丟　番　圖

丟番圖 (Diophantus of Alexandria) 約公元 200 年生於亞歷山大， 約卒於公元 284 年。 數學。

丟　番　圖

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

丟番圖 (Diophantus of Alexandria) 約公元 200 年生於亞歷山大， 約卒於公元 284 年。 數學。

丟番圖生存的年代， 是根據下面的記載來確定的。 在他的著作《多角數》(*De polygonis numeris*) 中， 引用了許普西克勒斯 (Hypsicles of Alexandria， 約公元前 175 年) 關於多角數的定義， 而賽翁 (Theon of Alexandria) 的書又引用丟番圖的著作。 這樣界定的上、 下限是公元前 175 年到公元 390 年。 另外， M.C. 普賽勒斯 (Psellus， 1018 − 約 1078)[1]寫過一封信， 提到阿納托利厄斯 (Anatolius， 約公元 280 年)[2]將他所著的關於埃及計算方法的小冊子獻給丟番圖， 因此兩人應同時代或丟番圖稍早[3]。 據此斷定丟番圖的活躍時期是公元 250 年前後。

丟番圖將他的傑作《算術》(*Arithmetica*) 獻給迪奧尼修斯 (Dionysius)。 歷史上用這一名字的有好幾個， 估計這一個是亞歷山大的迪奧尼修斯， 他是當地的主教， 在任主教 (公元 247 年) 之前， 曾在那裡建立基督教學校 (從公元 231 年起)。 丟番圖的《算術》可能就是爲這些學校編寫的教科書。 這種推想是合情合理的， 年代也和前面所說的一致。

關於丟番圖的生平， 還有一則別開生面的記載。 在一本《希臘詩文選》(*The Greek anthology*)[4] 中， 收錄了丟番圖的奇特的墓志

[1]拜占庭的哲學家、 政治家， 曾任首相。

[2]勞迪賽亞 (Laodicea， 在今土耳其西部) 的主教。

[3]見 P. 坦納里 (Tannery， 1843 − 1904) 校訂的《丟番圖全集》(1893 − 1895)， 即文獻 [1]。

[4]這是公元 500 年前後的遺物， 大部分爲語法學家梅特羅多勒斯 (Metrodorus) 所輯， 其中有 46 首和代數問題有關的短詩 (epigram)。 這裡所引的是第 126 題。

銘 (見 [7]， p.512)：

墳中安葬著丟番圖，

多麼令人驚訝，

它忠實地記錄了所經歷的道路。

上帝給予的童年佔六分之一，

又過十二分之一， 兩頰長鬍，

再過七分之一， 點燃起結婚的蠟燭。

五年之後天賜貴子，

可憐遲到的寧馨兒，

享年僅及其父之半， 便進入冰冷的墓。

悲傷只有用數論的研究去彌補，

又過四年， 他也走完了人生的旅途。

這相當於方程

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x，$$

$x=84$。 由此知他享年八十四歲。

丟番圖的著作

確實知道他有兩種著作， 一種是《算術》， 大部分都保存了下來； 另一種是《多角數》， 只有少部分留下來。 還有兩種書， 一是《推論集》(*Porismata*) 它只是在《算術》中幾次提到， 可能是若干數論問題的彙編， 獨立成册， 也可能是附屬在《算術》中的失傳部分。 此外， 伊安布利霍斯 (Iamblichus， 約公元 250 − 約 330 年) 所著《尼科馬霍斯〈算術〉評註》一書的註釋者還提到丟番圖另外一本書《分數算法》(*Moriastica*)， 它記載了分數計算的法則， 可惜已失傳。

丟番圖的《算術》是一部劃時代的著作，它在歷史上影響之大可以和歐幾里得《原本》(*Elements*) 一比高下。這書的序中說，全書共分十三卷 (見 [7]，p.517)。可是現在見到的希臘文本只有六卷。長期以來，大家都認爲其餘的七卷早在十世紀以前已經失傳。五世紀時希帕提婭 (Hypatia) 註釋這部書，只註了六卷，也許這正是其餘部分被人忽視終致失傳的原因 (見 [8]，p.449)。

近年來，發現四卷阿拉伯文本，改變了傳統的看法。1973 年，G. 圖默 (Toomer) 獲悉在馬什哈德聖地 (Meshed Shrine)[5]圖書館有一本阿拉伯文手抄本，經過研究，確認爲《算術》的失傳部分 (但還不全)。這是由古斯塔伊本盧加 (Qustā ibn Lūqā，活躍於 860 年前後) 譯成阿拉伯文的。後來 J. 塞夏諾 (Sesiano) 將它譯成英文並加以詳細註釋 (見 [6])。經過反覆推敲，塞夏諾指出這四卷在《算術》中原來的位置應該是緊接著希臘文本卷 1、2、3 的卷 4、5、6、7，而希臘文的其餘部分應是卷 8、9、10。下面將按這新的順序編排來介紹它的內容。

原來的六卷希臘文本，最初是 J. 雷格蒙塔努斯 (Regiomontanus，1436－1476) 發現的。1464 年 2 月 15 日，他寫信給 L. 比安基 (Bianchi)，提到他在威尼斯找到了丟番圖的《算術》，從此西方學術界才知道有六卷希臘文手抄本流傳下來。最早的拉丁文譯本是 G. 克胥蘭德 (Xylander，1532－1576) 的 "*Diophanti Alexandrini Rerum arithmeticarum libri sex，et de numeris multangulis liber unus*"(《亞歷山大的丟番圖算術六卷，多角數一卷》)[6]。以後又有 C.G. 巴歇 (Bachet de Méziriac，1581－1638) 校訂註釋的希臘－拉丁文對照本 "*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex，et de numeris multangulis liber unus*" (《亞歷山大的丟番圖算術六卷，多角數一卷》)[7]。關於這個譯本，有一段饒有趣味

[5]馬什哈德是伊朗東北部城市，是伊斯蘭教什葉派的聖地 (Shiite Shrine)。
[6]1575 年在巴塞爾 (Basel) 出版。
[7]1621 年在巴黎出版。

的歷史，1637 年左右，P.de 費馬 (Fermat，1601－1665) 讀到這譯本第 2 卷第 8 題："將一個平方數分爲兩個平方數" 時，在書頁的空白處寫出了著名的 "費馬大定理"。

1670 年費馬的兒子 S.de 費馬 (Fermat) 將他父親的全部批註插入正文，重新出版巴歇的希－拉對照本[8]。近代，不包括新發現四卷的 "丟番圖全集"，標準的版本是 P. 坦納里 (Tannery，1843－1904，法國數學史家) 編輯、校訂的希－拉對照本 "*Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis*"(《亞歷山大的丟番圖全集，包括希臘文註釋》)[9]。最流行的英譯本是 T.L. 希思 (Heath，186－1940) 的 "*Diophantus of Alexandria，A Study in the hitory of Greek algebra*"(《亞歷山大的丟番圖，希臘代數學史研究》)[1]。此外，還有德、法、英、俄及現代希臘語等多種譯本。

代數學的特徵

希臘時代 "算術"(arithmetica) 一詞，主要是指 "數的理論" 而言，大致相當於現在的 "數論"。而數字的加、減、乘、除等運算法則叫做 "計算的技巧"(logistica)，和前者有明顯的區別。這種分法從畢達哥拉斯時代開始，一直延續到近代，例如德國數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 的數論名著就叫做《算術研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*，1801)。丟番圖《算術》也是講數論的，它討論了一次、二次以及個別的三次方程，還有大量的不定方程。現在對於具有整係數的不定方程，如果只考慮其整數解，這類方程就叫做丟番圖方程，它是數論的一個分支。不過丟番圖並不要求解答是整數而只要求是正有理數。

[8]1670 年在圖盧茲 (Toulouse) 出版。

[9]共二卷，1893－1895 年在萊比錫出版。

[1]1885 年在劍橋出版，1910，再版 1964。

從另一個角度看，《算術》一書也可以歸入代數學的範圍。代數學區別於其它學科的最大特點是引入了未知數，並對未知數加以運算，根據問題的條件列出方程，然後解方程求出未知數。算術也有未知數，這未知數一般就是問題的答案，一切運算只允許對已知數來施行。在代數中既然要對未知數加以運算，就需要用某種符號來表示它。就引入未知數，創設未知數符號以及建立方程的思想 (雖然未有現代方程的形式) 這幾方面來看，丟番圖《算術》完全可以算得上是代數。當時代數學沒有專門的名稱。algebra 是九世紀花拉子米 (al-Khowarizmi) 以後才出現的名稱，而且直到十七世紀還沒被歐洲人普遍接受。丟番圖將這方面的成果冠以算術之名是很自然的。他被後人稱爲 "代數學之父" 也是有一定道理的 (見 [18]，p.202)。

希臘數學自畢達哥拉斯學派以後，興趣中心在幾何，他們認爲只有經過幾何論證的命題才是可靠的。爲了邏輯的嚴密性，代數也披上了幾何的外衣，一切代數問題，甚至簡單的一次方程的求解，也都納入僵硬的幾何模式之中。直到丟番圖，才把代數解放出來，擺脫了幾何的羈絆 (見 [9]，p.238)。例如，$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 的關係在歐幾里得《原本》中是一重要的幾何定理 (卷 II 命題 4)，而在丟番圖《算術》中只是簡單代數運算法則的必然結果。

下面通過一個例子來說明丟番圖解決問題的手法。卷 II 第 20 題：求兩數，使得任一數的平方加上另一數等於一個平方數 ([10]，p.101)。這相當於不定方程

$$x^2 + y = m^2$$
$$y^2 + x = n^2$$

要求所有的未知數 x、y、m、n 都是正有理數。

丟番圖只設一個未知數，也只使用一個未知數的符號，這是他的特點之一，今暫記作 x。其餘的未知數根據問題的具體條件用含

x 的一個簡單式子表示出來。 本例的條件是 x^2 加上另一個未知數等於一個平方數， 故可設這個未知數是 $2x+1$， 因爲 x^2+2x+1 正好是一個完全平方。 其次， 還應該滿足

$$(2x+1)^2+x=\text{平方數}。$$

丟番圖設右端是 $(2x-2)^2$， 顯然是想使展開後左右兩端相同的 $4x^2$ 項可以對消， 於是得到 $x=3/13$， 另一數是 $19/13$。

-2 是怎樣來的? [2]不妨先令右端是 $(2x+a)^2=4x^2+4ax+a^2$， 消去 $4x^2$ 後可得 $x=\dfrac{a^2-1}{5-4a}$。 爲了保證 $x>0$， 需使 $a<-1$ 或 $1<a<5/4$， 最簡單的辦法是令 $a=-2$。

原文很簡單， 沒有說明這樣設未知數的理由， 更沒有給出一般的法則。 他雖然知道問題有多個答案， 但常常得到一個答案就已滿足。 他認爲代數方法 (可理解爲一種倒推法， 先假設未知數存在， 列出方程然後求解) 比幾何的演繹陳述更適宜於解決問題。 解題的過程中顯示出高度的巧思和獨創性， 在希臘數學中獨樹一幟。 有的數學史家說 (見 [11]， p.60)， 如果丟番圖的著作不是用希臘文寫的， 人們就不會想到這是希臘人的成果，因爲看不出有古典希臘數學的風格， 從思想方法到整個科目結構都是全新的。 如果沒有丟番圖的工作， 也許人們以爲希臘人完全不懂代數。 有人甚至猜想他是希臘化了的巴比倫人 (見 [13]， p.74)。

代數符號

G.H.F. 內塞爾曼 (Nesselmann， 1811 − 1881) 根據符號使用的情況， 將代數學分爲三類 (見 [12]， p.301 − 306)： (1) 文詞代數 (rhetorische algebra)， 完全用文字來敍述而不用符號； (2) 簡字代數 (synkopierte algebra)； (3) 符號代數 (symbolische algebra)， 除了個別地方， 一切全用符號來表示。 按照這個分類， 丟番圖《 算

[2]這裡是減去 2 的意思， 丟番圖從不單獨使用負數。

術》應該屬於第二類。符號的使用，在數學史上是一件大事。一套優良的符號，絕不僅僅是起到加快速度、節省時間的作用，它能夠準確、深刻地表達某種概念、方法和邏輯關係。一個較複雜的式子，如果不用符號而用日常語言來表述，會十分冗長而含混不清。符號的發明在數學史上是一次飛躍，也是代數的特徵之一，其作用是不容低估的。丟番圖創設了一些符號，多半採自相應文字的字頭，而問題的敍述主要仍然是用文字，和現代的符號代數相去甚遠，只可算是較原始的簡字代數。

他用 $\overset{\circ}{M}$ 表示數的單位，取自 $M\acute{o}\nu\alpha\varsigma$ (單位) 的字頭。未知數定義爲 "未確定單位的數量" 並叫做 '$\alpha\rho\iota\tau\mu\acute{o}\varsigma$ (數)，用特殊的符號來表示它。由於丟番圖本人的原始手稿早已失傳，後人傳抄的手稿上這個符號不很統一，故很難確知他用的是什麼符號。不過幾種手稿都像是 ς，這是希臘字母 σ 放在詞尾的形狀 (見 [8]，p.456)。希臘記數法系統是用字母來表示數字，如 α、β、γ、δ、$\cdots$ 分別表示 1、2、3、4、$\cdots$；ι、κ、λ、μ、$\cdots$ 分別表示 10、20、30、40、$\cdots$；ρ、σ、τ、ν、$\cdots$ 分別表示 100、200、300、400、$\cdots$ 等等，24 個字母都用到了，還外加三個符號，就是 σ 的詞尾形狀 ς 沒有用到，故用它來表示未知數，可以不至和數目字相混，它同時又是'$\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ 的詞尾。值得注意的是，在一份大約寫於二世紀的紙草書上，也出現和丟番圖未知數相類似的符號[3]，上面所列的三個算題，解題方法也具有丟番圖的風格。可以想像，丟番圖的工作不是孤立的，他受到強烈的外來影響。

丟番圖所處理的問題大部分是多元的，但他只設一個未知數的符號，相當於現在的 x，而和 x^2、x^3、$\cdots$、x^6 相當的各次冪，都有專門的名稱和符號：

[3]此紙草被稱之爲 "密歇根紙草 620"，見 F.E. Robbins，"*P. Mich.* 620；*A Series of Arithmetical Problems*"，載 *Classical Philology* (1929)。參見 [10]，p.108。

	名稱	符號
x^2	$\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$(平方)	Δ^{Υ}
x^3	$\kappa\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$(立方)	K^{Υ}
x^4	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$(平方的平方)	$\Delta^{\Upsilon}\Delta$
x^5	$\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$(平方的立方)	ΔK^{Υ}
x^6	$\kappa\upsilon\beta\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$(立方的立方)	$K^{\Upsilon}K$

符號是名稱的縮寫，注意 Δ、Υ、K 是字母 δ、υ、κ 的大寫。這些乘冪的倒數也有專名和符號，六次以上的冪不再創設符號。未知數的係數緊接著寫在未知數後面，沒有加號、乘號和除號，如 $K^{\Upsilon}\overline{\alpha}\Delta^{\Upsilon}\overline{\iota\gamma}\varsigma\epsilon$ 相當於 x^3+13x^2+5x。若有常數項，還加上單位的符號。如 $K^{\Upsilon}\overline{\alpha}\Delta^{\Upsilon}\iota\overline{\gamma}\varsigma\epsilon\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\beta}$ 相當於 x^3+13x^2+5x+2。字母上的短横表示是數字。

丟番圖特別給出了一個減法的符號$\pitchfork$，稱之爲 $\lambda\epsilon\hat{\iota}\psi\iota\varsigma$ (缺乏，不足)，這符號可能是 Ψ 倒過來再變形。與此相對的加法叫做'$\acute{\upsilon}\pi\alpha\rho\xi\iota\varsigma$ (存在，出現)。他正確地指出帶有加法與減法的項 (即正、負項) 相乘的法則："'缺乏' 乘以 '缺乏' 得到 '存在'；'缺乏' 乘以 '存在' 得到 '缺乏'"，即負乘負得正，負乘正得負 (見 [8]，p.460)。

由於沒有加號，書寫時所有的負項都放在減號的後面，如 x^3-5x^2+8x-1 寫成

$$K^{\Upsilon}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\eta}\pitchfork\Delta^{\Upsilon}\epsilon\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\alpha}$$

分式也有特別的寫法，先寫分子，再寫'$\varepsilon\nu\ \mu o\rho\acute{\iota}\omega$ 或 $\mu o\rho\acute{\iota}o\upsilon$ (原意是 "屬於部分"，相當於 "除以" 或分數線/)，接著寫分母。例如卷 10 (原希臘文本卷 6) 第 19 題，將

$$(2x^3+3x^2+x)/(x^2+2x+1)$$

寫成

$$K^{\Upsilon}\overline{\beta}\Delta^{\Upsilon}\overline{\gamma}\varsigma\overline{\alpha}\acute{\varepsilon}\nu\mu o\rho\acute{\iota}\omega\Delta^{\Upsilon}\overline{\alpha}\varsigma\overline{\beta}\ \overset{\circ}{M}\ \overline{\alpha}$$

等號 $\ddot{\iota}\sigma.$ 是 $\ddot{\iota}\sigma o\varsigma$ (相等) 的縮寫， 如卷 10 第 8 題 $630x^2+73x=6$ 寫成

$$\Delta^{\Upsilon}\overline{\chi\lambda}\varsigma\overline{o\gamma}\ddot{\iota}\sigma.\ \overset{\circ}{M}\ \varsigma$$

這已非常接近現代方程的形式。 最後一個符號ς 表示數字 6， 是希臘字母表以外的記號， 讀作 digamma (見 [14]， p.261)。

丟番圖創用符號是一大進步， 美中不足的是只用符號表示一個未知數， 遇到多個未知數時仍用同一符號， 這使得計算過程越來越晦澀。 爲了避免混淆， 不得不運用高度的技巧， 但這常常使方法失去普遍性。 八、 九世紀以後， 阿拉伯人吸取了許多希臘人的成果， 然而卻沒有看到符號的優點， 花拉子米等人完全回到文詞代數上去， 這是歷史上的倒退。

《 算術 》的典型問題和解答

(一) 一、 二、 三次方程

《 算術 》沒有系統地給出一、 二次方程的解法。 大概是一元一次方程太簡單， 沒有必要單獨論述， 實際它已包含在 $ax^n=b$ 類型的方程之中。 經過移項、 消去等手續， 有些問題化爲這類方程之後， 立即得到解答。 不管答案有幾個， 丟番圖僅滿足於一個答案。 他完全排斥負數解答， 例如卷 9 (原希臘文本卷 5) 第 2 題最後化爲 $4=4x+20$， 他認爲是荒謬的。 無理數的解答也不取， 如卷 7 第 31 題， 最後得 $3x+18=5x^2$， 他說這方程是不合理的， 還反過來考慮怎樣改變係數， 才使得答案 “合理”(即爲有理數)。 對於答案 $x=0$ 也是棄之而不顧。

關於二次方程， 丟番圖在序言中說過要給出完整的解法， 但在現存的各章中均未見到， 很可能恰好寫在失傳的部分或別的什麼地方。 另一種意見認爲二次方程的解法早已爲巴比倫人所知， 可以作爲閱讀本書的預備知識， 不必另作介紹 ([6]， p.76)。

不管怎樣，書中確實出現了若干二次方程或可歸結爲二次方程的問題，希思就列舉了十幾個例子，其中包括二次不等式 (見 [8]，p.464)。這些例子足以說明丟番圖熟練掌握了二次方程的求根公式。當然仍然是限於正有理根。有的學者認爲他不知道二次方程可能有兩個根 (見 [11]，p.61)，這是很難令人相信的。不過他始終只取一個根，如果有兩個正根，他就取較大的一個。

較簡單的例子如第 1 卷 27 題：兩數之和是 20，積是 96，求這兩數。解法是：設兩數分別是 $10+x$、$10-x$，於是 $(10+x)(10-x)=10^2-x^2=96$、$x^2=4$、$x=2$，兩數是 12、8。

卷 1 第 28 題：兩數之和是 20，平方和是 208，求這兩數。同樣設兩數是 $10+x$、$10-x$，則 $(10+x)^2+(10-x)^2=208$、$x=2$，兩數是 12、8。

較複雜的含一次項的例子如第 8 卷 31 題，最後得到 $325x^2=3x+18$；應有兩根 $x=6/25$、$-3/13$，只取正根，負根不提。

更複雜一點的例子是卷 9 第 10 題 (見 [8]，p.464)，導致不等式

$$17x^2+17<72x<19x^2+19，$$

相當於不等式組

$$\begin{cases} 17x^2-72x+17<0 \\ 19x^2-72x+19>0 \end{cases}$$

正確的答案應該是

$$\beta_1<x<\beta_2、\alpha_2<x<\alpha_1，$$

其中

$$\alpha_1=\frac{36+\sqrt{1007}}{17}=3.98430\cdots$$

$$\beta_1=\frac{36-\sqrt{1007}}{17}=0.25098\cdots$$

是方程 $17x^2-72x+17=0$ 的兩個根；

$$\alpha_2=\frac{36+\sqrt{935}}{19}=3.50409\cdots$$
$$\beta_2=\frac{36-\sqrt{935}}{19}=0.28538\cdots$$

是方程 $19x^2-72x+19=0$ 的兩個根。

遇到兩個正根的時候，丟番圖只取較大的，故只取 $\alpha_2<x<\alpha_1$，對於無理數，則取近似值。但要保證 x 落在區間 $(\alpha_2$、$\alpha_1)$ 內，α_2 只能取過剩近似，而 α_1 只能取不足的。丟番圖將

$$\alpha_2=\frac{66.577\cdots}{19} \text{ 及 } \alpha_1=\frac{67.733\cdots}{17}$$

分子的小數部分略去，均取不足近似值，給出答案

$$\frac{66}{19}\leq x\leq\frac{67}{17}\text{。}$$

這就出現差錯，例如 $66/19<7/2$，但將 $7/2$ 代入不等式組第二個就不適合。在這裡可以看到丟番圖的局限性。用現代的理論，要找出較好的答案是不難的，例如可取

$$\frac{424}{121}\leq x\leq\frac{761}{191} \text{ 或 } \frac{855}{244}\leq x\leq\frac{3299}{828} \text{ 等。}$$

全書唯一的一個三次方程，出現在卷 10 (原希臘文本卷 6) 第 17 題：

求直角三角形的三邊，已知它的面積加上斜邊是一個平方數，而周長是一立方數。

這相當於

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ \dfrac{1}{2}ab+c=M^2 \\ a+b+c=N^3 \end{cases}$$

其中 a、b、c 是三邊。

原書解法 (見 [7]，p.538) 是令面積 $ab/2 = x$，即 $ab = 2x$，可設 $a = 2$、$b = x$，而 $c = M^2 - x$，暫設爲 $16 - x$，於是周長 $a + b + c = 16 - x + 2 + x = 18$，但 18 不是立方數。仍假設它是一個平方數加 2，現改變這個平方數，使它加 2 後成爲立方數。即找兩個數 M、N，滿足 $M^2 + 2 = N^3$。現設[5] $M = m + 1$、$N = m - 1$，代入得

$$m^2 + 2m + 3 = m^3 - 3m^2 + 3m - 1$$

於是有 $m = 4$。

他顯然省略了下面的步驟，合併同類項，得

$$4m^2 + 4 = m^3 + m$$

約去因子 $m^2 + 1$。

由此知 $M^2 = 25$、$N = 27$。仍設面積爲 x，而將斜邊改爲 $25 - x$、$a = 2$、$b = x$，根據勾股定理

$$x^2 - 50x + 625 = x^2 + 4$$

即得

$$x = \frac{621}{50}\text{。}$$

在《算術》遺失的章節中是否還有三次方程的專門論述，不得而知。

(二) 不定方程

例 1. 卷 2 第 8 題：將一個已知的平方數分爲兩個平方數。例如將 16 分成兩個平方數。

設一個平方數是 x^2，那麼另一個是 $16 - x^2$，現要求 $16 - x^2$ 是一個平方數。即

$$16 - x^2 = M^2$$

[5]他沒有說明爲什麼這樣設。可以這樣推想在式子 $M^2 + 2 = N^3$ 中，左端是平方，右端是立方，M 應該大於 N，兩數一大一小，通常設爲 $m + \alpha$、$m - \alpha$，不妨令 $\alpha = 1$ 試一試，如不成功再改變 α 的值。

不妨設 $M = mx - 4$，其中 m 是某一整數，而 4 是 16 的平方根。例如令 $m = 2$，於是

$$16 - x^2 = 4x^2 - 16x + 16,$$

立刻得到

$$x = \frac{16}{5}\text{。}$$

前面已經提到，費馬對這一命題很感興趣，在旁邊的空白處寫下著名的 “費馬大定理”。

例 2. 卷 4 (阿拉伯文本) 第 3 題：求兩個平方數，使其和是一個立方數 (見 [6]，p.89、286)。

設較小的平方數是 x^2，較大的平方數是 $4x^2$，其和 $5x^2$ 必須是立方數 M^3，不妨設 M 是 x 的某一倍數，比方說就設它是 x，於是 $5x^2 = x^3$、$x = 5$。所求的兩個平方數是 25 和 100，其和等於 $5^3 = 125$。

丟番圖照例不說明所作假設的理由，更不給出一般解答，既然是不定方程，找到一個答案就算完結。本例實際上可作更一般的假設。設兩個平方數是 x^2、m^2x^2、$x^2 + m^2x^2 = (nx)^3$，於是得 $x = (m^2 + 1)/n^3$。令 $n = 1$、$m = 2$ 就得到上面的答案。

給出一般的解，是極個別的情形。如第 8 卷 39 題，由方程 $3x^2 + 12x + 9 = (3 - nx)^2$ 得出 $x = \dfrac{12 + 6n}{n^2 - 3}$，這是有文字來描述的：$x$ 的值是數的 6 倍增加 12，除以數的平方與 3 的差。

例 3. 高階不定方程。卷 8 第 18 題：求兩數，使得第一數的立方加上第二數是一個立方數，而第二數的平方加第一數是一個平方數。相當於聯立不定方程

$$\begin{cases} a^3 + b = M^3\text{，} \\ b^2 + a = N^2\text{。} \end{cases}$$

設第一數是 x，則第二數是一個立數 M^3 減去 x^3，暫設這個立方數是 8，第二數是 $8 - x^3$，它的平方加上第一數是

$$64 - 16x^3 + x^6 + x = N^2 \text{。}$$

可設 N 是三次式 $x^3 + 8$，因爲展開後即將 x^6 及常數 64 消去。合併同類項後得 $x = 32x^3$，約去 x 得 $x^2 = 1/32$。這不是一個平方數 (平方根不是有理的)，問題仍未得到解決。

觀察 32 的來源，它是 $2 \cdot 2 \cdot 8$ 的結果，而 8 是開頭暫設的立方數 M^3，設法改變 M 的值，使 $4M^3 =$ 平方數，不妨就令這平方數是 $16M^2$，於是 $4M^3 = 16M^2$，$M = 4$。

仍設第一數爲 x，重新設第二數爲 $64 - x^3$，它的平方加上第一數

$$4096 - 128x^3 + x^6 + x = (x^3 + 64)^2 \text{，}$$

展開後化簡，$1 = 256x^2$，即可得知第一數是 $x = 1/16$、第二數是 262143/4096。

丟番圖的方法

現存的《算術》以問題集的形式收錄了 290 個題目，其中希臘文本 189 個，阿拉伯文本 101 個，此外還有十幾個引理和推論，合起來共三百多個問題。大體上按由易到難排列，但很難看得出是用什麼標準來分類的。解題的方法更是五花八門，沒有一定的法則。數學史家 H. 漢克爾 (Hankel，1839 − 1873) 說："近代數學家研究了丟番圖的 100 個題後，去解 101 個題，仍然感到困難。$\cdots$ 丟番圖使人眼花繚亂甚於使人欣喜" (見 [15]，p.165；[16]，p.36)。這話稍嫌誇張，卻抓住了問題的要害。丟番圖沒有著力去探求一般性的解法，或去深究豐富多采的解法之間的內存聯繫，這是《算術》的最大缺點。

有兩件事自始至終妨礙他取得普遍性的方法。首先，他只用一個符號表示未知數，遇到多個未知數時，不得不用 "第一個、第二個、第三個、$\cdots\cdots$" 或 "大的、中的、小的 $\cdots$" 等詞句去表

達。 在多數的情況下令那些未知數取得具體的數值， 於是使問題特殊化而得不到普遍的解答。 其次， 沒有創用符號去表示數 (如現在的 n、 a、 b、 c、 $\cdots$ 一樣)， 因此所有的解法都是針對具體數字而設的， 對一般的數就不一定適合， 這樣當然得不到一般的解法。

儘管如此， 後人仍然從中摸索出若干常用的方法， 下面僅舉幾個簡單的例， 以見一斑。

(1) 利用一些恆等式， 如

$$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn\text{，}$$

可命名兩數的積與和、 差互化。 如卷 2 第 11 題： 求一數， 使其加上 2 是一平方數， 加上 3 也是平方數。 即

$$\begin{cases} x+3=M^2 \\ x+2=N^2 \end{cases}$$

兩式相減得 $M^2-N^2=1$， 因 $4\cdot 1/4=1$， 以 $m=4$、 $n=1/4$ 代入上面恆等式， 有 $(17/8)^2-(15/8)^2=1$， 令 $M=17/8$、 $N=15/8$， 即得 $x=97/64$。

(2) 兩數和爲已知數 M， 或兩數一大一小， 通常設這兩數是 $M+x$， $M-x$， 然後使其滿足其它條件。 如前面舉過的卷 1 第 28 題。

(3)《 算術 》除卷 1 外， 其餘的幾乎全是不定方程， 特別是牽涉到平方數、 立方數。 常出現一個或多個這種類型的方程：

$$Ax^2+Bx+C=M^2\text{。}$$

可設 M 是 x 一次式， 適當選擇係數使展開後可消去二次項或常數項。

(4) 使問題特殊化。 爲了減少未知數的個數， 先令某些未知數取滿足一定條件的具體數值， 以後不合適時再改變原先的假設。

(5) 近似法。 令未知數取某種類型的數值， 且滿足一定條件， 這樣先求出近似答案， 並在計算過程中發現求得正確答案的途徑。

以卷 9 第 9 題爲例： 將 1 分爲兩部分， 使一個已知數加上任何一部分都是平方數。

設這個已知數是 6， 問題便轉化爲將 13 分爲兩個平方數， 使每一個平方數都大於 6， 即 $13 = M^2 + N^2$、 $M^2 > 6$、 $N^2 > 6$。

暫設 $M^2 = 6\frac{1}{2} + (\frac{1}{2x})^2$， 乘上 $4x^2$ 後應仍爲平方數， 即 $26x^2 + 1 =$ 平方數 $= (5x+1)^2$。 於是得 $x = 10$， 即 $6\frac{1}{2}$ 加上 $(\frac{1}{20})^2 = \frac{1}{400}$ 是平方數， $6\frac{1}{2} + \frac{1}{400} = (\frac{51}{20})^2$， 但 13 減去 $(\frac{51}{20})^2$ 卻不是平方數， 因此 $(\frac{1}{20})^2$ 還不是所求的答案， 應稍加改變。 由觀察知 $3^2 + 2^2 = 13$， 而 $\frac{51}{20} = 3 - \frac{9}{20} = 2 + \frac{11}{20}$， 現將 $\frac{1}{20}$ 改爲 x， 令

$$(3-9x)^2 + (2+11x)^2 = 13,$$

這樣得到 $x = \frac{5}{101}$， 所求的兩個數是 $\frac{5358}{10201}$、 $\frac{4843}{10201}$， 每一個加上 6 都是平方數。

丟番圖沒有進一步推廣， 實際上， 如設

$$(3-mx)^2 + (2+nx)^2 = 13,$$

可得 $x = \frac{6m-4n}{m^2+n^2}$， 但要 $(3-mx)^2 > 6$、 $(2+nx)^2 > 6$， 只

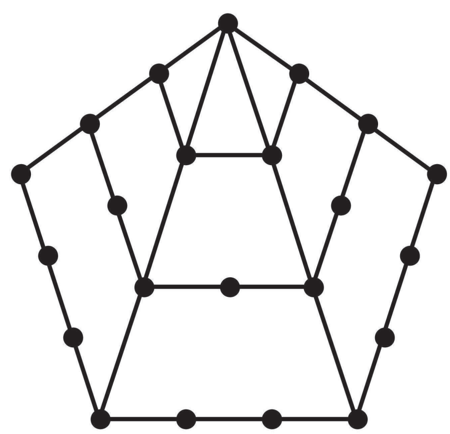
須選擇 m、n，使滿足

$$\frac{\sqrt{6}-2}{n} < x = \frac{6m-4n}{m^2+n^2} < \frac{3-\sqrt{6}}{m},$$

即可得到答案。比方，令 $m = 11$、$n = 13$，得到 $\frac{2014}{21025}$、$\frac{19011}{21025}$，兩數和是 1，每一個加上 6 都是平方數。如果令 $m = 13$、$n = 16$，則得另一組答案 $\frac{110899}{180625}$、$\frac{69726}{180625}$。

其它著作

丟番圖的《多角數》只殘存一部分，它證明的方式純粹是幾何的，倒很接近古典希臘的風格，而和《算術》迥然不同。多角數 (polygonal number) 是形數 (figurate number) 的一種。用黑點表示數，可以構成各種平面或立體圖形，這個數叫做形數。如六個點構成一個三角形 ∴，6 就是三角數，同樣，1、5、12、22、35、$\cdots$ 都是五角數，如 22 個點構成一個正五角形，它



的邊是 4 (每邊有四個點，用 n 表示這個數)，角數是 5 (用 a 表

示)。n、a 與總的點數 P 之間有公式聯繫起來

$$P=\frac{[(a-2)(2n-1)+2]^2-(a-4)^2}{8(a-2)}\text{。}$$

多角數是一個古老的課題，源出於畢達哥斯，後經菲利波斯 (Philippos，公元前 360 年前後)、斯標西波 (Speusippus，公元前 340 年前後) 等人研究。上述公式是許普西克勒斯 (公元前 175 年前後) 給出的，丟番圖在《多角數》中加以引用並推廣，還建立了其它的公式。

另一本著作《推論集》載有若干數論的引理及推論，可以看作《算術》的一部分或補充。

來源及影響

從古代埃及、巴比倫的衰亡，到希臘文化的昌盛，這過渡時期沒有留下什麼數學典籍，所以現在的了解是不夠的。巴比倫人在代數方面 (如二次方程、不定方程) 有很高的成就，丟番圖的技巧和他們頗有相似之處。例如 S. 甘茲 (Gandz) 指出，《算術》卷 2 第 10 題 (將已知數分為二個平方數之差) 已在巴比倫的泥板上見到 (見 [17]，p.13 − 14)。丟番圖常滿足於問題的解決 (得到一個解) 而不去追求方程的全部解，《算術》與其說是代數教科書，不如說是一本問題集，這些地方都和巴比倫數學相仿。他的工作有時被說成是 “盛開的巴比倫代數的花朵”(見 [18]，p.203)。

不管丟番圖受到巴比倫人的多少影響，畢竟大大超越了前人，在數論和代數領域作出了傑出的貢獻，開闢了廣闊的研究道路。如系統地使用了符號，深入討論了抽象的數而不是埃及、巴比倫數學中具體的麥粒數目、田畝的面積或貨幣的單位。這是人類思想上一次不尋常的飛躍，不過這種飛躍在早期希臘數學中已出現。巴比倫人曾致力於將三次方程化為 $n^3+n^2=a$ 的形式，以便

藉助數表去求近似解，而丟番圖的興趣是求精確的有理數解。在多方面顯示出驚人的睿智和獨創性。

八、九世紀以後，丟番圖的著作傳到阿拉伯國家，產生巨大的影響，出現多種翻譯和註釋本。如凱拉吉 (al-Karajī 或 al-Karkhī，活動於 1020 前後) 的代數著作《發赫里》(al-Fakhrī) 就直接引用《算術》前三卷的若干題目。在歐洲，L. 斐波那契 (Fibonacci，約 1170－約 1250，義大利人) 所著的《算盤書》(*Liber abaci*，1202) 最早載有丟番圖類型的問題，他顯然是通過阿拉伯文本去熟悉丟番圖的。近代數學家如費馬、F. 韋達 (Viète)、歐拉、高斯等也都受到丟番圖的許多啓發，各自取得巨大的成就。總而言之，丟番圖的《算術》雖然有許多不足之處，但瑕不掩瑜，它仍不失爲一部承前啓後的劃時代著作。

文　　獻

原始文獻

[1] P. Tannery, *Diophanti Alexandrini opera omnia cum Graecis commentariis*, 2 vols, Leipzig, 1893－1895。

[2] C.G. Bachet de Méziriac, *Diophanti Alexandrini arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus*, Paris, 1621。

[3] T.L. Heath, *Diophantus of Alexandria：a study in the history of Greek algeba*, Cambridge, 1885。

[4] O. Schultz, *Diophantus von Alexandia arithmetische Aufgaben nebst dessen Schrift über die Polygon–Zahlen*, Berlin, 1822。

[5] P. Ver Eecke, *Diophante d'Alexandrie*, Paris, 1959。

研究文獻

[6] J. Sesiano, *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic translation attributed to Qustā ibn Lūqā*, Springer-Verlag, 1982。

[7] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957。

[8] T.L. Heath, *A history of Greek mathemaics*, Oxford at the Clarendon Press, II, 1921。

[9] D.M. Burton, *The history of mathematics*, Allyn and Bacon, Inc., 1985。

[10] B.L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in ancient civilizations*, Springer-Verlag, 1983。

[11] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[12] G.H.F. Nesselmann, *die algebra der Griechen*, Berlin, 1842。

[13] D.J. Struik, *A concise history of mathematics*, Dover Publications, Inc., 1948 (中譯本： D.J. 斯特洛伊克， 數學簡史， 科學出版社， 1956)。

[14] G. Ifrah, *From one to zero, a universal history of numbers*, Lowell Bair 英譯, Viking Penguin Inc., 1985。

[15] H. Hanket, *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelater*, Leipzig, 1874。

[16] F. Cajori, *A history of elementary mathematics*, 1916。

[17] S. Gandz, *Studies in Babylonian mathematics I, Indeterminate analysis in Babylonian mathematics*, Osiris, **8** (1948), 13－40。

[18] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985。