阿　基　米　德

阿基米德 (Archimedes) 於公元前 287 年出生在西西里島 (Sicily，今屬義大利) 的敘拉古 (Syracuse)；公元前 212 年卒於敘拉古。數學、力學、天文學。

阿基米德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Archimedes.html

阿　基　米　德

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

阿基米德 (Archimedes) 於公元前 287 年出生在西西里島 (Sicily， 今屬義大利) 的敍拉古 (Syracuse)； 公元前 212 年卒於敍拉古。 數學、 力學、 天文學。

和其他的古希臘數學家相比，阿基米德的生卒年是比較確實的。 歷史學家 J. 策策斯 (Tzetzes， 約 1110 − 約 1180) 在《史書》(*Book of histories*)[1] 中記載：“智者阿基米德是敍拉古人， 著名的機械製造師， 終生研究幾何， 活到七十五歲”。 阿基米德之死， T. 李維 (Livy， 公元前 59 − 公元 17 年)[2]、 普盧塔克 (Plutarch， 約公元 46 − 119 年之後)[3]、 策策斯等歷史學家作了不同的描述， 但一致同意他是敍拉古淪陷 (公元前 212 年) 時被羅馬兵所殺的。 倒推回去， 應生於公元前 287 年。

阿基米德是敍拉古統治者海厄羅王 (King Hiero II， 約公元前 308 − 前 216 年， 約公元前 270 − 前 216 年在位) 的親戚， 他和王子吉倫 (Gelon， 後繼承王位) 友善。 父親菲迪亞斯 (Phidias) 是天文學家。

阿基米德早年曾在當時希臘的學術中心亞歷山大跟隨歐幾里得的門徒學習， 對歐幾里得數學進一步發展作出了一定的貢獻。 在那裡結識許多同行好友， 例如科農 (Conon of Samos， 約公元前

[1]拜占庭詩人兼歷史學家， 《史書》又稱《千行詩集》(*Chiliades*)， 實際是 1.2 萬行， 包括文學、 歷史等方面的資料。

[2]羅馬三大歷史學家之一， 著 142 卷的《羅馬史》(*The Annals of the Roman People*)。

[3]希臘傳記作家， 寫過大量作品， 最有名的是《希臘羅馬名人比較列傳》(Parallel Lives)， 此書選擇希臘羅馬人事蹟相近者加以比較。

245 年前後)[4]、 多西修斯 (Dositheus， 公元前 225 年前後)[5] 以及埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 等等。 回到敍拉古以後仍然和他們保持著密切的聯繫， 因此阿基米德也算是亞歷山大學派的成員， 他的許多學術成果就是通過和亞歷山大的學者通信往來保存下來的。 後人對阿基米德給以極高的評價。 數學史家 E.T. 貝爾 (Bell，1883 – 1960) 說： 任何一張列出有史以來三個最偉大的數學家的名單中， 必定會包括阿基米德， 另外兩個通常是牛頓和高斯。 不過以他們的豐功偉績和所處的時代背景來對比， 拿他們的影響當代和後世的深邃久遠來比較， 還應首推阿基米德 (見 [5]， p.20)。 普利尼 (Pliny， 公元 23 – 79 年)[6] 甚至稱阿基米德爲 “數學之神”(見 [6]， p.111)。 這些過分的讚揚， 反映了後世對阿基米德的崇敬。

赫拉克利特 (Heraclides) 曾寫過阿基米德的傳記， 歐托基奥斯 (Eutocius of Ascalon， 約生於公元 480 年)[7] 不止一次提到這件事， 可惜傳記已失傳。 阿基米德的生平事蹟， 散見於各種古代的文獻中。

金冠[8]之謎

維特魯維厄斯 (Marcus Vitruvius Pollio， 公元前一世紀上半葉 – 公元前 25 年)[9]是羅馬有名的建築學家， 以傳世的十卷《 建築學 》(*De Architectura Libri X*)[10]著稱。 這書第 IX 卷記述了一段傳誦千古的逸事 (見 [7]， p.37)。 敍拉古的海厄羅王的政治威望及權勢日益提高， 爲了報答諸神的德澤， 他決定建造一個華貴的神龕， 內

[4]生於薩摩斯 (Samos) 島， 天文學家、 數學家， 以善辨星座著稱， 他的圓錐曲線研究爲日後阿波羅尼奥斯所引用。

[5]科農的學生和朋友， 研究曆法和天氣預報。

[6]羅馬時代的科學史家， 著有 37 卷的《 自然史 》(*Historia naturalis*， 一譯《 博物志 》)， 公元 79 年維蘇威火山爆發， 親往觀察， 並從事救援工作， 不幸中毒窒息而死。

[7]希臘數學著作的註釋家。

[8]準確地說， 是祭祀用的環狀花冠 (Wreath)， 現依習慣叫做王冠。

[9]和他同時代， 羅馬有一個政治家叫波利奥 (Gaius Asinius Pollio)， 歷史學家爲了區別起見， 就把這位建築學家簡稱爲 Vitruvius。

[10]1486 年首次在羅馬印刷出版； 有 M.H. Morgan 的英文本， 1915。

裝一個純金的王冠， 作爲謝恩的奉獻物[11] 。

金匠如期完成了任務， 理應得到獎賞。 這時有人告密說金匠偷去一部分金子， 以等重的銀子摻入。 國王甚爲憤怒， 但又無法判斷是否確有其事。 便請素稱多能的阿基米德來鑒定一下， 他也一時想不出好辦法來， 正在苦悶之際， 他到公共浴室去洗澡， 當浸入裝滿水的浴盆去的時候， 水漫溢到盆外， 而身體頓覺減輕。 於是豁然開朗， 悟到不同質料的物體， 雖然重量相同， 但因體積不同， 排去的水必不相等。 根據這一道理， 不僅可以判斷王冠是否摻有雜質， 而且知道偷去黃金的份量。 這一發現非同小可， 阿基米德高興得跳了起來， 赤身奔回家中準備實驗， 口中不斷大呼 “尤里卡! 尤里卡! ”(Eureka， 意思是 “我找到了”) [12] 。

這問題可解釋如下： 設王冠重 W ， 其中金與銀分別重 W_1 與 W_2， 而 $W = W_1 + W_2$。 分別取重爲 W 與 W_1 的純金放入水中， 設排去水的重量各爲 F_1 與 x， 則 $W : W_1 = F_1 : x$， 即 $x = \dfrac{F_1W_1}{W}$ 。 同樣， 分別取重爲 W 與 W_2 的銀放入水中， 設排去水的重量各爲 F_2 與 y， 則 $W : W_2 = F_2 : y$， 即 $y = \dfrac{F_2W_2}{W}$ 。 現將王冠放水中， 設排去水的重量爲 F， 則

$$F = \frac{F_1W_1}{W} + \frac{F_2W_2}{W}$$

由此推得 $F(W_1 + W_2) = F_1W_1 + F_2W_2$， 即

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{F - F_1}{F_2 - F} \text{ 。}$$

[11]有的書說成是國王自己戴的金冠， 這不大合情理， 因爲金冠要有相當大的體積才能從排開的水判斷體積是否異常， 也才能混入銀子， 這樣的金冠會很重，明定陵出土的金冠其薄如紗， 是否含銀一目瞭然， 那麼小的體積用排水法也未必能辨眞僞 。

[12]希臘語爲 $\varepsilon\nu\rho\eta\kappa\alpha$ ； 由於阿基米德的故事家喻戶曉， 這個字已成爲全世界的共同語言， 表達突然獲得某種發現時的驚呼； 英文 、 西班牙文爲 eureka， 法文爲 eurêka， 德文爲 heureka， 義大利文爲 èureka， 俄文 зврика 等 。

用實驗可求出 F、F_1、F_2，即可算出銀與金之比值[13]。如果 $F=F_1$，說明沒有摻銀。實際情況是兩者不等，從而揭穿了金匠的劣行。

經過仔細實驗和反覆思考，將經驗上升爲理論，他終於發現了流體靜力學的基本原理 —— 阿基米德原理：物體在流體中減輕的重量，等於排去流體的重量。後來總結在他的名著《論浮體》(*Floating bodies*) 中成爲第 7 命題 (見 [3]，p.376)。

豪言壯語

帕波斯 (Pappus) 的《數學彙編》(*Mathematical collections*) 記載，阿基米德在建立了槓桿定律 (若兩物體與支點的距離反比於其重量，則槓桿平衡) 之後，解決 "用給定的力去移動任何給定的重物" 的問題，曾發出豪言壯語："給我一個立足點，我就可以移動地球! ($\delta \acute{o} \varsigma\ \mu o \acute{\iota}\ \pi o \hat{\upsilon}\ \sigma \tau \hat{\omega}\ \kappa \alpha \grave{\iota}\ \kappa \iota \nu \hat{\omega}\ \tau \grave{\eta} \nu\ \gamma \hat{\eta} \nu$)"。

普盧塔克 (Plutarch，約公元 $46-119$ 年以後) 的《馬塞盧斯傳》(*Marcellus*) 中有更詳細的描寫。阿基米德對海厄羅王說：任何重物都可以用一個給定的力來移動。"如果另外有一個地球，就可以站在那上面移動這一個"。海厄羅王大爲詫異，想考驗一下這驚人的論斷是否可靠，要求他用事實來證明。阿基米德從國王的船隊中選定一艘有三根桅杆的貨船，這種船通常要用很多人花很大力氣才拖得動它。阿基米德安裝一組滑輪，自己站在遠處，手握繩子的一端，輕而易舉將船平衡地拉過來，好像它在海上行駛一樣。

按普羅克洛斯 (Proclus) 的說法，這艘船是海厄羅王特地爲托勒密王 (Ptolemy) 建造的，下水時幾乎動員了所有的敍拉古人。而阿基米德憑著他發明的機械，使國王自己一個人就把它拖動。國王

[13]古代文獻記述了解決問題的兩種方法。一是量等重的金、銀、王冠三者排去水的體積 (維特魯維厄斯)；另一是稱三者在水中的重量，即物體原重減去在水中的浮力，這是大約寫於公元 500 年的一首詩所說的辦法，見 [10]，p.92。此處的推導略有不同，是稱三者排去水的重量。在古代，稱重量也許比量體積更容易一些。

佩服得五體投地，當即宣佈：“從現在起，阿基米德說的話我們都要相信” (見 [2]，p.19)。

辛普里西奧斯 (Simplicius，六世紀上半葉) 在註釋亞里士多德的《物理學》(*Physica*) 時，說阿基米德發明一種“神力器”(charistion) 之後，曾經聲稱：“有立足點，我將移動地球! ($\pi\hat{\alpha}\ \beta\hat{\omega}\ \kappa\alpha\grave{\iota}\ \kappa\iota\nu\hat{\omega}\ \ \tau\grave{\eta}\nu\ \gamma\hat{\eta}\nu$，見 [3]，p.16)。策策斯則說阿基米德宣稱要用“神力器”去移動地球。

上述幾種記載內容大致相同。阿基米德眞的能移動地球嗎？不妨作一個簡單的計算。那時他並不知道地球有多重，現在知道地球質量是 6×10^{27} 克。假想用槓桿來舉起地球，加 60 公斤 (6×10^4 克) 的力，那麼力臂應該是重臂的 $6\times10^{27}\div6\times10^4=10^{23}$ 倍。要舉起地球 1/10000 毫米，力臂的一端應走過 10^{13} 公里以上。就算每天 24 小時都以短跑的速度來走過這一個距離，至少也要 3000 萬年！換句話說，即使略去槓桿本身的重量不計，阿基米德用盡畢生的力量，也休想移動地球分毫。不過這位偉大的古代力學家，只因爲不知道地球的大小，以致作出錯誤的判斷，這是可以諒解的。

敘拉古保衛戰

在阿基米德的一生中，最悲壯、最驚心動魄的一幕是他以古稀之齡，投身於反侵略戰爭，最後爲國捐軀。

迦太基 (Carthage) 是由古代腓尼基 (Phoenicia) 人所建立的國家。以現今非洲北部的突尼斯爲中心，領土東到西西里島，西達西班牙和摩洛哥。由於商業和殖民利害的衝突，從公元前 264 年起到前 146 年爲止，前後三次和羅馬人進行猛烈的大搏鬥，延續 120 年之久，羅馬人稱迦太基人爲腓尼 (Poeni)，轉爲布匿 (Punic)，故史稱布匿戰爭。第二次布匿戰爭發生於公元前 218 −

前 201 年，敍拉古和迦太基締結同盟，因此成爲羅馬的仇敵，公元前 214 年，羅馬名將馬塞盧斯 (Marcus Claudius Marcellus，約公元前 268－前 208 年) 率領大軍圍攻敍拉古。在危急存亡之秋，阿基米德便獻出自己一切傑出的科學技術爲祖國效勞。

詳細記述了這一次保衛戰的主要有以下三套書：波利比奥斯 (Polybius，約公元前 200－前 118 年) 的《通史》(*Historiae*，共四十卷)，李維的《羅馬史》及普盧塔克的《馬塞盧斯傳》(*Vita Marcelli*)。此外策策斯、呂西安 (Lucian，約公元 120－180 年以後) 等也有所論述。

馬塞盧斯從陸上及海上襲擊敍拉古。阿基米德用他發明的起重機之類的器械將靠近牆根的船隻抓起來，再狠狠地摔下去，有的被撞得粉碎，有的沉入海底。馬塞盧斯也不甘示弱，他用 8 艘 5 層櫓船 (quinquereme)，每兩艘櫓船聯鎖在一起後，架起了一種名叫 “薩姆布卡”(sambuca) [14] 的武器，準備攻城。可是敍拉古人未等敵船靠近，就用強大的機械將巨大石塊拋出形同暴雨，打得 “薩姆布卡” 七零八落。同時萬弩齊發，羅馬兵死傷無數。嚇得目瞪口呆的馬塞盧斯下令退兵。在陸上，羅馬兵也沒有佔到便宜。多次進攻，均未得逞。

有一種傳說是阿基米德用巨大的火鏡 (burning–mirror) 反射陽光焚燒敵船，這大概是誇張的說法，最早見於呂西安 (Lucian) 的記載。不過當時阿基米德已經發現拋物面反射鏡能夠聚焦的性質。有的書說成將燃燒的火球彈射出去使敵船著火，這也許比較可信。

無論如何，羅馬兵已經成爲驚弓之鳥，簡直是 “風聲鶴唳，草木皆兵”，只要看到一根繩子或者一塊木頭從城裡扔出來，便立刻抱頭鼠竄，大呼：“阿基米德的機器又瞄準我們了”。

羅馬人在一次軍事會議上，決定夜間偷襲，他們以爲飛彈只能

[14] sambuca 本來是一種三角豎琴 (trigon) 的別名，因此種武器形似，從而得名，大概類似雲梯。波利比奥斯的書中有詳細的描繪。

在遠距離起作用， 黑夜可以避開城上的視線， 一旦接近城牆， 飛彈就無能爲力了。 誰知阿基米德早有防備， 製造了一種叫 “蝎子” 的弩炮， 專門對付近處的敵人。 羅馬兵又一次吃了大虧。

馬塞盧斯嘲笑他自己的工程師和工兵說：“我們還能同這個懂幾何的 ‘百手巨人’(Briareus) [15] 打下去嗎？他輕鬆地穩坐在海邊， 把我們的船隻像擲錢遊戲 (pitch and toss) 似的拋來拋去， 船隊被搞得一塌糊塗， 還射出那麼多的飛彈， 比神話裡的百手妖怪還厲害” (《 馬塞盧斯傳 》見 [7]， p.29)。

後來羅馬軍放棄正面攻， 改用長期圍困的策略， 敍拉古終於糧食耗盡， 被叛徒出賣， 公元前 212 年， 在一個慶祝阿泰密斯 (Artemis) 神 [16] 的節日夜間陷落 [17]， 七十五歲的阿基米德也光榮犧牲了。

為國捐軀

敍拉古陷落時， 馬塞盧斯雖然發佈了許多禁令， 仍然阻擋不住士兵的劫掠。 出於對阿基米德的敬佩， 他下令不准傷害這位賢者， 但阿基米德還是被愚蠢的羅馬兵殺害了。 而關於他的死， 幾種記載頗有出入。

(一) 最早的說法出自李維。 在兵荒馬亂之中， 侵略軍大肆殺戮， 阿基米德正在沙上畫圖， 一個羅馬兵將他刺死， 根本不知道他是誰。

這裡所說的 “沙”， 是指沙盤 (sand board)， 在平板上鋪上細沙， 用來計算、 畫圖和寫字， 也就是 “算盤”(abacus)。 李維的原文是 pulvis (拉丁文， 沙盤或沙上鋪的細沙)， 後來羅馬歷史學家瓦勒里烏斯 (Valerius Maximus， 活躍於公元二十年前後) 提到這件

[15] 神話中的巨人， 有五十個頭， 一百隻手。

[16] 希臘神話中月亮和狩獵女神。

[17] 根據狄奧多羅斯 (Diodorus Siculus， 公元前一世紀， 希臘歷史學家， 著《 歷史叢書 》四十卷) 及卡修斯 (Dion Cassius， 約 150 − 235， 羅馬政治家， 著《 羅馬紀 》) 的記載。

事， 誤以爲是在沙地上畫圖， 把 pulvis 寫成 terra (土地)， 於是許多書就以訛傳訛。

許多數學史書都有轉載了一幅鑲嵌的圖案畫 (例如見 [11]， p.135)， 表現了阿基米德之死。 它是在義大利赫庫蘭尼姆 (Herculaneum) 發現的， 原爲波拿巴 (J érôme Bonaparte， 1784−1860)[18] 的傳家寶， 後爲威斯巴登 (Wiesbaden) 的 F.E. 沙貝爾 (Schabell) 所有， 1924 年由 F. 溫特爾 (Winter) 將它發表出來。 一般認爲這件工藝品是藝術家根據古代一幅畫來製作的。 畫面是一位老人， 坐在小桌子後面， 兩手似在護著放在桌上的長方形沙盤， 橫眉冷對站在旁邊的握劍士兵， 他顯然是命令老人跟他走， 較多的學者認爲它較眞實地重現了當時的情景 (見 [3]， p.32)。

(二) 策策斯的記載是， 他俯身去畫一些機械圖， 一個羅馬人走過來拖他去當俘虜。 阿基米德全神貫注在作圖上， 沒有注意是誰， 口中說：“喂! 站遠一步， 離開我的圖。” 那人繼續拽他， 他轉過頭來， 看淸是一個羅馬兵時， 立即喊道：“給我一樣器械 (指他發明的武器)! ” 士兵嚇了一跳， 馬上殺了他， 虛弱的老人就這樣倒下了。

(三) 普盧塔克還給出下面幾種說法。 阿基米德獨自聚精會神去思考要解決的問題， 目不轉睛地看他的圖， 絲毫沒有注意到城池已破。 一個羅馬兵突然出現在他的面前， 命令他到馬塞盧斯那裡去， 遭到阿基米德的嚴詞拒絕， 他表示除非解答了問題並給出了證明， 否則是不會去的。 這激怒了羅馬兵， 於是喪生在刀劍之下。

(四) 另一種說法是羅馬兵不由分說， 要立刻刺死他， 阿基米德看了他一眼， 請求他等一會兒， 不要讓一道只研究了一半而尙未解決的問題遺留給後人。 但是士兵不懂這些， 終於動了手。

(五) 還有一種說法是阿基米德帶了許多數學儀器去見馬塞盧

[18]拿破侖一世的幼弟。

斯， 如日晷 、 球以及測量太陽的工具等， 那些士兵不知這些閃閃發光的東西是什麼寶物， 於是便謀財害命 。

不管具體的情節如何， 這位曠世的大科學家， 爲了拯救自己的祖國， 曾竭盡心智， 力挽狂瀾， 給侵略者以沉重的打擊， 最後還獻出生命， 這是無可懷疑的事實 。

阿基米德之死， 馬塞盧斯甚爲悲痛， 除嚴肅處理這個士兵外， 還尋找阿基米德的親屬， 給予撫恤並表示敬意， 又給阿基米德立墓， 聊表景仰之忱 。 在碑上刻著球內切於圓柱的圖形， 以資紀念 。 因阿基米德發現球的體積及表面積， 都是外切圓柱體體積及表面積的 2/3 。 他生前曾流露過要刻此圖形在墓上的願望 。

後來事過境遷， 敍拉古人竟不知珍惜這非凡的紀念物 。 一百多年之後 (公元前 75 年)， 羅馬著名的政治家和作家西塞羅 (Marcus Tullius Cicero， 公元前 106 – 前 43 年) 在西西里擔任財務官， 有心去憑弔這認偉人的墓 。 然而當地居民竟否認它的存在 。 衆人藉助鐮刀闢開小徑， 發現一座高出雜樹不多的小圓柱， 上面刻著的球和圓柱圖案赫然在目， 這久已被遺忘的寂寂孤墳終於被找到了 。 墓誌銘仍然依稀可見， 大約有一半已被風雨腐蝕 。 又兩千年過去了， 隨著時光的流逝， 這座墓也消失和無影無蹤 。 現有一個人工鑿砌的石窟， 寬約十餘米， 內壁長滿青苔， 被說成是阿基米德之墓， 但卻無任何能證明其眞實性的標誌， 而且 “發現眞正墓地” 的消息時有所聞， 令人難辨眞僞 [19] 。

主要著作

阿基米德留下的數學著作不下十種， 多數爲希臘文手稿， 也有的是十三世紀後從希臘文譯成拉丁文的手稿 。 有 J.L. 海伯格 (Heiberg) 校訂的 ： *Archimedes opera omnia cum commentariis Eu-*

[19] 穆方順， 阿基米德墓地尋訪記， 《 光明日報 》1985 年 8 月 15 日 。

tocii (《阿基米德全集， 包括歐托基奧斯 (Eutocius of Ascalan，約生於公元 480 年) 的註釋》， 1910－1915， 萊比錫的出版)， 這是標準的本子： 譯成現代語的常見的有三種： T.L. 希思 (Heath) 英譯註釋本： *The works of Archimedes with the method of Archimedes* (《阿基米德全集， 包括阿基米德方法》， 1912， 紐約出版)； P.V. 埃克 (Eecke) 法譯本： *Les oeuvres complètes d'Archimède* (《阿基米德全集》， 1921， 巴黎出版)； E.J. 迪克斯特惠斯 (Dijksterhuis)： Archimedes [《阿基米德全集》， 原文爲荷蘭語， 1938－1944， C. 迪克舒恩 (Dikshoorn) 英譯本， 1956， 哥本哈根出版]。

著作的體例， 深受歐幾里得《原本》的影響， 先設立若干定義和假設， 再依次證明各個命題。 各篇獨立成章， 雖然不像《原本》那樣渾然一體， 但所言均有根據， 論證也是嚴格的。 現按海伯格本的順序 (爲希思本所沿用) 列舉如下：

1. 《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*)， 共兩卷；
2. 《圓的度量》(*Measurement of a circle*)；
3. 《劈錐曲面與迴轉橢圓體》(*On conoids and spheroids*)；
4. 《論螺線》(*On spirals*)；
5. 《平面圖形的平衡或其重心》(*On plane equilibrium*)， 共兩卷；
6. 《數沙器》(*The sand–reckoner*)；
7. 《拋物線圖形求積法》(*Quadrature of the parabola*)；
8. 《論浮體》(*On floating bodies*)， 共兩卷；
9. 《引理集》(*Book of lemmas*)；
10. 《群牛問題》(*The cattle–problem*)。

以上並不是寫作先後的順序， 如按時間來排， 大致是： 5(卷 1)、 7、 5 (卷 2) 、 1 、 4 、 3 、 8 、 2 、 6。 另外， 在本世紀初

還發現阿基米德的一封信， 這信非常重要， 它記錄了阿基米德研究問題的獨特思考方法， 後來以《 阿基米德方法 》(*The method of Archimedes*， 簡稱《 方法 》的標題發表出來)。

《 方法 》的發現及其內容

1906 年， 哥本哈根大學古典哲學教授 J.L. 海伯格 (Heiberg，1854 − 1928) 在土耳其君士坦丁堡 (現稱伊斯坦布爾) 仔細觀看一部擦去舊字寫上新字的羊皮紙書[20]， 舊的字跡幸好沒有擦乾淨， 可以判定是十世紀時寫上去的。 擦掉之後， 大約在十三世紀時寫上一大堆東正教的祈禱文和禮拜儀式， 作爲中世紀的宗教文獻保存了下來。 舊的字跡隱約可辨， 海伯格驚喜地發現這是阿基米德著作， 因爲他在別處見過。 於是用攝影等技術使舊字跡重現， 1908 年再一次去進行工作， 經過不懈的努力， 終於使 185 頁的文字 (除少數完全看不清者外) 重見天日 。 其中包括《 論球與圓柱 》及《 圓的度量 》、 《 平面圖形的平衡或其重心 》的一部分。 還有《 論浮體 》的相當一部分， 過去一直認爲希臘文本已失傳， 只有莫貝克 (William of Moerbeke， 約 1230 − 1286) 的拉丁文譯本存下來， 現在居然得到希臘文原本， 雖然也還不是全部。 更令人興奮的是有一封阿基米德寫給埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 的信， 還是初次看到 。 這是本世紀數學史料的重大發現 。

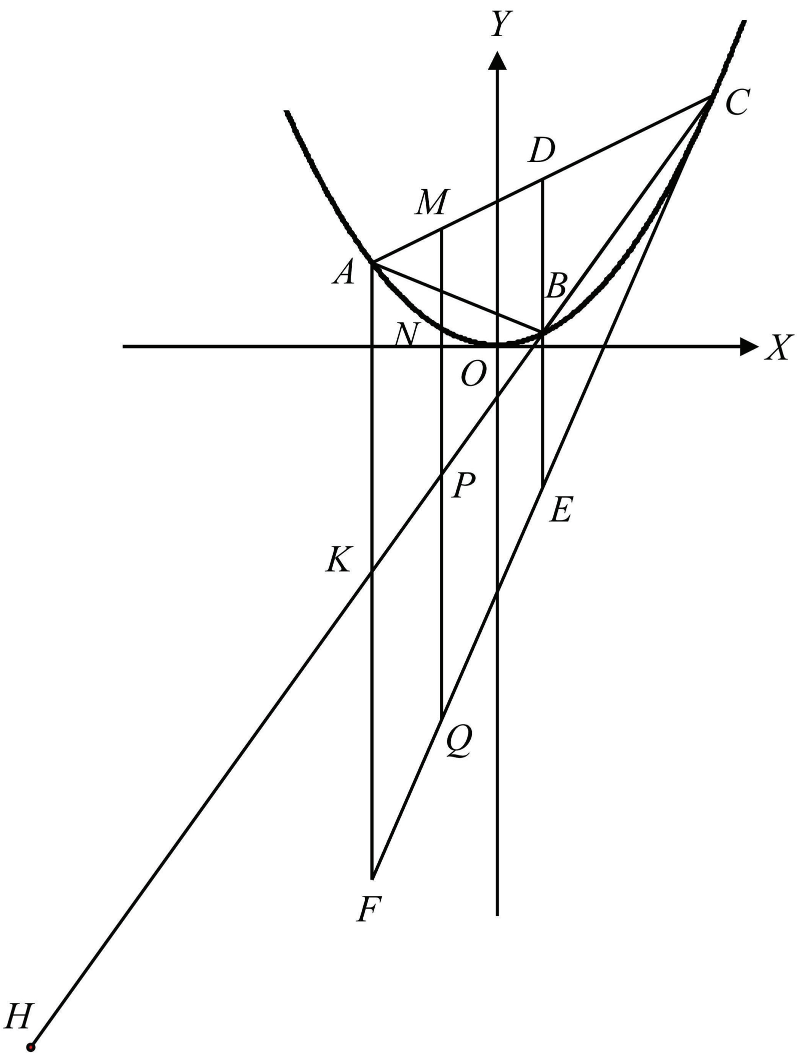
《 方法 》包括 15 個命題。 一開頭是寫給埃拉托塞尼的信用來說明本篇的主要內容， 相當於序言 。 下面以命題 1 爲例， 闡明阿基米德的思想方法。 爲了便於了解， 暫用現代的術語和符號來推導 。

設 D 是拋物線弧 ABC 的弦 AC 的中點， 過 D 作直線平行於拋物線的軸 OY 、 交拋物線於 B。 要證明的是拋物弓形 $ABCD$

[20]這種用羊皮做的書寫材料， 可多次使用。

的面積等於 $\triangle ABC$ 面積的 $4/3$。

當時已經知道過 B 的切線平行於 AC，即 B 是弓形的頂點 (在 ABC 弧上與 AC 距離最遠的點)。命題結論的另一種說法是：拋物弓形的面積，是等底等高的三角形的 $4/3$。



用解析幾何來分析此命題，設拋物線方程是

$$y = ax^2 \tag{1}$$

A、C 的橫坐標分別是 x_1、x_2，則 AC 的方程是

$$y = ax_1x + ax_2x - ax_1x_2 \tag{2}$$

過 C 點的切線 CF 的方程是

$$y = 2ax_2x - ax_2^2 \tag{3}$$

延長 DB 交 CF 於 E，不難證明，B 是 ED 的中點。事實上，將 D、B、E 的橫坐標 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 分別代入 (2)、(1)、(3) 式，可得到三者的縱坐標，依次是

$$y_D = \frac{a(x_1^2+x_2^2)}{2}、y_B = a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2、y_E = ax_1x_2,$$

由此知 B 是 D、E 中點。

作 $AF//OY$，交 CF 於 F。延長 CB 交 AF 於 K，則 K 是 FA 的中點。再取 $KH = KC$，過 AC 上任意點 M 作 MQ 平行

OY，交 CK 於 P，交 CF 於 Q，交拋物線於 N。將 M 的橫坐標 x_0 分別代入 (2)、(1)、(3) 得到 M、N、Q 的縱坐標

$$y_M = ax_1x_0 + ax_2x_0 - ax_1x_2 \text{、}$$
$$y_N = ax_0^2 \text{、} \quad y_Q = 2ax_2x_0 - ax_2^2 \text{，}$$

於是有

$$\begin{aligned}\frac{MQ}{MN} &= \frac{y_M - y_Q}{y_M - y_N} = \frac{x_2 - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{AC}{AM} \\ &= \frac{KC}{KP} = \frac{HK}{KP}\text{。}\end{aligned}$$

上面推出的幾個性質，有的前人已證明，有的阿基米德在別處已證明，在這裡是作爲已知條件來使用的。例如：1) 過 D 且平行於軸的直線必過弓形的頂點 B，且 B 是 ED 中點，在歐幾里得以及阿里斯泰奧斯 (Aristaeus，約公元前 340 年) 的圓錐曲線論中已證明，在阿基米德的《拋物線圖形求積法》命題 1、2 中也討論過；2) $MQ : MN = AC : AM$ 是同一篇論文的命題 5。

下面才是阿基米德巧妙的根據力學原理去探索眞理的方法。

假想各線段都是有重量的，而且重量和長度成正比。又 HP 是一根以 K 爲支點的槓桿。因爲 $MQ : MN = HK : KP$，如果將 MN 放在 H 點，就可以和位於槓桿另一端的 MQ 平衡，P 是 MQ 的重心。這關係對於任意的 M 都成立。弓形可以看作由許多這樣的 MN 線段所組成，而 $\triangle AFC$ 由許多的 MQ 線段所組成。如果將所有的 MN (也就是整個弓形) 都放在 H 上 (以 H 爲重心)，就可以和 $\triangle AFC$ 平衡。弓形的重量可以看作完全集中在 H 點，而 $\triangle AFC$ 的重量也可以看作集中在它的重心上，這重心位於中線 KC 上，與 K 的距離是 $KC(= KH)$ 的 $1/3$，故弓形重量 (即面積) 是 $\triangle AFC$ 重量 (即面積) 的 $1/3$。又因爲 $\triangle AFC = 4\triangle ABC$[21]，故知弓形 $ABCD$ 的面積是 $\triangle ABC$

[21]這兩個三角形同底，$AF = 2DE = 4DB$，因此高也是 4 倍。

的 4/3。

阿基米德特別聲明以上的推導不能算是證明，只是一種直觀的試探或猜測問題結論的方法。以後還要在別的地方用幾何方法 (通常是用歸謬法) 去嚴格證明它。

《方法》的中心思想，是要計算一個未知量 (圖形的面積、體積等等)，先將它分成許許多多的微小量 (如將面分成線段，將體積分成薄片等)，再用另一組微小量來和它比較。通常是建立一個槓桿，找一個合適的支點，使前後兩組微小量取得平衡。再將後一組微小量集合起來，它的總體應該是較易計算的。於是通過比較，即可求出未知量。這實質上就是積分法的基本思想，阿基米德的睿智，業已伸展到十七世紀中葉的無窮小分析領域裡去了! 因此，稱他爲近代積分學的先驅，毫不爲過。當然，和積分法還有相當大的差距。表現在：1) 沒有說明微小量 (或元素) 是有限的還是無窮多，這在古希臘時代是不可能解決的問題；2) 沒有極限的思想，現代的積分，是一個極限值而不是一個簡單的和；3) 就事論事，沒有形成抽象的概念及一般的法則。

儘管如此，阿基米德運用這種富有啓發性的方法，獲得大量的輝煌成果，爲後人開闢了一個廣闊的領域。本篇後面的命題都是用類似的方法取得的。

命題 2. 球體積是以此球的大圓爲底、以球的半徑爲高的錐體體積的 4 倍。以球的大圓爲底、球的直徑爲高的圓柱的體積是球體積的 3/2 倍。

這在《論球與圓柱》中是命題 34 及其推論，也就是刻在墓碑上的那個著名的論斷。

此外還有旋轉橢圓體體積，旋轉拋物線體體積及重心，半球的重心，以及相當複雜的圓錐體與球的交截體 (兩種立體相交的公共部分) 等問題，在今天，只有用積分法才能解決，而阿基米德獨闢蹊徑，創立新法，取得正確的結果，使後人驚嘆不已。

(一)《論球與圓柱》

這是他的得意傑作， 包括許多重大成就。 序言是阿基米德給多西修斯 (Dositheus) 的信， 後者則是科農的學生和朋友。 阿基米德的著作， 過去一向是通過科農轉給亞歷山大的學者的。 科農去世後， 改由多西修斯代辦。 在《拋物線圖形求積法》的序言中， 阿基米德已經說明了這一點： “驚悉科農去世， 我十分悲痛， 這不僅僅因爲失去一位好友， 而且失去一位令人欽佩的數學家。 你是他的朋友， 且精通幾何， 轉交論文的任務， 現在請你代勞”。 以後好幾篇著作都是先寄給多西修斯的。

在《論球與圓柱》的序言中， 首先就指出本篇的主要內容和成就， 接著給出六個定義。 阿基米德在這裡將 “定義” 說成 “公理”。 按其性質來說應該是定義， 後來歐托基奥斯在註中說明這一點。

下面給 5 個假定， 相當於公理。 例如

1. 在端點相同的所有線 (包括曲線、 直線) 中， 以直線爲最短。

2. 在以相同的平面曲線爲邊界的曲面中， 以平面面積爲最小。

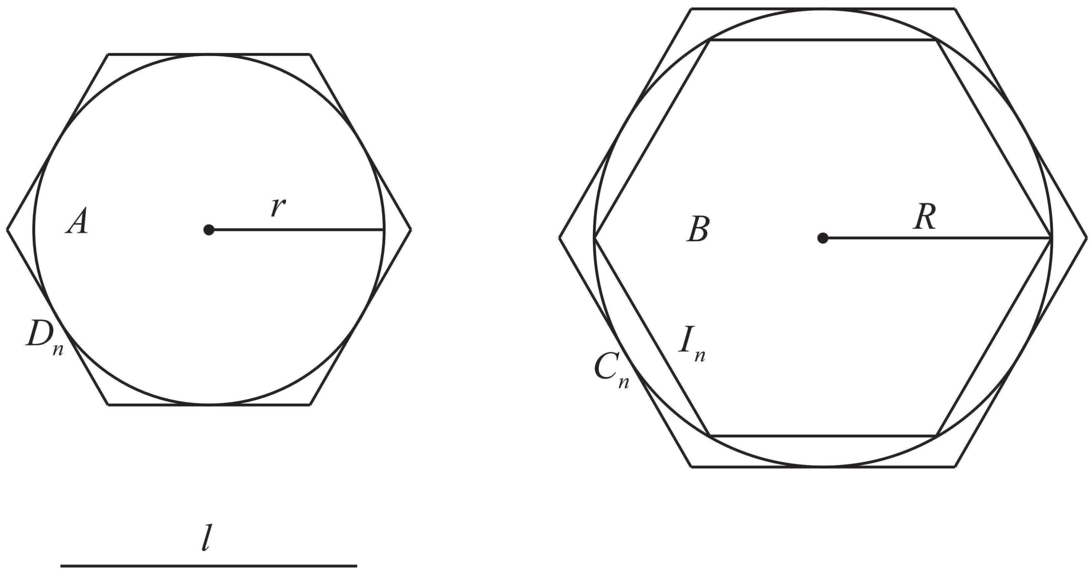
特別重要的第 5 個公理， 這就是後來以阿基米德的名字命名的公理： 如果兩條線段或兩個面、 兩個立體不相等， 就可以在兩者之差的上面， 加上它的本身， 一次一次加上去， 使得每一個預先給定的同類量都被超過。 在現代分析學中常用的說法則是： 對於任意二個正實數 a， b， 必存在正整數 n， 使得 $na > b$。

從這些定義和公理出發， 推導出上卷 44 個， 下卷 9 個命題。 多次使用阿基米德公理及反證法 (歸謬法)， 如要證 $A = B$， 則證明 $A > B$ 及 $A < B$ 均導致矛盾。 以下面的命題爲例來說明。

阿基米德引用了歐幾里得《原本》XII， 2 的證法 (窮竭法) 建

立了命題 6：只要邊數足夠多，圓外切正多邊形的面積 C 與內接正多邊形的面積 I 之差可以任意小[22]。不同之處是歐幾里得默認了阿基米德公理，而阿基米德在本篇中是明確地作爲公理提出來的。在這基礎上，證明了：

命題 14. 正圓錐體的側面積等於以底面半徑與母線的比例中項爲半徑的圓的面積。



設正圓錐的底面爲 A，半徑爲 r，母線爲 l，r 與 l 的比例中項爲 R(即 $R^2 = rl$)，則此正圓錐的側面積 $S = \pi R^2$。

以 R 爲半徑作圓 B，其面積爲 πR^2，現要來證明 $S = B = \pi R^2$。用反證法，設 $S > B$。根據命題 6，可作 C_n 的外切正多邊形 (同時表示其面積，下同) 與內接正邊形 I_n，使得

$$\frac{C_n}{I_n} < \frac{S}{B},$$

又作底面 A 的相同邊數的外切正多邊形 D_n，其周長記作 P_n。以 D_n 爲底，以圓錐的頂點爲頂點的正稜錐的側面積 $L_n = lP_n/2$，而 $D_n = 12rP_n/2$。D_n、C_n 是相似的，其比等於對應線段平方之比，

$$\frac{D_n}{C_n} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{r}{l} = \frac{rP_n/2}{LP_n/2} = \frac{D_n}{L_n},$$

[22]換一種法是 C/I 可以與 1 任意接近，或 C/I 可以小於任何大於 1 的值。

由此知 $C_n = L_n$， 代入上面的不等式有

$$\frac{Cn}{I_n} = \frac{L_n}{I_n} < \frac{S}{B}\text{，}$$

這是不合理的， 因爲圓錐側面積 S 小於其外切稜錐側面積 L_n， 而圓 B 大於其內接多邊形面積 I_n。 同理可證 $S < B$ 也是不合理的， 故 $S = B = \pi R^2$。 現在常用的形式是 $S = \pi rl$。

下面較著名的命題還有

命題 33. 球面積等於它的大圓面積的 4 倍。

命題 34. 球體積等於以它的大圓爲底、 它的半徑爲高的圓錐體積的 4 倍。 推論： 以球的大圓爲底、 球直徑爲高的圓柱的體積與表面積分別是球的體積與表面積的 3/2。 這命題在《 方法 》中已提出， 此處用反證法加以證明。 命題 $35 - 44$ 研究了球缺、 球冠及球心角體 (球扇形) 的表面積及體積。

下卷 9 個命題主要討論球缺， 好幾個是作圖題。 命題 2 給出球缺的體積。 命題 4 在歷史上佔有特殊的地位。 它要求用平面將一個球截成兩部分， 使這兩部分體積之比等於給定的比。

設球半徑爲 r， 所分成的兩個球缺的高各爲 h 及 $2r - h$， 公共底的半徑爲 a， 則體積分別是 $V_1 = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$ 及 $V_2 = \frac{\pi}{3}(2r - h)^2(r + h)$， 給定的比是 $\frac{m}{n}$， 展開 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{n}$ 並化簡， 得到

$$h^3 - 3rh^2 + \frac{4m}{m+n}r^3 = 0\text{，}$$

可改寫爲

$$(2r - h)^2(r + h) = 4r^3\frac{n}{m+n}\text{。}$$

記 $x = 2r - h$、 $a = 3r$， 又將右端的常數寫成 bc^2， 上式簡寫成 $x^2(a - x) = bc^2$ (見 [9]， p.304)。

此問題的解相當於用幾何方法去解這個三次方程。阿基米德說他將在後面給出分析與綜合的解法，但現存本未見，大概已失傳。後來歐托基奧斯 (五世紀時) 找到一些殘頁，是用多利安方言 (阿基米德慣用的方言) 寫的手稿，上有這問題的解法，他認爲是屬於阿基米德的。解法的要點是求兩條圓錐曲線的交點。一條是拋物線

$$x^2 = \frac{c^2}{a}y\ ,$$

另一條是雙曲線 $(a-x)y = ab$。殘頁還討論了方程可解的條件，這相當於求出三次式 $x^2(a-x)$ 的極大值。它給出當 $x = \dfrac{2}{3}a$ 時三次式取極大值 $\dfrac{4}{27}a^3$，$bc^2 \leq \dfrac{4}{27}a^3$ 時三次方程有正實數解。歐托基奧斯在註釋本篇時，還比較了狄俄尼索多羅 (Dionysodorus，公元前三世紀－公元前二世紀，居住在小亞細亞地區) 與狄俄克利斯 (Diocles，約公元前 190 年) 對此問題的解法。

(二)《圓的度量》，其中只有三個命題。

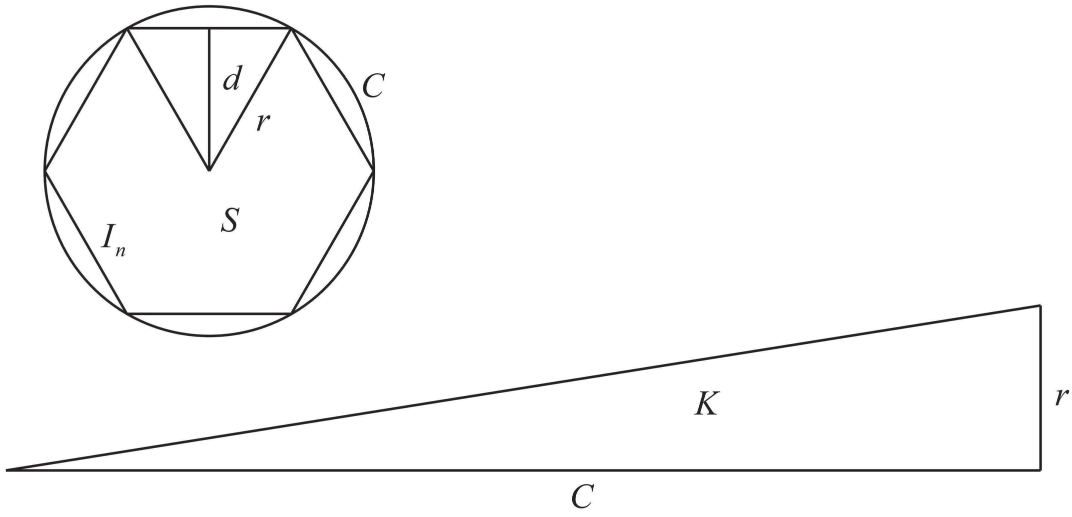
命題 1. 圓的面積等於一個以其周長及半徑作兩個直角邊的直角三角形的面積。

更簡單的說法是：圓面積等於半徑乘半周長。這正是中國《九章算術》的說法："半周長半徑相乘得積步"。或劉徽 (公元 263 年) 註的說法："半周乘半徑爲圓冪"。

但在古希臘，自從畢達哥拉斯學派發現不可公度量以後，每一條線段是否都有長度就成了問題。因此在幾何學家的著作中，極力避免兩條線段長相乘的說法，寧願說成由兩線段構成的矩形或三角形的面積。

證明仍用窮竭法[23]。設圓半徑爲 r，周長爲 C，面積爲 S。

[23]參照歐幾里得《原本》XII，2。



以 C，r 爲兩直角邊作直角三角形，設其面積爲 K。現證明 $S=K$。用反證法，假定 $S>K$，作邊數足夠多的內接正多邊形 I_n，使其面積 I_n 與圓面積 S 之差

$$S-I_n<S-K,$$

於是有

$$I_n>K。$$

這是不合理的，因爲 I_n 的邊心距 $d<r$，而 I_n 的周長小於 C，故 I_n 應 $<K$。同理作外切正多邊形，可證 $S<K$ 也導致矛盾，從而有 $S=K$。

命題 2. 圓面積與外切正方形面積之比爲 $11:14$。

相當於取 $\pi=\dfrac{22}{7}$，希思及其他註釋者如迪克斯特惠斯等都認爲這命題應該放在命題 3 的後面，也許是後人抄錯了或阿基米德別有用意。

命題 3. 圓的周長與直徑之比小於 $3\frac{1}{7}$ 而大於 $3\frac{10}{71}$。

這就是有名的阿基米德圓周率的出處。歐幾里得在《原本》中討論了很多圓的性質，但卻完全沒有提到圓周率的值及圓面積、圓周長的計算法。阿基米德彌補了這一不足，並在科學上首次創用上、下界來確定一個量的近似值，還提供了誤差的估計。

他在推導中使用了一個不等式

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}\text{，}$$

未加任何說明。 如將 $\sqrt{3}$ 展開成連分數， 可知不等式左右兩端都是連分數的漸近分數。 它具有這樣的特性， 以 265/153 爲例， 在一切分母不大於 153 的分數中， 它是最接近 $\sqrt{3}$ 的。 1351/780 也是一樣， 在所有分母不大於 780 的分數中， 它是最接近 $\sqrt{3}$ 的。 也就是說它具有 “最佳” 的性質。 阿基米德是怎樣得到這些分數的? 這引起後人的極大興趣。 僅從十七世紀以來， 就至少有十幾種不同的推測[24]。 較多的意見認爲是利用了不等式

$$a \pm \frac{b}{2a \pm 1} < \sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}\text{，}(a > b\text{，} a > 1)\text{。}$$

左右各平方， 便可證其成立。 試推演如下：

$$\frac{5}{3} = 2 - \frac{1}{3} < \sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1} < 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}\text{，}$$

因近似分數以分母小者爲佳， 故取左端不取右端。 $5 < 3\sqrt{3} = \sqrt{27}$， 以 5 爲 $\sqrt{27}$ 的近似值。

$$5 + \frac{2}{11} < 3\sqrt{3} < \sqrt{5^2 + 2} < 5 + \frac{1}{5}\text{。}$$

取右端

$$15\sqrt{3} = 5\sqrt{27} = \sqrt{675} < 26\text{，}$$

以 26 爲 $\sqrt{675}$ 的近似值，

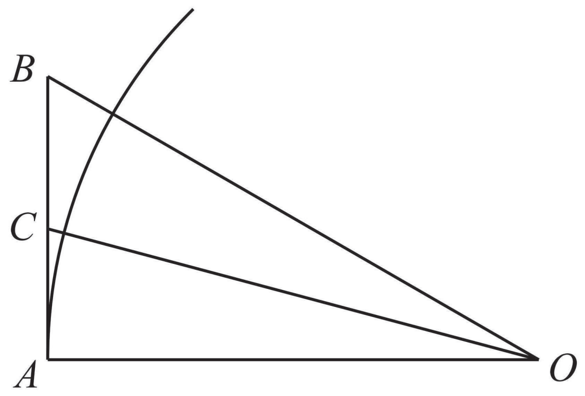
$$\frac{1325}{51} < 15\sqrt{3} = \sqrt{26^2 - 1} < \frac{1351}{52}$$

於是有

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}\text{。}$$

[24]文獻 [10] (p.51) 中說 T.F. de 拉尼 (Lagny， 1660－1734 法國人， 曾計算 π 精確到 112 位小數)， K.B. 莫爾韋德 (Mollweide， 1774－1825)， H.G. 塞烏滕 (Zeuthen， 1839－1920)， P. 坦納里 (Tannery， 1843－1904)， F. 胡爾奇 (Hultsch， 1864) 等都作過推測。 另見李儼《中算史論叢》， 中國科學院， 1954， 第一集， p.83。

本命題主要的推導思想如下：



設 O 是圓心，OA 是半徑，作 $\angle AOB = 30^\circ$，過 A 作切線 AB 交 OB 於 B。則

$$\frac{OB}{AB} = 2 \text{、} \frac{OA}{AB} = \sqrt{3} > \frac{265}{153}$$ [25]。

兩式左右相加得

$$\frac{OB + OA}{AB} > \frac{571}{153} \text{。}$$

作 $\angle AOB$ 的平分線 OC，則

$$\frac{OB}{OA} = \frac{CB}{AC} \text{，}$$

左右同加 1，

$$\frac{OA + OB}{OA} = \frac{AB}{AC}$$

左端分母與右端分子交換，再由前面的不等式，有

$$\frac{OA + OB}{AB} = \frac{OA}{AC} > \frac{571}{153} \text{，}$$

或

$$\frac{AC}{OA} < \frac{153}{571} \text{。}$$

由上面的不等式立刻推出圓外切正六邊形、正十二邊形的周長與直徑比值的上界。同樣，計算內接正多邊形的邊長，可以確定比值的下界。再利用比例關係及勾股定理，重複上述手續，一直算到 96 邊形，最後得到

$$\begin{aligned} 3\frac{10}{71} \quad &< \quad \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \frac{\text{內接正 96 邊形周長}}{\text{直徑}} < \frac{\text{圓周長}}{\text{直徑}} \\ &< \quad \frac{\text{外切正 96 邊形周長}}{\text{直徑}} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{1}{7} \text{。} \end{aligned}$$

[25]在阿基米德的所有著作中並沒有出現 3 的平方根這樣的概念 (更不用說符號了)，因為他不承認無理數是數。這裡加入 $\sqrt{3}$ 是為了便於了解。

有趣的是，圓周率的下界 $3\frac{10}{71} = \frac{223}{71}$ 也具有 “最佳” 的性質，即在一切分母不大於 71 的分數中它是最接近 π 的。比它更接近 π 的分數有 $\frac{245}{78}$，$\frac{267}{85}$，$\frac{289}{92}$，$\frac{311}{99}$，$\frac{333}{106}$，$\ldots$ [26] 分母都大於 71，除了最後一個外，都不是連分數的漸近分數。

(三)《劈錐曲面與迴轉橢圓體》

共 32 個命題，研究橢圓的面積以及迴轉圓錐曲線體被平面截取部分的體積等。證明的方法是窮竭法，十分接近今天的積分法思想。當時還沒有 “拋物線”(parabola) 等名稱，早期的希臘數學家如梅奈奇姆斯 (Menaechmus，公元前四世紀)，用平面去截三種不同的直圓錐面，產生三種圓錐曲線。令平面與直圓錐的母線垂直，當圓錐的頂角 (母線所張的最大角度) 是直角時，截口叫做 “直角圓錐截線” (section of a right-angled cone)，現在叫拋物線；當頂角是銳角時，叫 “銳角圓錐截線”(section of an acute–angled cone)，現叫橢圓；當頂角是鈍角時，則叫 “鈍角圓錐截線”(section of an obtuse-angled cone)，現叫雙曲線。歐幾里得和阿基米德一直沿用這些舊名稱 (見 [10]，p.111)，為簡單起見，改用今名。

本篇一開頭先給出兩個引理，以備後面證明之用。第 1 個是等差數列求和公式，寫成不等式 [27]

$$2(a+2a+3a+\cdots+na) > n^2a > 2[a+2a+3a+\cdots+(n-1)a]$$

如用求和公式，左端是 $n(n+1)a$，右端是 $(n-1)na$，不等式成立是明顯的。

[26] 見梁宗巨，祖沖之密率的優越性，《遼寧師範大學學報》，增刊 (數學史專輯)，1986，p.6。

[27] 原文為幾何形式。

第 2 個是正整數平方和公式， 先證明

$$\begin{aligned}&(n+1)(na)^2+a(a+2a+3a+\cdots+na)\\ =\;&3[a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2]\end{aligned}$$

由此可知

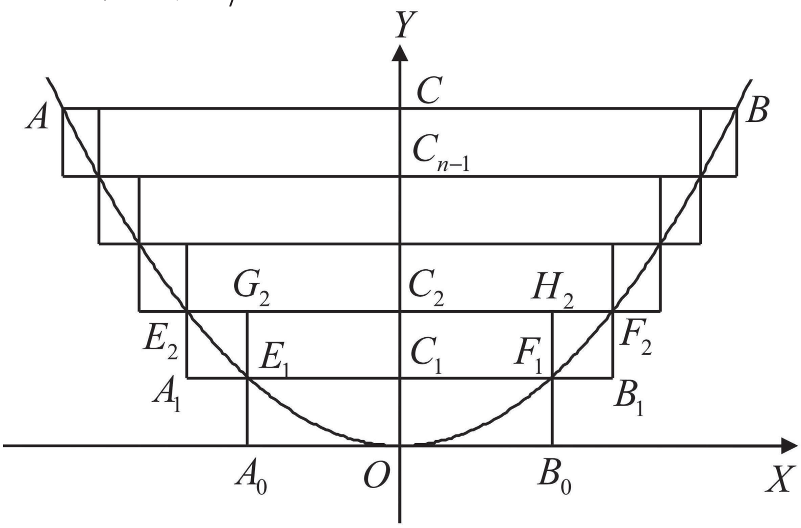
$$a^2+(2a)^2+(3a)^2+\cdots+(na)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2=S_na^2 \text{。}$$

寫成不等式

$$3S_{n-1}a^2<n^3a^2<3S_na^2 \text{。}$$

下面以一個較簡單的命題來闡明阿基米德的證題思想。 爲了便於理解， 改用現代的術語和符號。

命題 21. 迴轉拋物體被垂直於軸的平面所截取的部分的體積等於同底等高的圓錐體的 3/2。



拋物線 AOB(不妨設方程爲 $y=x^2$) 繞其軸 OC 迴轉， 產生迴轉拋物體。 求被垂直於 OC 的平面 ACB 所截取的部分的體積 V。 將 OC 用分點 O、C_1、C_2、$\cdots$、C_{n-1}、$C_n(=C)$ 分成 n 等分， 過這些分點作垂直於 OC 的平面將所求的體積分成 n 個小薄片。 每一個小薄片介於一個內接圓柱與一個外接圓柱之間。 如矩形 $E_1F_1H_2G_2$ 及矩形 $A_1B_1F_2E_2$ 迴轉後就產生 C_1、C_2 間的小薄片的內接與外接圓柱。 又每一個外接圓柱與緊接著上面的一個內接圓柱 (如矩形 $A_0B_0F_1E_1$ 與矩形 $E_1F_1H_2G_2$ 迴轉產生的圓柱) 相等。

設 $OC = h$，則小薄片厚 $d = h/n$，各層外接圓柱的底面半徑記作 x_1、x_2、$\cdots$、x_n，而 $y_1 = x_1^2$、$y_2 = x_2^2$、$\cdots$、$y_n = x_n^2$ 是 c_1、c_2、$\cdots$、c_n 的縱坐標。接著設外接圓柱體積的總和是 S_n，內接圓柱體積的總和是 I_n，則 $S_n = d(\pi x_1^2 + \pi x_2^2 + \cdots + \pi x_n^2) = \pi d(y_1+y_2+\cdots+y_n) = \pi d(d+2d+\cdots+nd) > \pi d\cdot\dfrac{n^2}{2}d = \dfrac{\pi}{2}h^2 = V^* > \pi d[d+2d+\cdots+(n-1)d] = I_n$。這是根據前面引理得出的不等式。現證明 $V = V^*$，否則，如 $V > V^*$，則因外接圓柱的總體與內接圓柱的總體只差一個小圓柱 $\pi nd^2 = \pi h^2/n$，只要 n 足夠大，它可任意小，即可使

$$S_n - I_n < v - V^*，$$

這是不合理的，因 $S_n > V$ 而 $I_n < V^*$。同理可證 $V < V^*$ 也導致矛盾，故 $V = V^* = \pi h^2/2 = \pi a^2 h/2$，$a = x_n$ 是底半徑 CB。而同底等高圓錐體體積是 $\pi a^2 h/3$，故 V 是它的 $3/2$。

其餘各命題雖然都比這複雜，但基本思路是差不多的。除了沒有取極限這一步驟之外，基本思想和現代積分是一致的。

(四)《論螺線》

共 28 個命題，前十個是關於圓及切線的各種比例關係的。命題 11 重新證明了正整數平方和的不等式，這在《劈錐曲面與迴轉橢圓體》中是作爲引理提出的：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 > \frac{n^3}{3} > 1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2。$$

接著給出螺線 (現在稱爲 “阿基米德螺線”) 的定義。

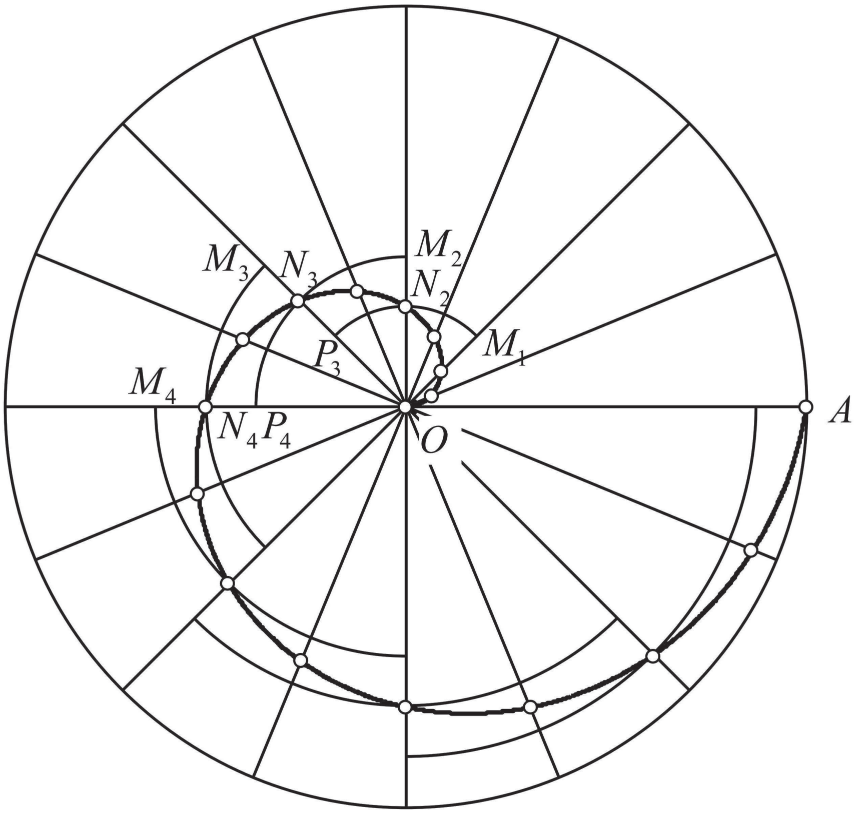
一條射線繞其固定端點勻速旋轉，同時有一動點從端點出發沿射線勻速運動，那麼這動點就描繪出一條平面螺線 (spiral)。射線開始時的位置叫做始線 (OA)，固定端點叫做原點 (O)。旋轉一圈所產生的螺線與始線所包圍的面積叫做 “第一面積”(first area)。

現在在解析幾何中螺線的極坐標方程是 $r = a\theta$， 旋轉一圈後動點到達 A 點， $OA = 2\pi a$， 以 OA 爲半徑的圓叫做 “第一圓 ”。

命題 21 以後的幾個命題探討螺線所圍的面積， 命題 24 證明了 “第一面積”S 等於 “等一圓” 面積的 1/3， 即

$$S = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{。}$$

將圓周角 2π 分爲 n 等分， 每一等分爲 $\Delta\theta = \dfrac{2\pi}{n}$， 在每一等分內作螺線的內接與外接扇形。 例如第 3 等分的內接扇形是 ON_2P_3， 外接扇形是 OM_2N_3。 設全部外接扇形面積的總和是 C_n， 內接扇形面積的總和是 I_n， 則 $C_n > S > I_n$。 又根據正整數平方和的不等式， 並注意到弓形面積公式 $r^2\Delta\theta/2$ [28]， 有



[28]例如第 3 個外接扇形的面積 $\Delta C_3 = \frac{1}{2}\overline{ON_3}\Delta\theta$， 而 $ON_3 = a\cdot 3\Delta\theta = a\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{n}$， 故 $\Delta C_3 = \frac{1}{2}(a\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{n})^2\cdot\frac{2\pi}{n} = \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot 3^2$。

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{4a^2\pi^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) > \frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot\frac{n^3}{3} = S^* \\
&> \frac{4a^2\pi^3}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2] = I_n \text{。}
\end{aligned}
$$

C_n 與 I_n 僅差最後一項 $\frac{4a^2\pi^3}{n^3}\cdot n^2 = \frac{4a^2\pi^3}{n}$，只要 n 足夠大，$C_n - I_n$ 可以任意小。

應用前面多次用過的反證法，可證 $S = S^*$。否則，如 $S > S^*$，則可使

$$C_n - I_n < S - S^*$$

這是不合理的，因外接扇形面積總和 $> S$，而 $I_n < S^*$。同樣 $S < S^*$ 也是不合理的。於是得到

$$S = \frac{4}{3}a^2\pi^3 = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 \text{。}$$

命題 13 − 20 研究了螺線的切線，給出作圖方法及種種性質。沒有發現阿基米德有微分法的思想 (哪怕是粗淺的)，那麼他是怎樣得到切線的作法的? 這有趣而且帶有關鍵性的問題引起後人的注意。有些學者認爲是運用了運動學的原理。射線作勻角速運動，而動點在射線上作勻速運動，兩個速度按平行四邊形法則所得到的合速度方向就是切線方向[29]。如果這推測正確的話，那麼這就是古代屬於微分法的罕見的例子。

(五)《平面圖形的平衡或其重心》

分兩卷，卷 I 先給出 7 個公理，都是顯而易見之理。例如

1. 等重的物體放在相等的距離上 (各在槓桿一端，與支點等距)，則處於平衡狀態；等重的物體放在不相等的距離上則不平衡，向距離遠的一端傾斜。

[29]見 [10]，p.557；[13]，p.58。中譯本 p.63；[14]，p.55，中譯本 p.74。

2. 放在一定距離上的重物處於平衡狀態時， 若在其中的一個重物上加一點重量， 則失去平衡， 要向加重量的一端傾斜。

3. 相似圖形的重心， 也處在相似的位置上。

從這些公理出發， 導出了著名的槓桿定律：

命題 6.、 7. 若兩重物平衡， 則所處的距離 (與支點的距離) 與重量成反比。

證明是分可公度量與不可公度量兩種情形來討論的。 下面的八個命題找出平行四邊形、 三角形以及梯形的重心。

卷 2 的十個命題集中研究了拋物弓形和它的一部分的重心。 方法是作一系列的內接三角形， 逐步去逼近所討論的圖形。

(六) 《 數沙器 》[30]

這是阿基米德遺留下來的唯一的算術著作， 也可能是最後一種。 那時海厄羅王已去世 (公元前 216 年)， 他的兒子吉倫 (Gelon) 繼承王位，阿基米德也已年逾古稀。這篇文章是遞交給吉倫王的。

文章首先表明寫作的目的， 是要糾正有些人的錯誤觀點， 他們認為世界上的沙子是無窮的， 即使不是無窮， 也沒有一個可以寫出來的數超過沙子的數。 阿基米德指出， 任何大的數都可以表示出來。

全文只有一個定理， 實際相當於現今的指數法則

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}\text{ 。}$$

他先給出地球、 月球、 太陽大小的估計， 進而計算沙粒的數目。

1. 地球的周長不大於 3×10^6 個 “斯達地”(stadium， 複數)。 斯達地是古希臘長度單位， 約合 $606\dfrac{3}{4}$ 英尺， 或 185 米。 依此計

[30]也可譯作 “數沙才”， “沙子計算器”， 或意譯為 “數沙術”。

算， 地球的周長是 5.55×10^5 公里， 而實際是 40000 公里。

2. 地球直徑大於月球直徑， 太陽直徑大於地球直徑。

3. 太陽直徑是月球直徑的 30 倍 (實際是 400 倍)。

這些估計數字和實際出入很大， 不過他自己也說只是一種假定。 接著推出

$$\text{“宇宙”(相當於太陽系) 直徑} < 10^{10} \text{ 斯達地。}$$

當時希臘是用字母表示數字， 最大的單位是 “萬”(10000， myriad)， 用希臘字母 M (μ 的大寫) 表示， 如 $\overset{\beta}{M}$ 表示 20000， β 表示 2， 下面的 M 表示加大 10000 倍。

阿基米德以萬爲基礎， 建立新的記數法， 使得任何大的數都能表示出來。

從 1 起到 1 億 (原文是萬萬， myriad myriads， 按中文的習慣改稱爲億) 叫做第 1 級 (first order) 數； 以億 (10^8) 爲第 2 級數的單位， 從億 (10^8) 到億億 $(10^8)^2$ 叫第 2 級數； 再以億億 $(10^8)^2$ 爲單位， 直到億億億 $(10^8)^3$ 叫第 3 級數； 照此類推， 直到第 1 億級數的最後一數 億$^{\text{億}}(10^8)^{10^8}$ 。

原文全用語言來敍述， 沒有創設記數符號， 他是否在別的地方使用了符號不得而知。 爲了敍述簡明， 用 P 表示 億$^{\text{億}}(10^8)^{10^8}$ 。 從 1 到 P 叫做第一週期 (first period)。 下面列成表：

第 1 週期

第 1 級	從 1 到 10^8
第 2 級	從 10^8 到 $(10^8)^2$
$\vdots$	$\vdots$
第 10^8 級	從 $(10^8)^{10^8-1}$ 到 $(10^8)^{10^8}$ (記作 P)。

第 2 週期

第 1 級　從 P 到 $P \cdot 10^8$

第 2 級　從 $P \cdot 10^8$ 到 $P \cdot (10^8)^2$

$\vdots$　　$\vdots$

第 10^8 級　從 $P \cdot (10^8)^{10^8-1}$ 到 $P \cdot (10^8)^{10^8} = P^2$ 。

$\vdots$　　$\vdots$

第 10^8 週期

第 1 級　從 P^{10^8-1} 到 $P^{10^8-1} \cdot 10^8$

第 2 級　從 $P^{10^8-1} \cdot 10^8$ 到 $P^{10^8-1} \cdot (10^8)^2$

$\vdots$　　$\vdots$

第 10^8 級　從 $P^{10^8-1} \cdot (10^8)^{10^8-1}$ 到 $P^{10^8-1} \cdot (10^8)^{10^8} = P^{10^8}$ 。

最後這個數 $P^{10^8} = [(10^8)^{10^8}]^{10^8} = 10^{8\cdot 10^{16}}$ 的確相當大， 有 8 億億 +1 位。

阿基米德算出充滿宇宙的沙數不過是 10^{51} ， 即使擴充到 “恆星宇宙”， 即以太陽到恆星的距離[31] 爲半徑的大球， 也只能容納 10^{63} 個沙粒， 遠遠小於前面列出的大數。

現今從理論上推測， 可觀察到的宇宙半徑約爲 130 億光年， 假想整個充滿了具有最小可能體積的粒子 (如質子)， 其數量也不超過 10^{125} 個[32] ， 也還不能和上述的大數相比。

阿基米德的記數方法還可以繼續下去， 他企圖說明任何大的數都可以表示出來， 現在目的業已達到。 可惜他沒有再進一步去改革整個的希臘記數制度。 也許那時已進行或臨近敍拉古保衛戰， 致使改革工作功虧一簣。

(七) 《 拋物線圖形求積法 》

在《 方法 》中， 阿基米德利用力學原理， 已經得到 “拋物弓形面積是同底等高的三角形的 4/3” 的結論。 但他認爲這並不算

[31]根據希臘天文學家阿利斯塔克 (Aristarchus of Samos ， 約公元前 310 − 前 230 ， 最早提出日心說) 的估計。

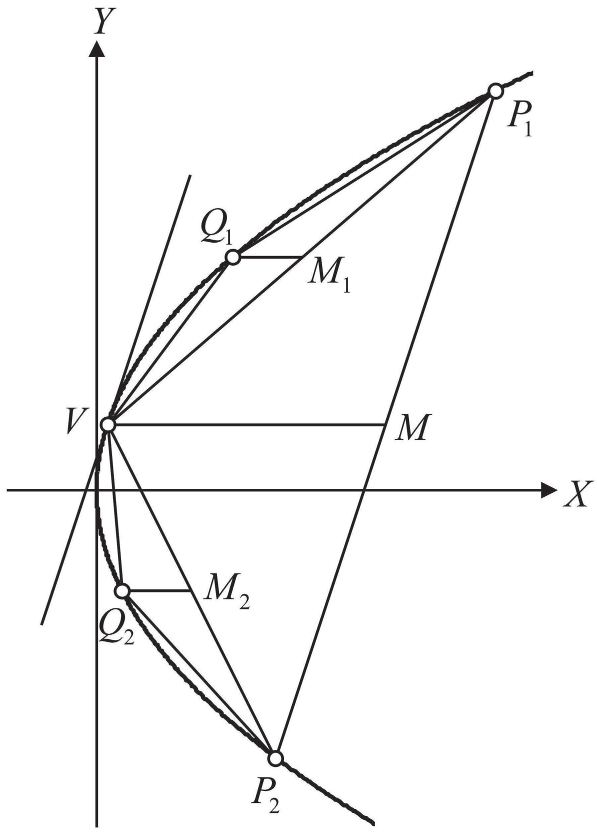
[32]I. Asimov ， *Asimov on Numbers* ， Doubleday & Co. ， 1977 (中譯本， 《 數的趣談 》， 上海科技出版社， 1980 ， p.221)。

證明，在本篇中另外用完全不同於力學的幾何方法去嚴格證明它。基本思想是窮竭法，作一系列的內接三角形去窮竭 (逼近) 弓形，最後用歸謬法完成證明。

全篇 24 個命題，最後一個命題才是所要的結論，前面的都可以看作是引理。爲了避免敍述的冗長，下面用解析幾何來說明。

設拋物線方程爲

$$y^2 = 2x$$



在拋物線上作取兩點 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$，不妨設 $y_1 > y_2$。過 P_1P_2 中點 M 作 MV 平行拋物線的軸 OX，交拋物線於 V，V 是拋物弓形 P_1VP_2 的頂點，即過 V 的切線平行於 P_1P_2，$\triangle P_1VP_2$ 與弓形同底等高 (命題 1 與 18 已證)。現要證明弓形面積 S 是 $\triangle P_1VP_2$ 面積的 4/3。

將 P_1、V、P_2 三點的坐標寫成

$$P_1\left(\frac{y_1^2}{2},\ y_1\right) 、 V\left(\frac{(y_1+y_2)^2}{8},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right) 、 P_2\left(\frac{y_2^2}{2},\ y_2\right),$$

代入三角形面積公式，化簡後得 $\triangle P_1VP_2 = (y_1 - y_2)^3/16$。

過 VP_1 中點 M_1 作 M_1Q_1 平行 OX 交拋物線於 Q_1，過 P_2V 中點 M_2 作 M_2Q_2 交拋物線於 Q_2。注意到 V 的縱坐標是 $(y_1 + y_2)/2$ 可知

$$\begin{aligned}\Delta P_1Q_1V &= \frac{1}{16}\left(y_1 - \frac{y_1+y_2}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}(y_1 - y_2)^3\text{，}\end{aligned}$$

又 $\triangle P_2VQ_2 = \triangle P_1Q_1V$，且兩者之和 $= \triangle P_1VP_2/4$。現稱 $\triangle P_1VP_2$ 爲一級三角形，面積記作 $\triangle_1$，$\triangle P_1Q_1V$ 及 $\triangle P_2VQ_2$ 稱爲二級三角形，面積總和記作 $\triangle_2$，$\triangle_2 = \triangle_1/4$。同理可在 P_1Q_1、Q_1V、VQ_2、Q_2P_2 之上作 4 個三級三角形，其面積總和爲 $\triangle_3$，同樣可證

$$\triangle_3 = \frac{1}{4}\triangle_2 = \frac{1}{4^2}\triangle_1\text{。}$$

這手續可以繼續下去，直到作出 n 級三角形，其面積的總和 $\triangle_n = \triangle_1/4^{n-1}$。全部三角形的總和

$$\begin{aligned}
I_n &= \triangle_1 + \frac{1}{4}\triangle_1 + \frac{1}{4^2}\triangle_1 + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1 \\
&= \triangle_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) \\
&= \triangle_1 \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{4^n}}{1 - \dfrac{1}{4}} \\
&= \triangle_1\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right) \\
&= \frac{4}{3}\triangle_1 - \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}\triangle_1 \\
&= \frac{4}{3}\triangle_1 - \frac{1}{3}\triangle_n\text{。}
\end{aligned}$$

由此知

$$I_n < \frac{4}{3}\triangle_1\text{，}$$

又

$$\frac{4}{3}\triangle_1 - I_n = \frac{1}{3}\triangle_n\text{。}$$

前面的命題已證明，內接三角形的級數越多，I_n 越大，$S - I_n$ 越小，同時 $\triangle_n$ 也越小，以至小於任給的正數。

現在要證明 $S=4\triangle_1/3$。 假設等式不成立。

1. 若 $S>4\triangle_1/3$， 則只要內接三角形作得足夠多， 可使

$$S-I_n<S-\frac{4}{3}\triangle_1,$$

或

$$I_n>\frac{4}{3}\triangle_1,$$

這與前面的不等式矛盾。

2. 若 $S<4\triangle_1/3$， 則可使

$$\frac{1}{3}\triangle_n=\frac{4}{3}\triangle_1-I_n<\frac{4}{3}\triangle_1-S,$$

由此推出

$$I_n>S$$

這也是不合理的， 因 I_n 是內接三角形面積之和， 應有 $I_n<S$。 綜上所述， 可知 $S=4\triangle_1/3$， 即拋物弓形面積等於同底等高的三角形的 4/3。

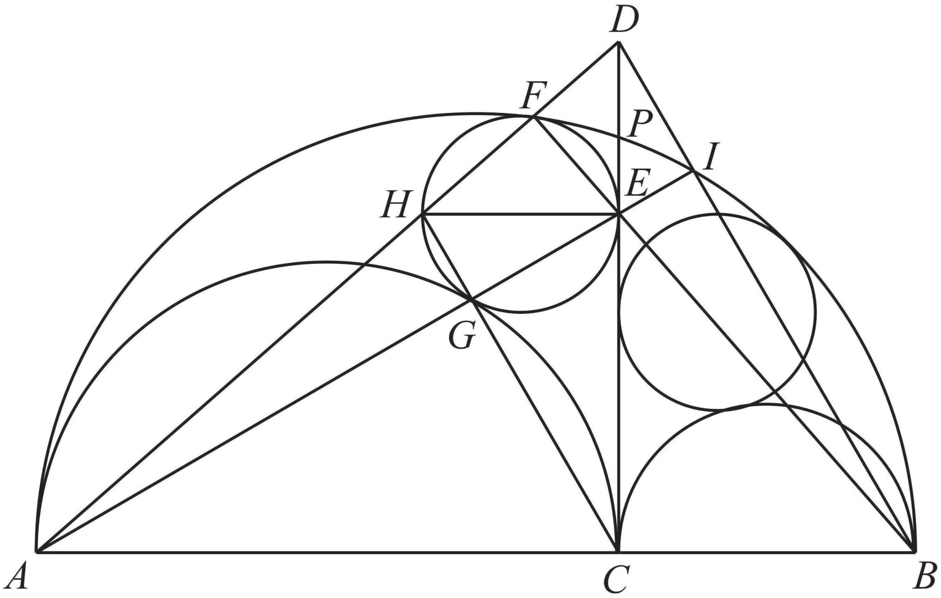
(八) 《 論浮體 》

這是古代第一部流體靜力學著作， 阿基米德因此而被尊爲流體靜力學的創始人。 二十世紀之前， 本書只有莫貝克十三世紀時的拉丁文譯本， 1906 年， 海伯格發現了羊皮紙上的希臘原文， 但不完全。 現傳的本子是兩種文字參照編成的。

卷上命題 7 給出著名的 “阿基米德原理”： 重於流體的固體， 放在流體中， 所減輕的重量等於排去流體的重量， 這原理因和他解決王冠問題聯繫起來而膾炙人口。

卷下的十個命題相當詳細地討論了正迴旋拋物體在流體中的穩定性， 研究了不同的高與底的比、 具有不同的比重及在流體中處於不同位置時這種立體的性態。 在推理中運用了高度的計算技巧。

(九)《引理集》



只有阿拉伯文譯本傳下來，是 15 個初等幾何的問題集。也許不是阿基米德的原著而是後人收集整理的，因爲在文章中不止一次提到阿基米德的名字。其中提出一種被稱爲 “皮匠刀”(shoemaker’s knife) 的圖形，是三個半圓所包圍的部分，兩個小半圓外切，又同時內切於大半圓。這圖形有許多奇妙的性質，例如通過兩小圓的外切點 C，作 CP 垂直大圓直徑 AB (三個圓的直徑是重合的) 交大圓於 P，則 “皮匠刀” $AGCBPA$ 的面積等於以 CP 爲直徑的圓面積。又可以作兩個小圓，分別切於 CP、大圓及一個小圓，可證這兩個小圓相等。設 HE 是平行於 AB 的一個小圓的直徑，則切點 F 與 H、A 共線，F 與 E、B 也共線。E 是 $\triangle ABD$ 的垂心，從 A 向 DB 作垂線，垂足 I 必落在大圓周上。又 AE、HC 必過切點 $G\cdots$ 等等。還有許多其他的性質。

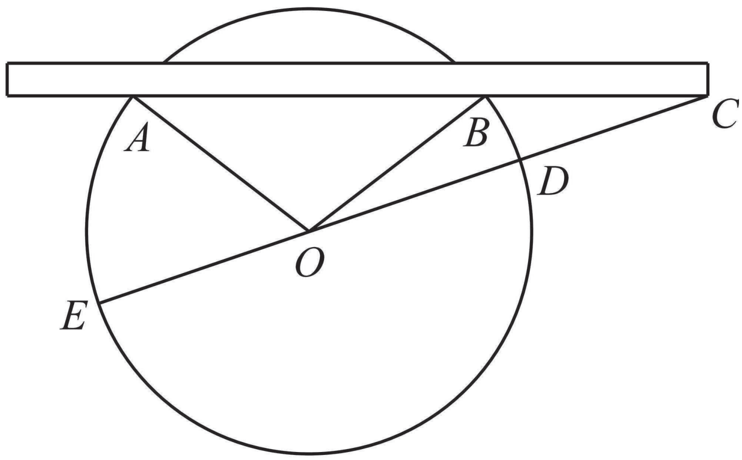
命題 8 和三等分角問題有關。設 AB 是 $\odot O$ 的任一弦，延長 AB 至 C 使 BC 等於圓的半徑。聯 CO 並延長之使交圓於 E、D。求證

$$\overset{\frown}{AE} = 3\,\overset{\frown}{BD}\text{。}$$

聯 OA，OB，只要證明 $\angle AOE = 3\angle BOD$。實際上 $\angle AOE$ $= \angle OAC + \angle OCA = \angle OBA + \angle OCA = \angle BOC + 2\angle OCA = 3\angle BOD$。

現將問題倒過來考慮。設有 $\angle AOE$，求它的三等分角。這就是古希臘的三大作圖問題之一的“三等分任意角”問題。從理論上說用直尺和圓規是不可能解決的。受到本命題的啓發，只要在直尺上加一個點，就能輕而易舉地解決這歷史難題。

在直尺 ABC 上記上一個點 B，使 B 至尺端 C 的距離等於半徑。現令尺通過 A 點，而 B 在圓周上移動，當 C 落在直徑的延長線 EDC 上時，作 ABC 直線，則 $\angle C$ 就是所求的三等分角。



當然這已不是歐幾里得幾何的尺規作圖法，因爲工具已經改變 (即使只加一點)，而且不合作圖公法。不過它說明了一個問題，有些初學者只知道三等分角是難題，但不知難在尺規的限制上，如不限於尺規，那眞是易如反掌。

(十)《群牛問題》

阿基米德的論文向來是以命題的形式來表達的，而這篇的體例不同，它是用詩句寫成的 (原文見 [7]，p.203)。標題是給埃拉托塞尼的信。胡爾奇 (Hultsch) 曾猜想這是阿基米德“顯本領”(tour de force) 之作，以此向亞歷山大的學者們 (特別是阿波羅尼奧斯) 挑戰 (見 [3]，p.399)。但它的眞實性頗值得懷疑，“群牛問題”大概很早以前就已存在，阿基米德只是重新研究。詩句也未必出自他的手。內容如下：

太陽神赫利俄斯 (Helios) 有一大群牛在西西里島的草原上放牧。公牛和母牛各有四種顏色，各種頭數之間的關係如下：

令 W	、	w	分別表示	白色	公牛、母牛的頭數	；
X	、	x	⋯⋯⋯	黑色	⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯	；
Y	、	y	⋯⋯⋯	黃色	⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯	；
Z	、	z	⋯⋯⋯	花色	⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯	。

要求

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) X + Y$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) Z + Y$$

$$Z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + Y$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (X + x)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (Z + z)$$

$$z = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Y + y)$$

$$y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w)$$

$$W + X = \text{正方形 (數)}$$

$$Y + Z = \text{三角數}$$

所謂 “三角數” 就是形如 $m(m+1)/2$ (m 是正整數) 的數， 它可以排成一個三角形。 倒數第二個條件是含混的， 原話是 “黑色和白色的公牛可以合起來排成一個方形， 長與寬是相等的”。 有兩種可能解釋， 一是長與寬的數目相等， 即

$$W + X = n^2 \text{ (完全平方數)};$$

另一是方形的兩個邊長相等， 但由於牛的身長與體寬不一樣， 方形兩個邊的數目不會相等， 條件成爲[33]

$$W + X = mn \text{。}$$

後一種情形較易解決， 稱爲 “較簡問題”， 而前一種情形稱爲 “完全問題”。

“較簡問題” 已由 Jul. Fr. 武爾姆 (Wurm) 解決。 “完全問題” 在 1880 年爲阿姆托爾 (Amthor) 所解決。 即使較簡問題， 牛的總數也已達到 5916837175686 頭之多! 而完全問題導致二元二次方程

$$t^2 - 4729494u^2 = 1 \text{。}$$

最小解牛的總數是 7.766×10^{206544}， 位數超過二十萬! 當時阿基米德未必解得出來。

其它工作

(一) 半正多面體 (semi–regular polyhedron)

帕波斯在《數學彙編》中記述阿基米德發現十三種半正多面體。 各個面是若干個不同類的正多邊形， 但同一類的都相等。 例如 12 個相等的正五邊形和 80 個相等的三角形構成一個 92 面體； 6 個正八邊形， 8 個正六邊形， 12 個正方形構成 26 面體； 26 面體又可以由 18 個正方形和 8 個正三角形構成。 如此等等。

(二) 三角形面積公式

阿拉伯數學家比魯尼 (Abū'l raihān Muhammad al-Bīrūnī， 973 – 1050？) 記述， 阿基米德發現了用邊表三角形面積的公式

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

s 是三角形三邊 a、b、c 之和之半， 這公式通常歸功於海倫 (Heron， 62 年前後)， 並稱爲海倫公式。

[33]這種解釋也很牽強， 因爲要擠成一個正方形， 還需要考慮身長與體寬的比， 故右端不是任意兩個正整數之積 mn 而是 kn^2 (k 是常數)， 這樣問題並沒有化簡。

(三) 正七邊形作圖法

另一個阿拉伯數學家塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra， 826 - 901) 指出， 阿基米德發現正七邊形的作圖法。 自然不是尺規作圖。 可惜方法已失傳。

(四) 天文學方面

阿基米德對天文學也深有研究， 但著作沒有留下來。 西塞羅的書記載馬塞盧斯攻佔敍拉古時， 曾獲得兩座阿基米德製作的天文儀器。 一座是天球儀， 上刻各個星座， 後放置在神廟中。 另一座爲加盧斯 (Gaiu Sulpicius Gallus， 公元前 166 年爲羅馬執政官) 所有。 可稱爲天象儀 (planetarium)， 是藉助機械或水力表演日、 月、 行星的運行， 還可以演示日、 月蝕。

(五) 阿基米德螺旋泵

歷史學家狄奧多羅斯 (Diodorus Siculus， 公元前一世紀) 記載阿基米德在埃及時， 發明一種螺旋水泵， 被埃及人廣泛使用。

結束語

歷史上有的數學家勇於開闢新的園地， 而缺乏縝密的推理， 有的數學家偏重於邏輯證明， 而對新領域的開拓卻徘徊不前。 阿基米德則兼有二者之長， 他將驚人的獨創與嚴格的論證融爲一體， 更善於將計算技巧與邏輯分析結合起來。 正確地注意理論與實際的聯繫， 常常通過實踐直觀地洞察到事物的本質， 然後運用邏輯方法使經驗上升爲理論 (如浮力問題)， 再用理論去指導實際工作 (如發明抗敵器械)。 在嚴格性方面， 實超過了十五 - 十七世紀的分析學家， 他的理論還比牛頓、 萊布尼茨更加接近柯西、 魏爾斯特拉斯的 $\varepsilon-\delta$ 方法 (例如阿基米德公理及窮竭法的使用)。 只是沒有強大的生產需求和適宜的社會環境， 未能進一步發展起來。

這位獨步千古的科學家， 還具有崇高的愛國熱忱， 在祖國危亡

的緊急關頭， 獻出了自己的一切。 他的愛國精神和愛科學的精神同樣爲萬世所景仰。

文　　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg, 2nd ed., *Archimedes opera cum commentariis Eutocii*, 2nd ed., 3 vols, Leipzig, 1910－1915。

[2] T.L. Heath, *The works of Archimedes with the method of Archimedes* Dover Publications, Inc. 1912。

[3] E.J. Dijksterhuis, *Archimedes, Ejnar Munksgaard*, 1956。

[4] P. Ver Eecke, *Les oeuvres complètes d'Archimède*, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon, 2nd ed., 2 vols, Paris, 1960

研究文獻

[5] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Simon and Schuster, 1937。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Co. I, 1923。

[7] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[8] B.L. van der Waerden, *Science awakening*, Translated by A Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954。

[9] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[10] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[11] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1968。

[12] J. Fauvel and J. Gray, *The history of mathematics a reader*, The Open University, 1987。

[13] C.B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Dover Publications, Inc., 1949 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[14] C.H. Edwards, *the historical development of the calculus*, Springer-Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。