海　倫

海倫 [Hero (或 Heron) of Alexandria] 約公元 10 年生於亞歷山大，約卒於公元 75 年。數學、物理、氣體力學、機械學。

海倫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Heron.html

海　倫

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

海倫 [Hero (或 Heron) of Alexandria] 約公元 10 年生於亞歷山大， 約卒於公元 75 年。 數學、 物理、 氣體力學、 機械學。

生存的年代

海倫生活的年代可能是歷代數學家中爭議最大的， 各家的意見有好幾百年的出入。 下面列舉幾種較有影響的說法：

(1) 將海倫和蒂西比奧斯 (Ctesibius) 聯繫起來 (見 [2]， p.43)。 有一種《武器製造法》(Belopoeica， *On the construction of engines of war*) 的手抄本， 將蒂西比奧斯的名字和海倫連在一起作爲篇名。 還有一本不知名的拜占廷作者寫於十世紀的書中有這樣的詞句："阿斯克拉 (Ascra， 古希臘地名) 的蒂西比奧斯， 亞歷山大的海倫的教師"(見 [3]， p.298)。 由此推斷海倫是蒂西比奧斯的學生， 或者就是他的兒子。 蒂西比奧斯是機械發明家， 曾發明一種水鐘、 可能是漏壺 (clepsydra) 一類的器械， 還有利用水力或氣壓驅動的各種機械， 生活於公元前三世紀末或公元前二世紀， 這樣海倫的活躍期應是公元前二世紀。

但另一本同樣內容的手稿， 標題是《亞歷山大的海倫的武器製造法》， 沒有標上蒂西比奧斯。 大概海倫改進先輩的發明， 後人認爲他在思想或方法師承蒂西比奧斯， 並不意味著就是他直接教導的學生。

(2)《度量論》(Metrica) 是海倫的代表作， 過去一直以爲它早已失傳。 1896 年 R. 舍內 (Schöne) 在君士坦丁堡 (即土耳其的伊斯坦布爾) 發現它的手抄本[1]， 1903 年校訂出版。 從中可以較準確地定出年代的上界。 書中多處援引阿基米德 (卒於公元前 190 年) 的工作， 至少三處引用阿波羅尼奧斯 (Apollonius， 約卒於公元前 190)， 又引用過關於 “圓內直線 (即弦)” 的書。 在希帕霍斯 (Hipparchus， 約公元前 180 – 約前 125 年) 之前， 無人實際作出弦表， 故估計引用的是他的書。 據此推斷海倫活動年代不早於公元前 150 年。 另一方面， 帕波斯 (Pappus) 大量摘引海倫的著作， 而帕波斯的書大致完成於戴克里先 (Diocletian) 統治時期 (284 – 305)， 由此界定海倫的年代在公元前 150 – 到公元 250 年之間， 這上、 下限距離仍然很大。

(3) 維特魯維厄斯 (M. Vitruvius Pollio， 公元前一世紀上半期 – 約公元前 25 年) 是羅馬有名的建築學家， 以十卷的《建築學》著稱於世。 在這書的第 7 卷中列舉了十二位機械師， 如阿契塔 (Archytas， 公元前 375)、 阿基米德 (Archimedes， 公元前 287 – 前 212 年)、 蒂西比奧斯、 菲隆 (Philon of Byzantium) 等， 還有一些不其知名的， 但沒有列海倫。 較合理的解釋是他在維特魯維厄斯之後。 又兩人使用的器械相異之處甚多， 如維特魯維厄斯的路程計 (hodometer) 是走一羅馬里就有一塊小石子落在盒子裡， 而海倫的儀器是用指針指示全程。 可見前者沒有看到海倫的設計。 據此可以將海倫的年代定在公元後。

(4) L.J.M. 科盧梅拉 (Columella， 約公元 23 – 79 年) 是農業、 天文學家。 他所用的計算公式甚至實際數值很多和海倫是一致的。 包括弓形面積的近似公式 (b 是底， h 是高)：

$$S = \frac{1}{2}(b+h)h + \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}b\right)^2 。$$

[1] 約抄寫於十一或十二世紀。

自然可以推想他們是同時代的人。

(5) 和托勒密 (Ptolemy， 約公元 100 – 約 170 年) 比較， 應將海倫放在托勒密之前。 普羅克洛斯 (Proclus， 公元 410 – 485 年) 曾指出： 托勒密認爲用古人的水鐘來測量太陽的視直徑是不可靠的。 所謂水鐘應當就是海倫描述的那一種， 因此海倫應早於托勒密。 但 T.L. 希思 (Heath) 比較了兩人的著作後得出相反的結論， 說海倫在後， 而且比帕波斯早不了多少， 也就是應爲三世紀的人 (見 [3]， p.306)， 而 W. 施密特 (Schmidt) 卻將活動年代定在公元 50 年前後 (見 [4]， p.125)。

(6) 最有說服力的是根據一次月蝕來確定年代。 海倫的重要著作《 測量儀器 》(*On the Dioptra*) 描述一種 “照準儀”(dioptra 或 diopter) 的工具， 其功能類似現代的經緯儀， 用作測量及天文觀測。 他特別指出可以測量可望不可即的物體的高和距離。 在這本書裡海倫利用可在兩地同時看到同一次月蝕的道理， 推出兩地的地方時差， 從而算出兩地的距離。 他選定亞歷山大和羅馬這兩個地方作爲試點， 某一年在春分前 10 天發生一次月蝕， 在亞歷山大開始於夜裡 “五更”(fifth watch) [2]。 數學史家 O. 諾伊格鮑爾 (Neugebauer， 1899 – ？) 斷定這次月蝕發生在公元 62 年， 而且在 500 年間沒有類似的月蝕。 日月蝕的推算是可靠的， 因此將海倫的活躍年代定在公元 62 年前後也是可信的。 諾伊格鮑爾的論斷發表於 1938 年， 以後學者大多數以此爲準 (見 [5]， p.178)。

(7) 還有一種說法值得一提， 曾有人認爲海倫有兩個， 老海倫生存於公元前二 – 三世紀， 是工程師和發明家， 而另一個小海倫是七 – 八世紀的人。 那本載有三角形面積公式的《 測量儀器 》乃是小海倫所作， 理由是公式的推導是那麼複雜而有獨創性， 但卻從未爲老海倫以後的古代學者所引用。 此說出自 M. 馬里耶 (Marie， 1883)， 也爲 M. 夏斯萊 (Chasles， 1793 – 1880) 所提倡

[2]古代希臘、 羅馬一夜分成幾段， 同中國的 “更” 一樣， 每一 “更” 大概是二小時， “五更” 相當於清晨。

(見 [2]， p.43)。 但因爲沒有足夠的證據證實另一個數學家海倫的存在， 此說已漸被人們放棄。 不過在公元 900 年左右確實還有一個海倫 (Hero of Constantinople)， 主要貢獻是測量學和機械而不是三角形面積公式 (見 [6]， p.117)。

綜上所述， 以公元 62 年前後爲海倫活動的年代是合適的。

主要著作

海倫留下的著作列舉如下：

1.《度量論》(*Metrica*)， 1896 年 R. 舍內 (Schöne) 發現手抄本， 1903 年由其子 H. 舍內 (Schöne) 校訂出版。

2.《測量儀器》(*On the dioptra*)， 1814 年文圖里 (Venturi) 校訂出版義大利文版。 1858 年才由 A.J.H. 文森特 (Vincent) 出版希臘文本。

3.《氣體力學》(*Pneumatica*)， 最先由 F. 科曼迪諾 (Commandino， 1509 − 1575) 譯成拉丁文出版 (1575)， 希臘文本則由泰夫諾 (Thévenot) 校訂出版 (1693)。

4.《自動機建造技術》(*On the art of constructing automata*) 或《自動舞台》(*The automation theatre*)， 最初由 B. 巴爾迪 (Baldi) 譯成義大利文出版 (1589)， 希臘文收入《海倫全集》(*Heronis Opera*， vol. I， 1899) 中。

5.《武器製造法》(*Belopoeica*) 先後由 B. 巴爾迪 (1616)、 呂斯托夫 (Rüstow， 1853)、 韋歇 (Wescher， 1867) 等校訂出版。

6. 幾何學方面的著作有《定義》(*Definitiones*)、《幾何》(*Geometria*)、《測量》(*Geodaesia*)、《測體積學》(*Stereometrica*) 等等。

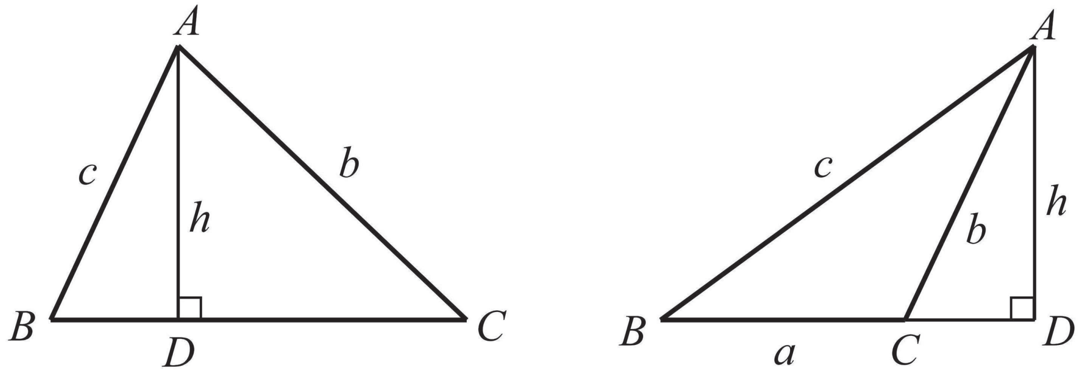
此外還有若干關於機械發明的著作。 海倫的特點是多才多藝， 善於博採衆長。 在著作中大量援引前人的成果， 如經常提

到阿基米德、狄俄尼索多羅 (Dionysodorus，約公元前二、三世紀)、歐多克索斯 (Eudoxus)、柏拉圖 (Plato，約公元前 427－約前 347 年)、埃拉托塞尼 (Eratosthenes，約公元前 274－前 194 年) 等。在論證中並不十分講究傳統的嚴格性，而是大膽地使用某些經驗性的近似公式。特別注重數學的實際應用，他發明的各種精巧器械，比理論上的成就更爲人們所推崇。

《度量論》內容簡介

全書共三卷，卷 I 討論平面圖形的面積，卷 II 是立體圖形的體積，卷 III 討論將圖形分成比例部分。卷 I 在序言中簡要描述了幾何學發展的過程，它起源於面積的度量，以後擴充到立體。歐多克索斯最先證明圓柱的體積等於同底等高的錐體的 3 倍，而阿基米德最先證明球面積是此球的大圓的 4 倍，是外切圓柱面積的 2/3。他們都是度量理論的先驅者。

接著給出一般三角形面積計算法。設已知 $\triangle ABC$ 的三邊 a、b、c，求面積有兩法：第一法是先算出高，底乘高之半即面積；第二法是用 “海倫公式”。第 1 法的根據就是歐幾里得《原



本》卷 II 命題 12、13，相當於餘弦定律[3]：

$$c^2 = a^2 + b^2 \mp 2a \cdot CD，$$

$\angle C$ 是鋭角時，$c^2 < a^2 + b^2$，公式右端取 $-$ 號，$\angle C$ 是鈍角

[3]有時叫做推廣的勾股定理。

時， $c^2 > a^2 + b^2$ ， 公式右端取 $+$ 號。 於是

$$CD = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2a} ,$$

由此算出高 h， $h^2 = b^2 - CD^2$ ， $\triangle$面積 $= \frac{1}{2}ah$。

《度量論》卷 I 第 5、 第 6 題給出的例是 a、 b、 c 等於 14、 15、 13； 11、 13、 20。 兩例的高 h 都是 12， 面積是整數。 但有的例高不是整數。 如在另一本書《幾何》中， 三邊等於 8、 4、 6， 從而

$$\begin{aligned} CD &= \frac{11}{4} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} , \\ h^2 &= b^2 - CD^2 = 16 - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= 8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} 。 \end{aligned}$$

值得注意的是， 海倫在這裡使用古代埃及人的 “單位分數”(unit fraction)， 即分子是 1 的分數， 使人大惑不解。 其實在希臘早已有一般分數記法， 海倫本人在《度量論》中就將 $\frac{4}{164}$ 記作 $\frac{\rho\xi\delta}{\delta}$ ， 其中 ρ、 ξ、 δ 分別表示 100、 60、 4， 連起來就是 164， 分子 4 寫在下面， 和現在的習慣恰好相反 (見 [7]， p.22)。 當時是沒有分數線的。 下面接著將 “單位分數” 開方， 求出

$$h = \sqrt{8 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

(近似值)。 於是面積等於 $4 \times (2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = 11\frac{2}{3}$ 。 怎樣對單位分數開方， 又怎樣得到近似值， 均未說明。

海倫注意到本例先算出 h 的近似值，再乘以 $\frac{1}{2}a$，這樣求出的面積，不如將 h^2 先乘以 $(\frac{1}{2}a)^2$ 再開方所求得的面積那麼精確。

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 h^2} &= \sqrt{16\times\left(8+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)} = \sqrt{135} \\ &= 11+\frac{1}{2}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}\text{。}\end{aligned}$$

化爲小數是 11.61904762，而 $\sqrt{135} = 11.61895004$，相對誤差約爲十萬分之一。前一種算法 $11\frac{2}{3}$ 相對誤差 (千分之四) 大得多。

已知三邊求三角形面積的第二種算法是用公式

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1}$$

其中 a、b、c 是三邊，s 是半周長，Δ 是面積。這是有名的 “海倫公式”。在卷 I 的第 8 命題中給出幾何證明如下：

作內切圓 DEF，O 是圓心，半徑 $r = OD = OE = OF$。連 O 至 A、B、C，及各切點 D、E、F。則

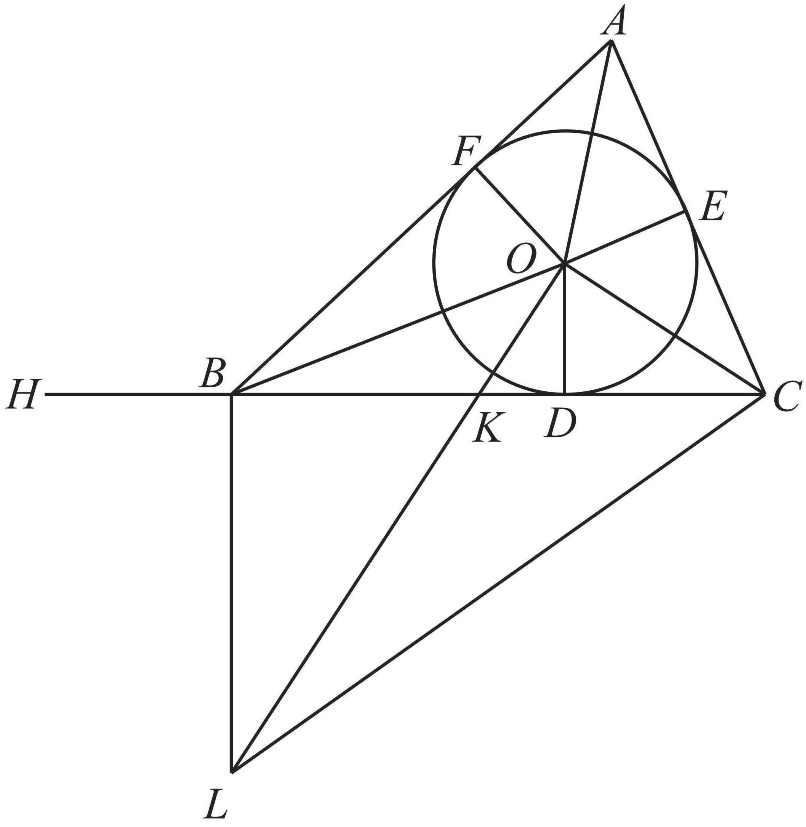
$$\frac{1}{2}BC\cdot r = \triangle BOC\text{，}$$

$$\frac{1}{2}CA\cdot r = \triangle COA\text{，}$$

$$\frac{1}{2}AB\cdot r = \triangle AOB\text{；}$$

三式相加得 $sr = \Delta$，其中 $s = (a+b+c)/2$。延長 CB 至 H，使 $HB = AF$，易知 $HC = s$。

於是



作 $BL\perp BC$、$LO\perp OC$，二者交於 L，則 B、O、C、L 四點共圓，於是 $\angle BLC$ 與 $\angle BOC$ 互補，但 $\angle FOA$ 也與 $\angle BOC$ 互補，故 $\angle BLC=\angle FOA$，

$$\triangle BLC\sim\triangle FOA。$$

$$\frac{BC}{BL}=\frac{AF}{OF}=\frac{HB}{OD}，$$

$$\frac{BC}{HB}=\frac{BL}{OD}=\frac{BK}{KD}，\text{(更比定理)}$$

$$\frac{HC}{HB}=\frac{BD}{KD}。\text{(合比定理)}$$

由此得

$$\frac{HC^2}{HC\cdot HB}=\frac{BD\cdot DC}{KD\cdot DC}=\frac{BD\cdot DC}{OD^2}，$$

於是

$$(HC\cdot OD)^2=HC\cdot HB\cdot BD\cdot DC。$$

左端是 $(sr)^2=\Delta^2$，右端 4 條線段分別等於 s、$s-a$、$s-b$、$s-c$，即相當於公式 (1)。原文全用文字敍述 (見 [8]，p.477)，

沒有寫成這樣整齊的公式， 只指出各線段的作法， 如 HB 等於半周長減去 BC 等。

在證明這公式之前， 先給一個例子， 說明具體的算法。

設三邊爲 7、 8、 9。 相加取其半， 得 12 減去 7， 餘 5， 同樣， 12 減 8 餘 4， 12 減 9 餘 3。 12 乘以 5 得 60， 再乘 4 得 240， 再乘以 3， 得 720。 求 720 的平方根， 即爲所求面積。

720 沒有有理平方根， 這時要用近似算法， 步驟如下： 最接近 720 的平方數是 729， 它的平方根是 27， 720 除以 27 後， 得 $26\frac{2}{3}$， 加上 27， 得 $53\frac{2}{3}$， 取其半。 得 $26\frac{1}{2}+\frac{1}{3}(=25\frac{5}{6})$。 這就是 720 平方根的近似值。 $(26\frac{5}{6})^2 = 720\frac{1}{36}$， 僅比 720 多了 $\frac{1}{36}$。 如要取得更精確的值， 可以 $26\frac{5}{6}$ 作近似值再重複一次上述的手續。

原文沒有繼續演算下去， 現推算如下：

$$\frac{1}{2}\left(26\frac{5}{6}+\frac{720}{26\frac{5}{6}}\right)=26\frac{1609}{1932}\text{，}$$

$$\left(26\frac{1609}{1932}\right)^2=720\frac{1}{3732624}\text{。}$$

化爲小數， $26\frac{5}{6} = 26.8\dot{3}$， 與眞值 $\sqrt{720} = 26.832815730\cdots$ 比較， 在小數後第三位出現差異。 而 $26\frac{1609}{1932} = 26.8328157349\cdots$ 在小數後第九位才出現差異。

一般說， 設 a_1 是 $\sqrt{N}$ 的第一近似值， 則更精確的第二近似值

a_2 是

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{N}{a_1}\right) \text{。} \tag{2}$$

海倫明確地使用這一公式，但沒有給出證明。我們可以猜想他是這樣推導的：

不妨設第一近似值 a_1 是過剩的，

$$\sqrt{N} < a_1,$$

兩端乘以 $\sqrt{N}/a_1$，有

$$\frac{N}{a_1} < \sqrt{N} < a_1 \text{，}$$

取不足近似 $\dfrac{N}{a_1}$ 與過剩近似 a_1 的算術平均值作 a_2，便有 (2) 式。不難證明 a_2 比 a_1 更接近眞值。事實上 a_2 也是過剩的[9]，同時又小於 a_1 (a_2 在 a_1 與不足近似值之間)，故更加接近 $\sqrt{N}$。

若 a_1 是不足的，由公式 (2) 定義的 a_2 同樣是過剩的，而且也一樣比 a_1 更接近 $\sqrt{N}$。這只要注意到由 $\frac{1}{3}\sqrt{N} < a_1 < \sqrt{N}$ 可推出 $\sqrt{N} - a_1 > \frac{1}{2}(a_1 + \frac{N}{a_1}) - \sqrt{N}$ 即可。在理論上，如果 a_1 有 n 位準確數字，即誤差不超過第 n 位數字的半個單位，則 a_2 的誤差不超過第 $2n-1$ 位數字的 $1/8$。換句話說，使用 (2) 式一次，近似值的準確位數大約加倍，因此這一公式常稱爲 “平方根倍位法”。

(2) 寫成

$$a_2 = a_1 + \frac{N - a_1^2}{2a_1} \tag{3}$$

計算更方便，因爲 $N - a_1^2$ 的絕對值很小，除以 $2a_1$ 很快就得後面幾位小數。

---

[9] 因不等式 $\frac{1}{2}(a_1 + \frac{N}{a_1}) > \sqrt{N}$ 與 $(a_1 - \sqrt{N})^2 > 0$ 等價，故恆成立。

還有一種形式是

$$\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a} \tag{4}$$

被開方數 N 改寫成它的近似值 (即 a_1) 加上誤差 b，而右端就是 a_2。

這一類公式源遠流長，中國古代叫做“不加借算”，印度、阿拉伯國家也在使用，甚至可上溯到公元前一千多年的巴比倫 (見 [10])。

公式 (1) 的證明，海倫在《測量儀器》中的第 30 題再一次給出。但根據阿拉伯數學比魯尼 (Abū'l Raihān Muhammad al-Bīrūni，973 − 1050 以後) 的記載，這公式是阿基米德發現的，這一點已得到公認 (見 [7]，p.340)。不過海倫公式的名稱已爲世界各國所習用，很難再改過來。

印度的婆羅摩笈多 (Brahmagupta，約 598 − 665 以後) 在 628 年給出四邊形面積

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(a、b、c、d 是四邊長，s 是半周長，實際只適有於圓內接四邊形)，若其中一邊 $d=0$，則成三角形，公式相應變成 (1) (見 [9])。

我國秦九韶 (約 1202 − 1261) 在《數書九章》(1247) 中也獨立給出與 (1) 等價的公式。

本卷從第 17 題開始，給出正多邊形面積的計算法，邊數從 3 到 12。

如正三角形，邊長爲 a，則面積應爲 $S_3=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，海倫取 $\sqrt{3}=\dfrac{26}{15}=1.7\overline{3}$，這是很好的近似值，相對誤差 $<0.08\%$(更

好的近似值是 $\dfrac{71}{41}=1.73170\cdots$ 相對誤差 $<0.02\%$)。從而 $S_3=\dfrac{13}{30}a^2$。

後面的面積也都是近似值，除了正五、六、八邊形較好之外，其餘的近似值相當粗糙。

18 題給出正五邊形的面積 $S_5=\dfrac{12}{7}a^2$。按準確面積應是

$$S_5=\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}a^2=1.720477a^2\text{。}$$

如將係數展開成連分數，可得漸近分數

$$\frac{2}{1}\text{、}\frac{5}{3}\text{、}\frac{7}{4}\text{、}\frac{12}{7}\text{、}\frac{31}{18}\text{、}\frac{43}{25}\text{、}\cdots,$$

$\dfrac{12}{7}$ 是漸近分數之一，故是較好的選擇。

另外正六邊形 (19 題) 的面積 $S_6=\dfrac{13}{5}a^2$，正八邊形 (21 題) 的面積 $S_8=\dfrac{29}{6}a^2$ 的選擇也較好，都是連分數的漸近分數。但正 7、9、10、11、12 邊形的面積，近似分數的選擇都不佳。正 n 邊形面積記作 S_n，列舉如下：

$$S_7=\frac{43}{12}a^2\text{、}S_9=\frac{51}{8}a^2\text{、}S_{10}=\frac{15}{2}a^2\text{、}$$

$$S_{11}=\frac{66}{7}a^2\text{、}S_{12}=\frac{45}{4}a^2\text{。}$$

以正七邊形爲例核對一下。準確值是

$$S_7=a^2\cdot\frac{7}{4}\cot\frac{180^\circ}{7}=3.633912444a^2\text{，}$$

將係數化爲連分數， 其漸近分數序列是： $\frac{3}{1}=3$、$\frac{4}{1}=4$、$\frac{7}{2}=3.5$、$\frac{11}{3}=3.\overline{6}$、$\frac{29}{8}=3.625$、$\frac{40}{11}=3.\overline{63}$ (其誤差爲 0.00245)、 $\frac{109}{30}=3.6\overline{3}$ (其誤差爲 0.000579)， ...

海倫給出的公式是 $S_7=\frac{43}{12}a^2$、$\frac{43}{12}=3.58\overline{3}$， 其誤差爲 0.05079， 比 $\frac{40}{11}$ 的誤差大得多， 比 $\frac{29}{8}$ 的誤差 (0.008912) 也大得多， 甚至比 $\frac{11}{3}$ 的誤差 (0.03275) 都大。

正九邊形準確値 $S_9=6.181824194a^2$， 海倫公式 $S_9=\frac{51}{8}a^2=6.375a^2$， 係數誤差 0.193175， 相對誤差達 3% 以上， 如取 $S_9=\frac{37}{6}a^2=6.1\overline{6}$， 誤差爲 0.0151575， 相對誤差僅爲 0.25%。

10 、 11 、 12 邊形的選擇同樣也是不好的。 由此可知海倫在多邊形計算方面頂多是因襲了前人 (猜想是希帕霍斯) 相當粗略的弦表， 而沒有在理論上加以改進。

《 度量論 》卷 II 討論立體圖形體積。 如描述一種 “小祭壇 (little altar)”， 在現在立體幾何中屬於 “擬柱體”(prismatoid)， 上下底是長方形， 不必相似， 但對應邊平行。 在日常生活中很常見， 如煤場的煤堆 、 鹽灘上的鹽坨 、 鐵路旁的碎石堆等， 可名爲 “長方台” [6]。 設上底的長 、 寬爲 a'、b'， 下底的長 、 寬爲 a、b， 高

[6]中國古代對這種立體非常重視， 有多種專名， 如芻童， 盤池， 冥谷等。

爲 h， 書中給出體積

$$V=\left[\frac{1}{4}(a+a')(b+b')+\frac{1}{12}(a-a')(b-b')\right]h,$$

這是正確的。 更簡單的形式是

$$V=\frac{h}{6}(2ab+ab'+a'b+2a'b')。$$

其餘的公式多爲前人所知。

卷 III 討論將圖形分割成已知比， 基本上採自阿基米德的工作。

其它工作

《 測量儀器 》是海倫另一本代表作。 其中描述一種儀器， 功能類似現代的經緯儀。 接著介紹如何使用這種儀器去解決各種測量問題。 如 (1) 挖一個隧道， 從山的兩側開始， 找準方向， 使隧道準確會合； (2) 確定兩點之間高度的差； (3) 測量可望而不可及的兩點間的距離； (4) 測溝渠的深； 還有各種高度和距離的測量問題， 包括利用同時看到同一次月蝕， 算出羅馬和亞歷山大之間的距離。 本書最後敍述如何用齒輪的結構， 用一個給定的力去移動給定的重物。

海倫還有各式各樣的發明。 最有名的是 “汽轉球”(aeolipile)， 這字的拉丁文是 aeolipilae， 由 Aeolus(源出於希臘文 $A\iota o\lambda os$， 神話中的 “風神”) 和 pila (原意爲 “球”， 或來自希臘文 $\pi\acute{\upsilon}\lambda\eta$， 原意是 “門” 合成， 可直譯爲 “風神之球” 或 “風神之門”。 主要的結構是一個封閉的容器 (如球或圓柱)， 安裝在中空的旋轉軸上， 球的兩側 (在與軸垂直的平面上) 各裝一個或幾個噴射彎管， 蒸汽由軸的孔道進入球內， 經彎管噴出， 因反作用力使球旋轉。 常被稱爲世界上第一個蒸汽機。 不過當時的生產力低下， 沒有用作實

際機械動力，只被看作一種高級玩具，或用於顯示“神力”的裝置。如信徒們在祭壇上燒紙，容器內放出的蒸汽驅勸神殿的門自動開啓，使信徒們大吃一驚。

他還創造一種虹吸管、一種“自動售貨機”，即“投入一枚硬幣即自行開動”(penny-in-the-slot) 機器、滅火器、水風琴、水鐘⋯ 等等，簡直多不勝數。他還寫過《反射光學》(*catoprica*)，發展了歐幾里得的幾何光學，但同時也接受了傳統的錯誤觀點：視覺的產生是因爲眼睛發出了某種射線被物體反射回來。

總之，海倫有很多創造發明，給後人極大的啓發，在世界技術史上佔有崇高的地位。數學方面，雖然對純理論沒有重大的推進，論證有時是欠嚴格的，但善於運用已有知識去解決實際問題。

文　　獻

原始文獻

[1] Heronis, *Alexandrini opera quae supersunt omnia*, 5 vols, Leipzig, 1899－1914。

研究文獻

[2] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[3] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[4] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, I, 1923

[5] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Brown University Press, 1957。

[6] W.W.R. Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover Publications, 1908。

[7] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[8] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[9] T.A. Sarasvati Amma, *Geometry in ancient and medieval India*, Motilal Banarsidass, Delhi, 1979。

[10] 李儼，中算家的平方零約術，中算史論叢 (一)，科學出版社，1954。