東向西旋轉一周。其它天體的運動，則是由多個同心球的勻速轉動結合而成。太陽、月亮各三個，五顆行星各四個，連同恆星的一個，共計 27 個同心球。這 27 個球經過適當組合以後，就可解釋人們觀測到的天象。例如，金星的運動是由這樣四個同心球確定：第一個球作類似恆星的運動，每日一周；第二個球沿黃道十二宮運行，方向和第一球相反，每年一周。第三、四兩個球用以說明金星速度的變化。它們的週期都等於金星和太陽的會合週期，即 570 天，但運動的方向彼此相反。它們的旋轉軸和黃道圈的軸所成角度，係根據觀測數據來推算。若暫不考慮第一、二兩球，僅考慮第三、四兩球運動的合成，就會形成一種球面雙紐線(如圖所示)，樣子形如古代的“馬鎗”，所以歐多克索斯稱它為“馬鎗線”。如果結合第二個球沿黃道的運行，則在圖上 D 與 A 之間，金星將沿黃道運行，在 O 點的速度最大值，隨後減速，在 AB 段近於停滯，在 B 點處速度為 0。從 B 到 C ，金星發生逆行，在 O 點處逆速度最大，在 C 點處速度為 0。 CD 段近於停



滯，並且逐漸恢復向東運行。再加上第一個球的晝夜運行，四個同心球的結合，就對金星的視運動作出了一種比較接近的解釋。當然，同心球理論純粹是一幾何模型，由於它建立在地心說的錯誤假設上，因而無法與實際天象真正吻合。不久就有批評指出，行星亮度的變化說明它到地球的距離也是變化的。但是，歐多克索斯工作的真正意義是在於理論方面，他的同心球模型是建立數學化的天文理論的第一次嘗試，也是顯示了天才的獨創性的一次嘗試。

歐多克索斯在天文學上的另一項引人注目的工作，是對星象的長期不懈的觀測，並在《現象》一書中記述了他的觀測結果。書中不僅像地圖一樣描述了主要星座的空中位置，而且記載了一些星座在地平線起、落的情況，為改革曆法準備了必要的資料。歐多克索斯後來曾對此書作過全面修訂，並以《鏡像》為名重新發表。在此基礎上，他編制了一本新型的天文曆書，即所謂《八年輪迴曆》(Oktaeteris)。這本曆書及其後的一些仿效本，在希臘人居住地域得到廣泛流傳。公元前 46 年，羅馬凱撒 (Caesar) 大帝頒佈的儒略曆，又把歐多克索斯的曆法思想傳遍歐洲。影響所及，直至現代。

歐多克索斯還精確地測算了行星運行的週期。下面是他對行星的黃道週期和會合週期的測算結果同現代結果的對比表：

	黃道週期		會合週期	
	歐氏結果	現代結果	歐氏結果	現代結果
土星	30 年	29 年 + 166 天	390 天	378 天
木星	12 年	11 年 + 315 天	390 天	399 天
火星	2 年	1 年 + 322 天	260 天	780 天
水星	1 年	1 年	110 天	116 天
金星	1 年	1 年	570 天	584 天

可見，除去火星的會合週期因某種原因有明顯差錯之外，其餘數據都和現代結果相當接近。這在當時很原始的觀測條件下是難能可貴的。這類觀測結果也為他設計同心球幾何模型準備了所需要的數據。

歐多克索斯寫過一部七卷的《地球巡禮》，總結了他在地理學方面的考察研究結果。根據現存約一百件殘片，可以推知原著的概貌。歐多克索斯從遙遠的亞洲說起，系統地記敍了當時希臘人所能知道的世界的每個部分，並加上政治、歷史、人種等方面的詳情介紹，還利用希臘神話進行渲染。書中的第二卷寫埃及，第四卷寫了包括有色雷斯 (Thrace) 在內的愛琴海沿岸地區，第六卷寫希臘半島及北非，第七卷寫義大利，包括一篇關於畢達哥拉斯學派的習俗的附記。其文筆生動，堪與米利都的地理學家赫卡泰烏斯 (Hecataeus，公元前六－五世紀) 的傑作《環遊世界》(Ges periodos) 相媲美。

瑞士希臘史家 F. 拉瑟爾 (Lasserre) 稱歐多克索斯是“和柏拉圖同時代的最傑出的數學家，他由於對三門學科：幾何學、天文學和地理學的貢獻而聞名於世”。他一生的著述很多，除以上三門外，還涉及醫學、法律、哲學等多個領域，可惜都沒有流傳下來。

文 獻

- [1] F. Lasserre, *Die Fragmente des Eudoxus von Knidos*, Berlin, 1966
- [2] F. Lasserre, *The birth of mathematics in the age of Plato*, Hutchinson of London, 1964 。
- [3] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. I, Oxford, 1921; reprint, 1981 。
- [4] T.L. Heath, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, 1949 。
- [5] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, 2nd ed., Providence, 1957 。
- [6] G.L. Huxley, *Eudoxus of Cnidus*, *Dictionary of scientific biography*, vol. IV, 466 – 467 。
- [7] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972 。
- [8] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer, 1979 (中譯本：C.H. 愛德華，微積分發展史，北京出版社，1987) 。