劉　徽

劉徽　中國山東人。約生於公元 220 年，爲東漢三國時代。約卒於公元 280 年。數學。

劉徽之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Liu_Hui.html

劉　徽

郭 書 春

(中國科學院自然科學史研究所)

劉徽　中國山東人。約生於公元 220 年，爲東漢三國時代。約卒於公元 280 年。數學。

劉徽自述 “徽幼習《九章》，長再詳覽，觀陰陽之割裂，總算術之根源。探賾之暇，遂悟其意。是以聚竭頑魯，採其所見，爲之作註”。《晉書》、《隨書》之《律曆誌》稱 “魏陳留王景元四年 (公元 263 年) 劉徽註《九章》”。《九章算術註》原十卷。他自撰自註的第十卷 “重差” 自南北朝後期以《海島算經》爲名單行。前九卷仍與《九章算術》合爲一體行世。唐初李淳風奉敕編纂《算經十書》、《九章算術》和《海島算經》列爲其中兩部。《九章算術註》之圖及《海島算經》之自註和圖今已不傳。

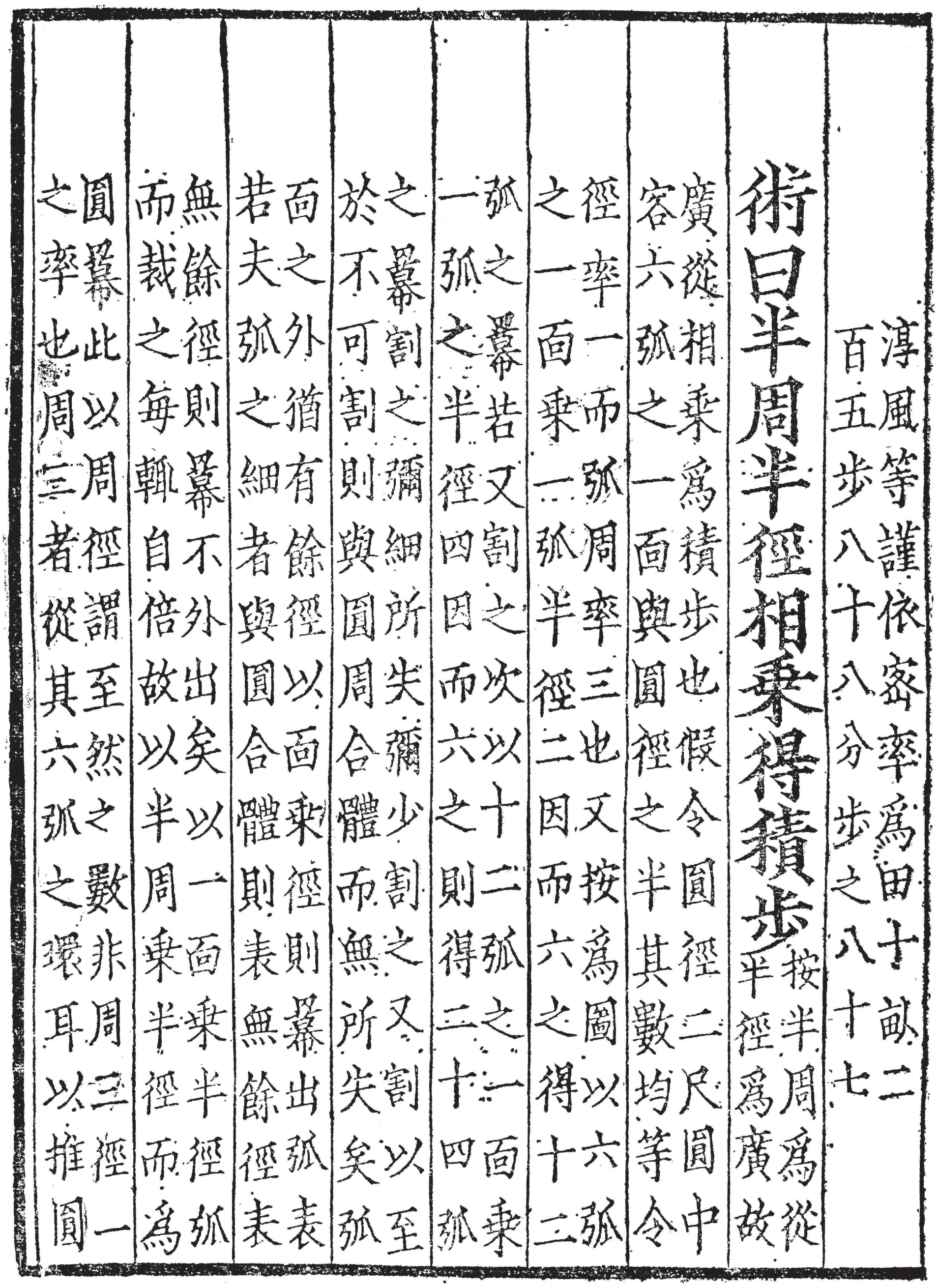
《九章算術》

——劉徽繼承的數學遺產

劉徽從事數學研究時，繼承了一份以《九章算術》爲主體的堪稱豐厚而又有嚴重缺陷的數學遺產，其基本情況是：

世界上最方便最先進的十進位置值制記數法和計算工具算籌在中國首創並已使用至少千年。算籌的截面已由圓變方，長度已由西漢的 13 釐米左右縮短爲 8 — 9 釐米。

《九章算術》於公元前一世紀成書，至此時已 300 餘年。光和大司農斛、權 (179 年) “依黃鐘律曆、《九章算術》” 製造，說明它至晚在東漢已成爲官方認定的經典著作。《九章算術》包括



淳風等謹依密率爲田十畝二百五步八十八分步之八十七

術曰半周半徑相乘得積步按半周爲從半徑爲廣故廣從相乘爲積步也假令圓徑二尺圓中容六弧之一面與圓徑之半其數均等令徑率一而弧周率三也又按爲圖以六弧之一面乘一弧半徑三之得十二弧之冪若又割之次以十二弧之一面乘一弧之半徑四因而六之則得二十四弧之冪割之彌細所失彌少割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失矣弧面之外猶有餘徑以面乘徑則冪出弧表若夫弧之細者與圓合體則表無餘徑表無餘徑則冪不外出矣以一面乘半徑弧而裁之每輒自倍故以半周乘半徑而爲圓冪此以周徑謂至然之數非周三徑一之率也周三者從其六弧之環耳以推圓

圖 1.《 九章算術 》圓田術及劉徽註書影
(南宋本， 現藏上海圖書館)

方田 、 粟米 、 衰分 、 少廣 、 商功 、 均輸 、 盈不足 、 方程 、 勾股九章， 奠定了中國古算的基本框架； 提出了上百個公式 、 解法， 有完整的分數四則運算法則， 比例和比例分配算法， 若干面積 、 體積公式， 開平方 、 開立方程序， 盈不足算法， 方程術即線性方程組解法， 正負數加減法則， 解勾股形公式和簡單的測望問題算法， 其中許多成就在世界上處於領先地位， 形成了中國古算以計算爲中心的特點； 含有 246 個應用題， 體現了中國古算密切聯繫實際的風格； 在編排上， 《 九章算術 》或者先提出術

文，後列出幾個例題，或者先列出一個或幾個例題，後提出術文，確立了中國古算以術文 (公式、解法) 挈領應用問題的基本形式。公元元年前後，盛極一時的古希臘數學走向衰微，《九章算術》成書標誌著世界數學研究重心從地中海沿岸轉到了中國，開創了東方以算法爲中心的數學佔據世界數學舞台主導地位千餘年的局面。

然而，《九章算術》也有不容忽視的缺點：對所有概念沒有定義；對所有術文沒作任何推導；各章的編排或者按應用，或者按方法，或者兩者混雜，不盡合理。東漢以後的許多學者如馬續、張衡、鄭玄、劉洪、徐岳、闞澤等都研究過《九章算術》，這些研究無疑成爲劉徽 “採其所見” 的資料，然好像仍停留在以某種方式驗證的階段，對《九章算術》的許多關鍵性公式、解法並未嚴格證明，對其中某些不精確或失誤處，並未指出，理論建樹不大。其具體情況在論述劉徽的貢獻時會提到。

面對這樣的數學遺產，劉徽的功績不言而喻主要體現在數學證明和數學理論上。

率 —— 計算的綱紀

《九章算術》上百個公式、解法，每個都是一種算法，除個別失誤外，都具有完全確定性、普適性和有效性等現代計算理論對算法的要求。劉徽《九章算術註》的主要篇幅是通過 “析理以辭、解體用圖” 對其算法的正確性進行證明，對諸算法間的內部聯繫及其應用進行論述。

爲了用計算解決一個問題，關鍵是要根據問題的條件找到一種量作標準，進而找到諸量之間的關係。中國古代數學概念 “率” 承擔了這個職責。“率” 的本意是規格、標準、法度。《孟子 • 盡心上》：“羿不爲拙射變其彀率。”《墨子 • 備城門》：“城下樓

率，率一步一人，二十步二十人，城大小以此率之。” 反映了“率” 逐步轉化成一個數學概念的過程。《九章算術》的許多術文和問題題設應用了率，提出了 “今有術” 和勾股數通解公式等重要成就，然有的應用卻偏離了約定俗成的內涵。劉徽則大大發展了率的思想，從而把《九章算術》的算法提高到系統理論的高度。

劉徽關於 “率” 的定義是：“凡數相與者謂之率。” “相與” 即相關，這裡是一種線性相關。“數” 實際上是一組量。現今的比率是最直觀且應用最廣泛的一種率關係，但是，率的涵義卻較比率要深刻、廣泛得多。由率的定義，劉徽得出率的重要性質：“凡所得率知，細則俱細，粗則俱粗，兩數相抱而已。”[1] 即一組成率的數，在投入運算時，其中一個縮小或擴大某倍數，則其餘的數必須同時縮小或擴大同一倍數。根據率的這一性質，劉徽提出了乘、約、齊同三種等量變換。它們最初都是從分數運算中抽象出來的。事實上，分數的分子和分母可以看成率關係。劉徽關於 “率” 的定義就是在 “經分術” (即分數除法) 註中提出來的。那麼，關於分數運算的三種等量變換自然推廣到率的運算中。成率關係的一組量如有等數[2] (即公因子)，則可用此等數約所有的量 (稱爲 “偏約”)，而不改變率關係，這就是 “約以聚之”。相反，成率關係的所有數可以同乘某一數，亦不改變率關係，這就是 “乘以散之”。利用這兩種等量變換可以把成率關係的任意一組數 (在現今實數範圍內) 化成沒有公因子的一組數，而不改變率關係，從而提出了 “相與率” 的概念：“等除法、實，相與率也。” 兩個量的相與率實際上是今天互質的兩個數。在運算時，劉徽一般使用相與率。幾個分數只有化成同一分數單位才能進行加減，從而產生了齊同術：“凡母互乘子謂之齊，群母相乘謂之同。同者，相與通同共一母也；齊者，子與母齊，勢不可失本數也”。而對比較複

[1]此是南宋鮑刻本原文，不誤。“知” 訓 “者”，大典本作 “如”，與下聯讀亦通。戴震在孔刻本中改 “得” 作 “謂”，“知” 作 “者”，“抱” 作 “推”，其後諸本因襲，不妥。

[2]《九章算術》提出了求等數的方法：“副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。” 它與歐幾里得輾轉相除法異曲同工。

雜的問題， 常常有相關的分別成率關係的兩組或幾組量， 要通過齊同化成同一率關係， 這就是 “齊同以通之”。 齊同原理成爲率的一種重要運算。 劉徽說：

> 乘以散之， 約以聚之， 齊同以通之， 此其算子綱紀乎?

顯然， 劉徽把率看成運算的綱紀。

“今有術” 在《 九章算術 》算法中起著基礎性作用。

> 今有術曰： 以所有數乘所求率爲實， 以所有率爲法， 實如法而一。

這就是說， 若 $A:B=a:b$， 則 $B=Ab/a$。 劉徽稱之爲 “都術” 即普遍方法。 它傳到印度和西方後被稱爲三率法。 劉徽認爲：

> 誠能分詭數之紛雜， 通彼此之否塞， 因物成率， 審辨名分， 平其偏頗， 齊其參差， 則終無不歸於此術也。

這裡前三句是說設法找出各種率關係， 而 “平其偏頗， 齊其參差” 就是齊同術。 對複雜的計算問題， 一般說來必須通過齊同才能使用今有術或其它運算。 劉徽說： “齊同之術要矣。 錯綜度數， 動之斯諧。 其猶佩觿解結， 無往而不理焉”。 下面簡要介紹劉徽關於率及齊同的應用。

算術問題中的應用。 “諸率悉通”。 若甲 、 乙之率爲 a 、 b， 乙 、 丙之率爲 c 、 d， $b\neq c$， 欲從甲求丙。 《 九章算術 》兩次應用今有術， 先從甲求乙， 接著再從乙求丙， 劉徽稱之爲 “重今有術”。 劉徽認爲， 還可以應用齊同原理， 先同兩率關係中乙的率， 化爲 bc， 後使甲 、 丙的率與之相齊， 分別化爲 ac 、 bd， 三率悉通， 直接用今有術由甲求丙。 劉徽指出： “凡率錯互不通者， 皆積齊同用之。 放此， 雖四 、 五轉不異也。” 顯然， 劉徽的方法比《 九章算術 》簡便。

“齊同有二術， 可隨率宜也。” 同一問題， 常有不同的途徑實現齊同， 可以靈活運用。 劉徽認爲《 九章算術 》卷六第 20 —— 26 問儘管對象不同， 其數學方法都與鳧雁問同類。 鳧雁問是：

今有凫起南海，七日至北海，雁起北海，九日至南海。今凫雁俱起，問何日相逢？

術曰：併日數爲法，日數相乘爲實，實如法得一日。

劉徽提出兩種齊同方式：一是“齊其至，同其日”，“併齊以除同，即得相逢日。”此問 63 日凫 9 至，雁 7 至，故相逢日爲 63/(9+7)。二是定距離爲 1，求出凫雁一日所行，“齊而同之”，“併凫雁一日所行，以除南北相去，而當相逢日也。”凫一日行 1/7，雁一日行 1/9，則得 $1/(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}) = 1/(\frac{9}{63}+\frac{7}{63}) = 63/(9+7)$。兩種方式，殊途同歸，都證明了《九章算術》術文的正確性。

盈不足術中“齊其假令，同其盈朒 (ㄋㄩˋ)”。盈不足術是中國古算的傳統問題，在《九章算術》中單列一章，佔有重要地位。即使一般算術問題，通過兩次假設，均可化爲盈不足問題求解 (在非線性情況下只得近似解)，因此傳入歐洲後稱之爲雙設法。《九章算術》給出了盈不足問題的一般解法：

置所出率，盈不足各居其下。令維乘所出率，併，以爲實。並盈不足爲法。實如法而一。

劉徽認爲“盈朒維乘兩設者，欲爲齊同之意”，即“齊其假令，同其盈朒。”朒，即爲不足。若假令 a_1，盈 b_1，假令 a_2，不足 b_2。同其盈朒爲 b_1b_2，使假令與之相齊，則分別爲 a_1b_2 以及 a_2b_1，那麼 b_1+b_2 次假令，共出 $a_1b_2+a_2b_1$ 而不盈不朒，所以每次假令爲 $(a_1b_2+a_2b_1)/(b_1+b_2)$ 即爲不盈不朒之正數。

代數問題中的應用。方程術即線性方程組解法是《九章算術》最值得稱道的成就。劉徽把率及其齊同原理拓展到方程術中。首先，他藉助率提出了方程的定義：

群物總雜，各列有數，總言其實。令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之，並列爲行，故謂之

方程。

“令每行爲率”大體相當於現今行向量的概念。用率定義方程，因此對方程各行施行“乘以散之，約以聚之，齊同以通之”。同時，他提出：“舉率以相減，不害餘數之課也。”即方程的整行與其它行相減，不影響方程的解。劉徽把它當作不必加以證明的眞理，成爲方程消元的理論基礎。

《九章算術》採用直除消元法，即以一行某項係數乘另一行，然後以該行多次相減那一行，直至該項係數爲 0。劉徽指出：方程的直除消元法符合齊同原理。他說：“先令右行上禾乘中行，爲齊同之意。爲齊同者謂中行直減右行也。從簡易雖不言齊同，以齊同之意觀之，其義然矣。”這裡“同”是使兩行欲消元的係數相同 (通過直除作到)，“齊”是使一行中其餘各項係數及常數項與該項係數相齊 (通過遍乘實現)。齊同既達到了消元的目的，又保證了“舉率以相減”，故其變換不影響方程的解。在深刻理解方程消元符合齊同原理的基礎上，劉徽創造了互乘相消法以代替《九章算術》的直除法。他在“牛羊直金”問註說：“假令爲同齊，頭位爲牛，當相乘，右行定：更置[3]牛十、羊四、直金二十兩；左行：牛十、羊二十五、直金四十兩。”牛數相同，可以一次相減消去。劉徽說：“以小推大，雖四、五行不異也。”劉徽通過互乘，同時作到齊同，比直除法簡便得多。

劉徽還創造了“方程新術”，他通過諸行相減求出諸元的兩兩相當之率，施行齊同，對易其數，得出諸元的相與之率，然後用衰分術或直接用今有術求解。

上述這些原理和方法中在負係數方程中同樣適用。劉徽說：“赤黑相雜足以定上下之程，減益雖殊足以通左右之數，差實雖分足以應同異之率。然則其正無入負之，負無入正之，其率不妄也。”此處“赤黑”即正負數。《九章算術》在方程直除消元過程

[3]此係大典本、楊輝本原文，不誤。戴震“乘”下補“左”字，“置”下補“右行”，其後諸本因襲，無必要。

中提出了正負術：

> 正負術曰：同名相除，異名相益，正無入[4]負之，負無入正之。其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。

這是世界數學史上第一次引入正負數概念及其加法法則。前四句講正負數減法，設 $a \geq 0$、$b > 0$，即 $(+a) - (\pm b) = a \mp b$、$(-a) - (\mp b) = -(a \mp b)$；後四句講正負數加法，同樣設 $a \geq 0$、$b > 0$，即 $(+a) + (\mp b) = a \mp b$、$(-a) + (\pm b) = -(a \mp b)$。劉徽解釋了這些法則的正確性，並且認爲用正負數足可以列出任何一個方程，而通過正負數的加減運算 (實際上把率和齊同原理推廣到負係數方程中) 足可以對任何一個方程消元。

五家共井問六個未知數，方程只有五行。《九章算術》由於沒有方程的定義，實際上把它的一組最小正整數解作爲定解，而不知有無數組解。劉徽指出，《九章算術》的解是“舉率以言之”，實際上承認它是不定問題，這是中國古算中第一次明確提出不定方程問題。

幾何問題中的應用。劉徽把率廣泛應用於面積、體積和勾股等幾何問題的計算中。劉徽指出《九章算術》圓面積公式中周、徑爲“至然之數”，求出周徑相與之率即 π 的近似值；塹堵中“陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也”，這兩個重要問題，下面要專門分析。這裡介紹一下率在勾股、測望問題中的應用。

《九章算術》以率的形式表示出勾股形三邊的關係：

$$a : b : c = \frac{1}{2}(m^2 - n^2) : mn : \frac{1}{2}(m^2 + n^2)\text{，}$$

此處 $(c + a) : b = m : n$，m、n 實際上互質。這是世界數學史上第一次提出完整的勾股數組通解公式。不過，《九章》的術文未離開具體數字，劉徽則用出入相補原理對其一般形式作了證明。

---

[4]“入”，楊輝所見爲“人”，校爲“入”，戴震及後人因之。

相似勾股形中勾股弦“相與之勢不失本率”，是劉徽概括出的一個重要原理。《九章算術》利用勾股數組通解公式解勾股形，即基於這一原理。劉徽還用這一原理援引今有術、衰分術解決勾股容方、容圓及測望問題。我們試舉二例。

《九章算術》勾股容圓問已知勾 a、股 b，問勾中容圓徑 d，其公式是 $d = 2ab/(a+b+c)$，其中 $c = \sqrt{a^2+b^2}$。劉徽用衰分術證明了這個公式：

> 又畫中弦以觀除會[5]，則勾、股之面中央各有小勾股弦[6]。勾之小股、股之小勾[7]皆小方之面，皆圓徑之半，其數故可衰。以勾、股、弦爲列衰，副並爲法，以勾[8]乘未並者，各自爲實，實如法而一，得[9]勾面之小股可知也。以股乘列衰爲實，則得*股面之小勾可知。

在這裡劉徽過圓心作平行於弦的直線，稱爲中弦，分別與垂直於勾、股的半徑及勾、股形成與原勾股形相似的小勾股形，且其周長分別等於勾、股。設勾上小勾股形邊長爲 a_1、b_1、c_1，則 $a_1 : b_1 : c_1 = a : b : c$，且 $a_1 + b_1 + c_1 = a$。由衰分術 $b_1 = ab/(a+b+c)$、$d = 2b_1 = 2ab/(a+b+c)$。同樣，由股上小勾股形亦可求出此公式。

《九章算術》“出南北門求邑方”問是：

> 今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木。出南門一十四步，折而西行一千七百七十五步見木。問邑方幾何？
>
> 術曰：以出北門步數乘西行步數，倍之，爲實。並出南、北[10]門步數爲從法，開方除之，即邑方。

[5]“觀除會”，大典本作“規除會”，亦通。此依楊輝本。

[6]大典本、楊輝本脫“各有”二字，依錢校本補。

[7]“股之”，大典本、楊輝本訛作“面面”，今校正。此八字，戴震改作“勾面之小股，股面之小勾”，其後諸本因襲。

[8]“勾”上大典本、楊輝本衍“小”字，依李潢刪。

[9]、* 此“得”，“則得”，錢校本改作“則”，無必要。

[10]戴震諸校本脫此“北”字，此後諸本同，未知大典本，此依楊輝本補。

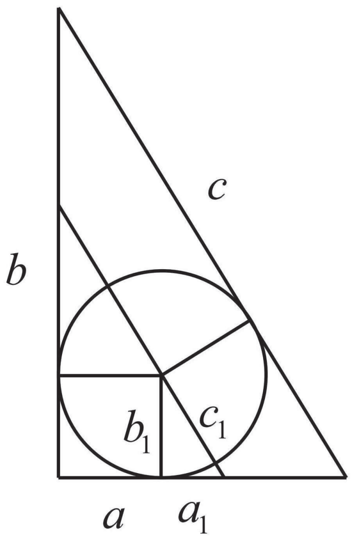


圖 2

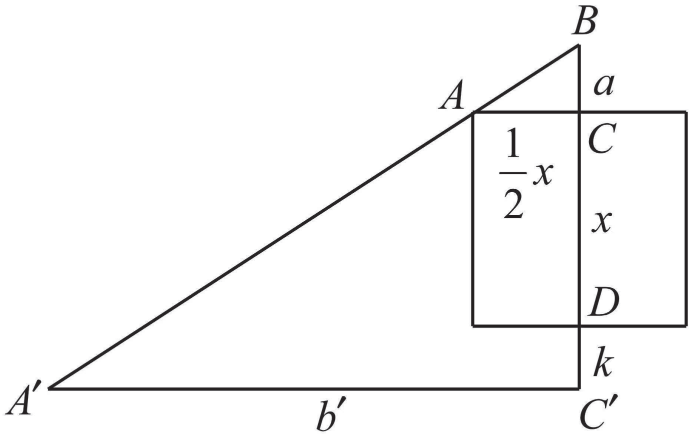


圖 3

如圖 3，設出北門 BC 爲 a，出南門 DC' 爲 k，西行 $C'A'$ 爲 b'，邑方爲 x，則《九章算術》術文給出了二次方程：

$$x^2 + (a+k)x = 2ab'。$$

劉徽註的第一部分爲：

> 此以折而西行爲股，自木至邑南[11]一十四步爲勾，以出北門二十步爲勾[12]率，北門至西隅爲股率，即[13]半廣數。故以出北門乘折西行股，以股率乘勾之冪[14]。然此冪居半，以西行，故又倍之，合東，盡之也[15]。

劉徽根據勾股形 ABC 與 $A'B'C'$ 相似，知 $BC : BC' = AC : A'C'$，所以 $a/(a+x+k) = \frac{1}{2}x/b'$，於是得出上述二次方程。

重差問題的公式亦可藉助於勾股相與之勢不失本率的原理來證明。

總之，劉徽使用率證明了《九章算術》大部分算法、大多數題目，使率的應用空前廣泛、深入，提高到理論的高度。

---

[11]大典本、楊輝本脫“南”字，依戴震補。

[12]“勾”，大典本、楊輝本訛作“弦”，依戴震校改。

[13]“股率即”，大典本、楊輝本訛作“單望”，依戴震改。

[14]此句大典本、楊輝本“折西”訛作“至南”，“股率”訛作“半率”，今校正。戴震於“北門”下補“勾率”，改“至南”爲“西”，“以半股率”改作“得半廣股率”，其後諸本從。似不妥。

[15]“此”，大典本、楊輝本訛作“北”。此句戴震改作“然此冪居西半，故又倍之合東半以盡之也。”其後諸本從。似不妥。

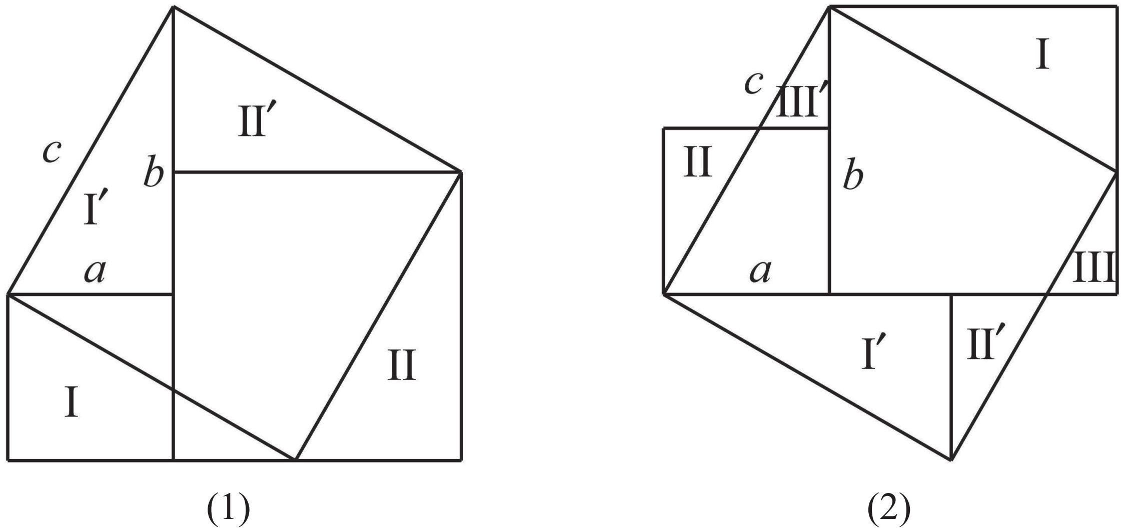


圖 4

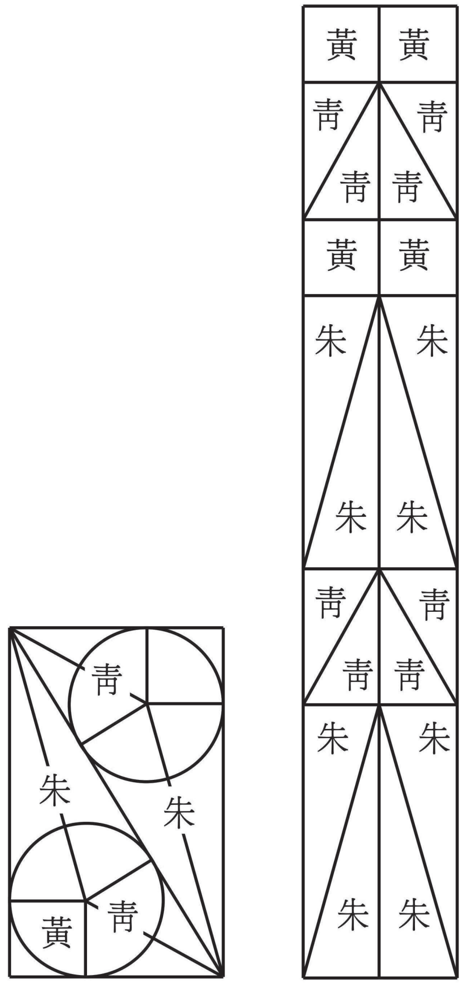
“出入相補” 見之於劉徽爲《九章算術》勾股術 —— “勾股各自乘，並而開方除之，即弦” 所作的註：“勾自乘爲朱方，股自乘爲青方，令出入相補，各從其類，因就其餘不動也，合成弦方之冪，開方除之，即弦也。” 如何將勾方與股方出入相補成弦方，劉徽未具體提示，學界歷來有不同看法，圖 4 的兩種方法，分別將 I、II、III 移動 I′、II′、III′，是比較常見的兩種推測。“出入相補” 在卷一、卷五劉徽註中又稱作 “以盈補虛”。它是中國古算中證明面積和體積問題的主要方法，應該說，在劉徽之前，甚至在《九章算術》成書時代，人們就已熟悉這種方法，劉徽則對它作了概括、發展。我們仍以上文提到的 “勾股容圓” 和 “出南北門求邑方” 兩問爲例說明。對勾股容圓，劉徽註的出入相補方法是：

> 勾股相乘爲圖本體，朱、青、黃冪各二，倍之則爲各四。可用畫於小紙，分裁邪正之會，令顛倒相補，各以類合成修冪：圓徑爲廣，併勾、股、弦爲袤。故併勾、股、弦以爲法。

這是將勾股形由圓垂直於勾、股、弦的半徑分成朱、青、黃三

塊，將兩個勾股形合成一個長方形 (其面積爲 ab)，則會有朱、青、黃各二塊。再加倍，則各四塊。將朱、青各中分，則此四朱、青、黃拼成以圓徑爲寬，勾、股、弦之和爲長的長方形，其面積爲 $2ab$，顯然 $d = 2ab/(a+b+c)$。

“出南北門求邑方” 問劉徽註的第二部分則是：“此術之冪，東西如邑方[16]，南北自木盡邑南十四[17]步之冪，各南北步爲廣，邑方爲袤，故連兩廣爲從法，並以爲隅外之冪也”[18]。如圖 6，畫出長方形 $BEA'C'$，勾股形 BEA' 和 $BC'A'$ 面積相等，AGA' 和 AFA' 面積相等，故長方形 $BEGC$ 和 $BHFC'$ 面積相等，即 $\frac{x}{2}(a+x+k) = ab'$。而 $HD'F'F$ 的面積等於 $2ab'$，它可以分解成 x^2 和 $x(a+k)$，即 BC 和 DC' 之和爲從法。這就證



(1) (2)

圖 5

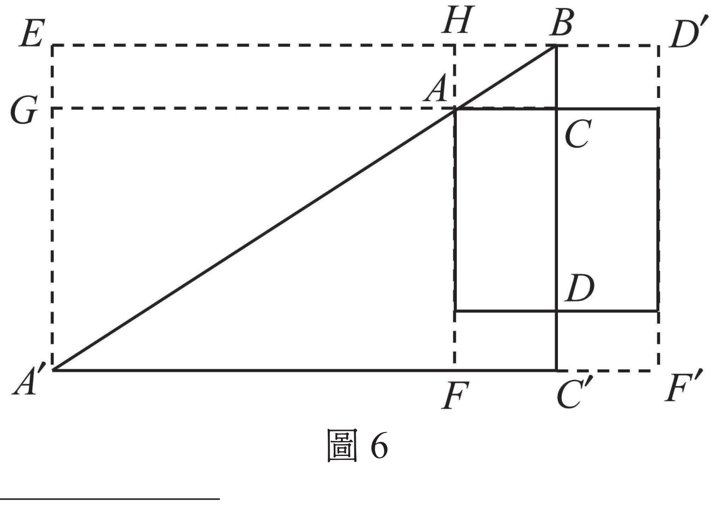


圖 6

[16]大典本、楊輝本脫 “如邑方” 三字，依戴震補。

[17]“北” 下，大典本、楊輝本衍 “邑” 字，依戴震刪。“十四”，大典本誤倒，此依楊輝本。

[18]“從法”，大典本、楊輝本誤倒。餘皆不誤。此段戴震在孔刻本中改作 “東西廣如邑方，南北自木盡邑南十四步爲袤。合南北步數爲廣袤差，故併兩步數爲從法。以爲隅外之冪也。” 此後諸本從。不妥。戴氏在聚診版中的校勘較好。

明了術文的正確性。

出入相補原理對解決平面直線圖形是行之有效的，劉徽用這種方法解決了大量問題。據信，重差問題亦用出入相補原理證明。《周髀算經》中測望太陽的“日高術”奠定了重差問題的基礎。劉徽在介紹了日高術之後說，《九章算術》的測望問題“皆端旁互見，無有超邈若斯之類。”他說：“雖夫圓穹之象猶曰可度，又況泰山之高與江海之廣哉？”因此，“輒造《重差》，並爲註解，究古人之意，綴於《勾股》之下”，即《九章算術註》第十卷，今之《海島算經》。劉徽說：“凡望極高，測絕深，而兼知其遠者必用重差、勾股，則必以重差爲率，故曰重差。”從測量技術上說，劉徽使用了重表、連索、累矩三種基本方法，有的要測望三次或四次。劉徽說：“度高者重表，測深者累矩，弧離者三望，離而又旁求者四望。觸類而長之，則雖幽遐詭伏，靡所不入。”而就數學內容上說，望海島(同日高術)、望松、望深谷代表了望高、知遠、測深三個基本結果，其餘諸題皆可由這三個基本公式得出。由於劉徽自註已佚，他怎樣證明這些結果，學界未有定論。根據劉徽的數學水準，以率的原理和以出入相補原理來證明都是可信的，很可能同時採用這兩種，如上兩例然。此以立兩表測海島爲例說明怎樣以出入相補原理證明。已知表高、表間，以及使人目、表末及島峰參相直從兩表卻行的距離，兩卻行之差稱爲相多，劉徽提出島高公式

$$\text{島高} = \text{表間} \times \text{表高} / \text{相多} + \text{表高}，$$

前表去島公式

$$\text{去島} = \text{表間} \times \text{前表卻行} / \text{相多}。$$

吳文俊認爲證明方法如下:

因

$$\Box MKLI = \Box\, GIDB \text{、} \Box NJOH = \Box\, GHCB，$$

相減得

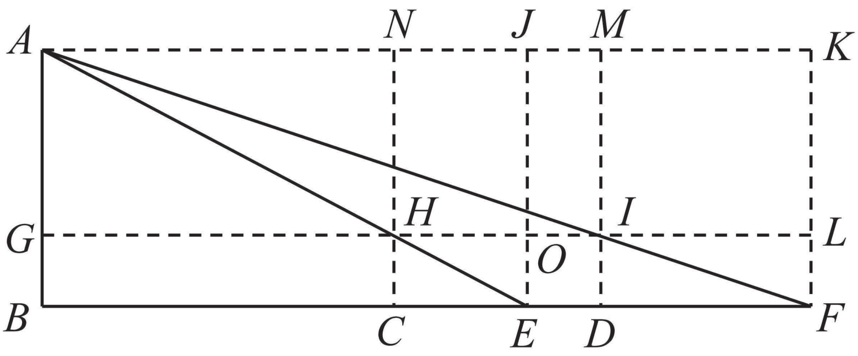


圖 7

$$\square MKLI - \square NJOH = \square HIDC，$$

或

$$後表卻行 \times (島高 - 表高) - 前表卻行 \times (島高 - 表高)$$
$$= 表間 \times 表高，$$
$$島高 = 表間 \times 表高 / (後表卻行 - 前表卻行) + 表高，$$

此即島高公式。 又從 $\square NJOH = \square GHCB$ 得

$$前表去島 \times 表高 = 前表卻行 \times (島高 - 表高)，$$

代入島高公式， 即得前表去島公式。

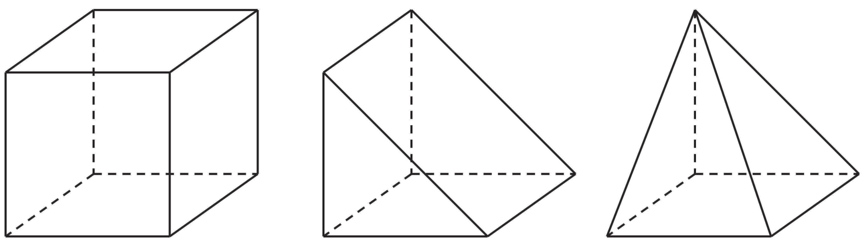
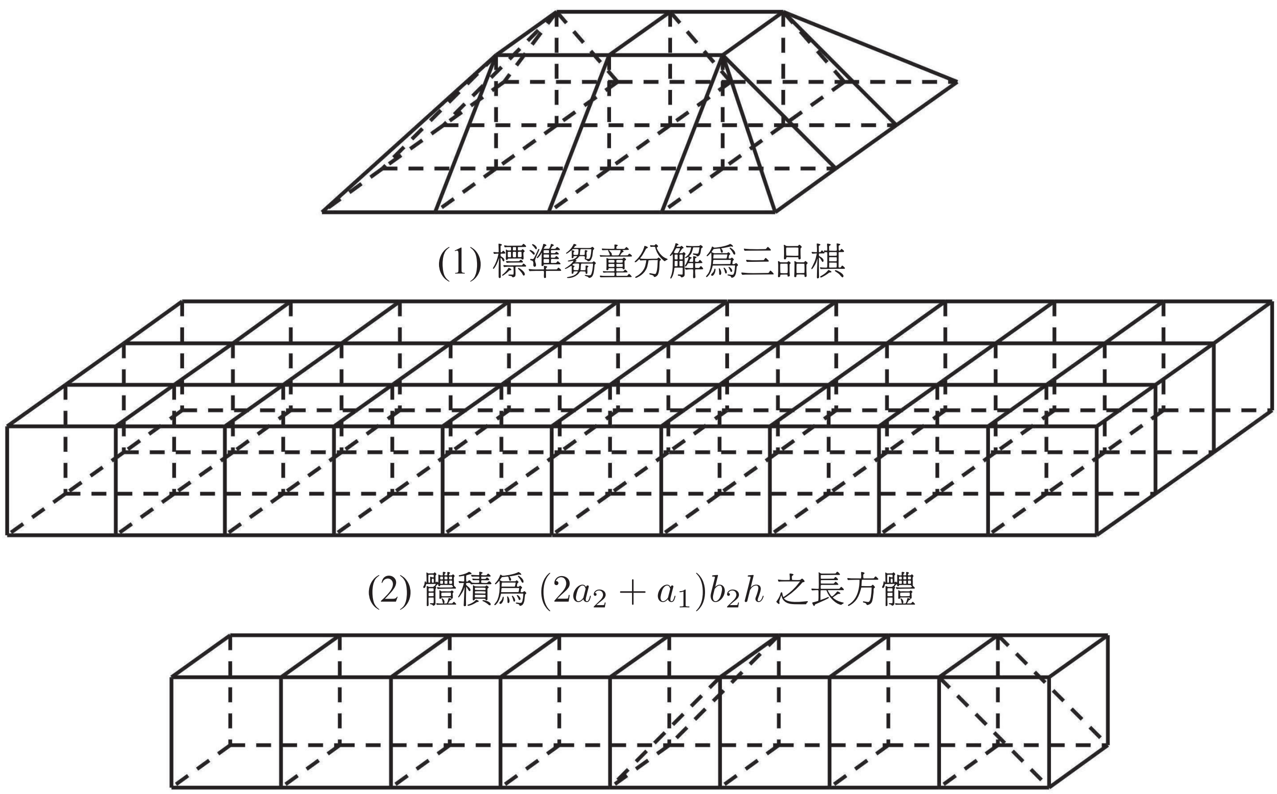


圖 8

立體問題中也可應用出入相補原理。 棋驗法就是如此。 劉徽說：“說算者乞乃立棋三品， 以效廣深之積。” 說明棋驗法是劉徽前的一種傳統方法。 它是將所要討論的立體分解或拼合成三品棋， 即長、 寬、 高均爲一尺的立方、 塹堵、 陽馬 (如圖 8)， 適當加倍 (如果需要的話)， 重新拼合成一個或幾個三品棋方體， 從而推知其體積。 顯然， 這種方法只適用於可分解或拼合成三品棋的特殊多面體， 而對一般尺寸的多面體則無能爲力。 劉徽指出了它的局限性。 例如三個長、 寬、 高一尺的陽馬合成一個正方

體，那麼陽馬棋的體積爲正方體的 1/3，這種方法對長、寬、高不等的陽馬則無能爲力。又如，上底寬 1 尺、長 2 尺，下底寬 3 尺、長 4 尺，高 1 尺的芻童可以分解成 2 個立方棋、6 個塹堵棋、4 個陽馬棋 (圖 9(1))。6 個這樣的芻童共 12 個立方棋、36 個塹堵棋，24 個陽馬棋。它們可以重新組合成一個長 10 尺 (兩下底長加上底長)、寬 3 尺 (下底寬)、高 1 尺的長方體及一個長 8 尺 (兩上底長加下底長)、寬 1 尺、高 1 尺的長方體 (圖 9(2)、(3))。因此，一個這樣的芻童的體積爲此兩長方體體積之和的 1/6。顯然，它對一般的芻童是不適用的。



(1) 標準芻童分解爲三品棋

(2) 體積爲 $(2a_2 + a_1)b_2h$ 之長方體

(3) 體積爲 $(2a_2 + a_1)b_1h$ 之長方體

圖 9　　芻童之棋驗法

劉徽通過以盈補虛即出入相補證明了塹的體積公式

$$V = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)ah,$$

其中 b_1、b_2 是上、下底寬，a 是長，h 是高。他認爲 $(b_1+b_2)/2$ 是 “以盈補虛，得中平之廣”，將一個塹變成寬 $(b_1 + b_2)/2$、長 a、高 h 的長方體，從而證明了公式。(圖 10)

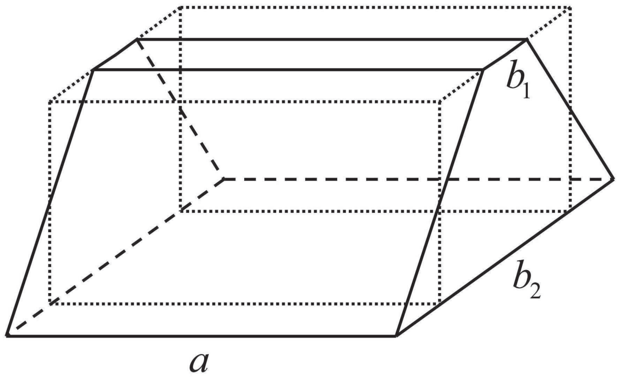


圖 10　以盈補虛求塹體積

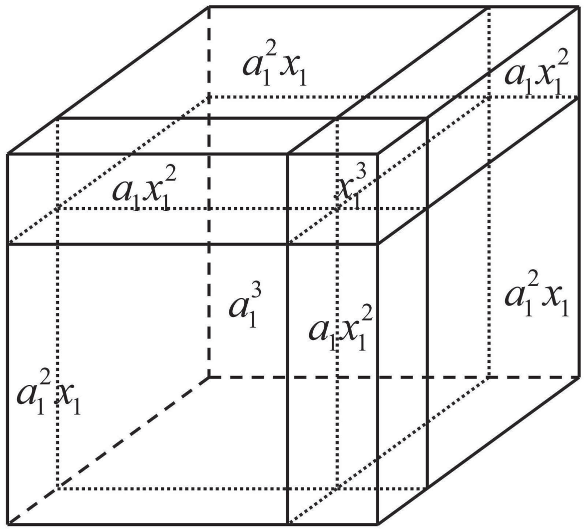


圖 11　開立方圖示

劉徽還用出入相補證明開平方、開立方程序的正確性。如開 A 的立方，初商 a_1，則

$$A = a_1^3 + 3a_1^2x_1 + 3a_1x_1^2 + x_1^3,$$

減根方程

$$x_1^3 + 3a_1x_1^2 + 3a_1^2x_1 = A - a_1^3,$$

其幾何意義如圖 11 所示。求出初商 a_1 後，其剩餘部分 $A - a_1^3$ 由小立方 x_1^3、三長廉 $3a_1x_1^2$、三方廉 $3a_1^2x_1$ 構成，其中 x_1 爲待求。

無窮小分割在數學證明中的應用

1. 割圓術 —— 圓面積公式的證明。

《九章算術》提出了正確的圓面積公式：“半周半徑相乘得積步”，即

$$S = \frac{1}{2}Lr\text{，} \tag{1}$$

其中 S、L、r 分別表示圓面積、周長和半徑。在劉徽之前，人們以圓內接正六邊形周長代替 L，以正十二邊形的面積代替 S，出入相補，拼成一個長爲正六邊形周長、寬爲 r 的矩形，驗證 (1) 式，這實際上取 $\pi = 3$，當然不是嚴格證明。劉徽指出，以周三

徑一的論證“皆非也”，提出基於極限思想的割圓術嚴格證明了 (1) 式。

首先，劉徽從圓內接正六邊形開始割圓，依次得到圓內接正 $6\cdot 2^n$ 邊形 ($n=1$、2、3、$\cdots\cdots$)。他認爲，割得愈細，即 n 愈大，圓內接正多邊形與圓面積之差愈小。“割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。”即在不可割的狀態，正多邊形與圓周重合，其面積之差爲 0，換言之，若正 $6\cdot 2^n$ 邊形的面積爲 S_n，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S。$$

另一方面，圓內接正多邊形每邊與圓周間有一餘徑 r_n。若以每邊長 l_n 乘餘徑 r_n 得 $l_n r_n$，加到 S_n 上，顯然 $S_n+6\cdot 2^n l_n r_n > S$，亦即 $S_n + 2(S_{n+1} - S_n) > S$。但在正多邊形與圓合體的情況下，“則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。”亦即，由於 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}[S_n + 2(S_{n+1} - S_n)] = S$。

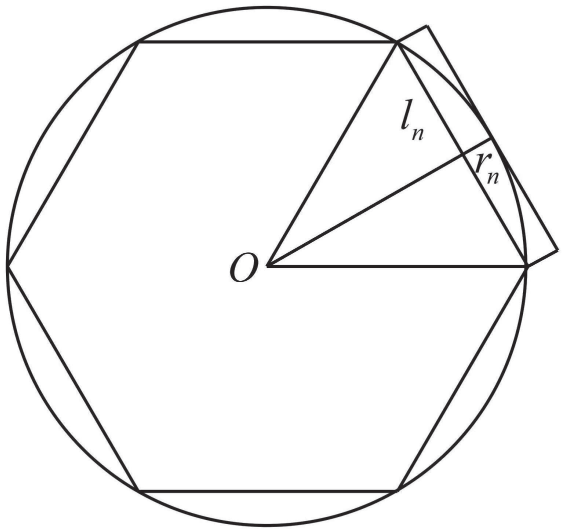
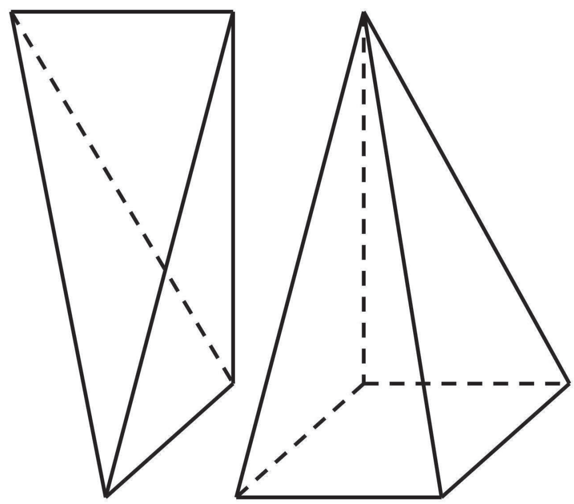


圖 12


(1) 鱉臑　(2) 陽馬
圖 13

最後，將與圓合體的正多邊形分割成無數個以圓心爲頂點以邊長爲底的小等腰三角形。由於以每邊乘半徑等於每個小等腰三角形面積的兩倍，那麼這無數個小等腰三角形面積之和應是半周與半徑的乘積，正如劉徽所說：“以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自

倍，故以半周乘半徑而爲圓冪。” 即

$$S=\lim_{n\to\infty}6\cdot 2^n\cdot\frac{1}{2}l_nr=\frac{1}{2}Lr\text{。}$$

這就完成了圓面積公式 (1) 的證明。

2. 劉徽原理 —— 錐體體積公式的證明

劉徽極限思想最精彩的應用當推他關於陽馬和鱉臑體積公式的證明。鱉臑是有下寬無下長，有上長無上寬，即每面都是勾股形的四面體 (圖 13(1))，《九章算術》給出的體積公式是：“廣袤相乘，以高乘之，六而一。” 即

$$V_b=\frac{1}{6}abh, \tag{2}$$

其中 a 是下寬，b 是上長，h 是高。陽馬是一稜垂直於底面的四稜錐 (圖 13(2))，《九章算術》給出的體積公式是：“廣袤相乘，以高乘之，三而一。” 即

$$V_y=\frac{1}{3}abh\text{，} \tag{3}$$

a、b 爲底的寬、長。h 是高。劉徽指出，在 $a\neq b\neq h$ 的情況下，由於 “鱉臑殊形，陽馬異體”，用棋驗法 “則難爲之矣”，無法證明 (2)、(3) 式。他只好另闢蹊徑。

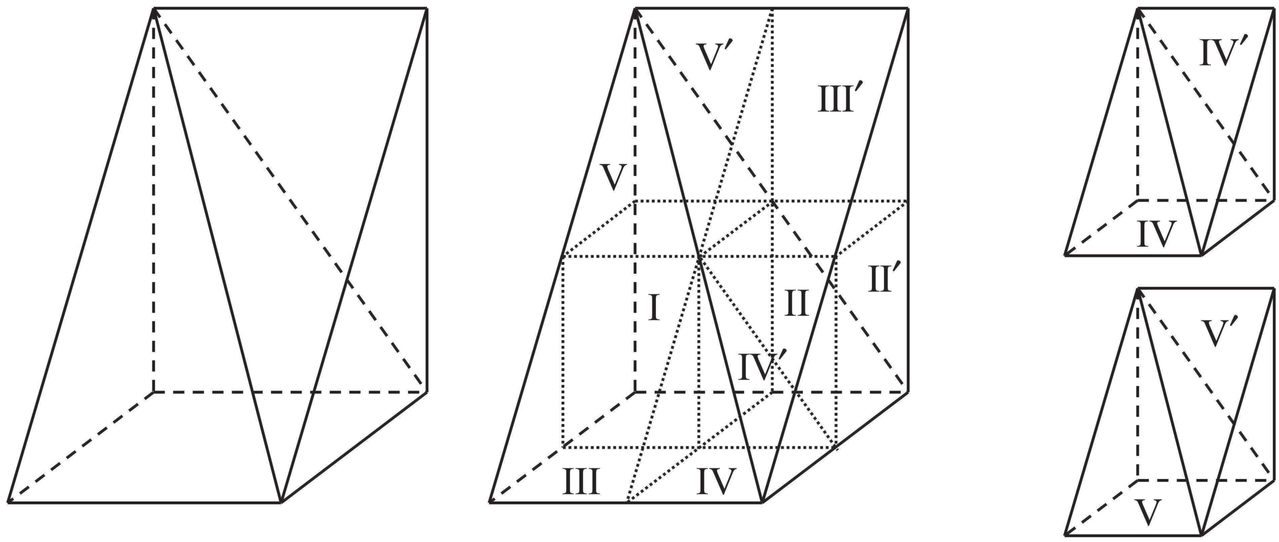
爲此，劉徽首先提出一個重要原理：

> 邪解塹堵，其一爲陽馬，一爲鱉臑。陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也。

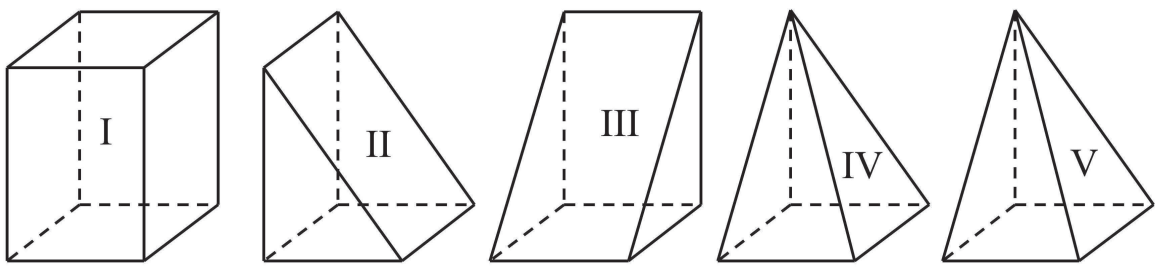
即對任一塹堵，將其分解爲一陽馬與一鱉臑，則恆有

$$V_y:V_b=2:1\text{。} \tag{4}$$

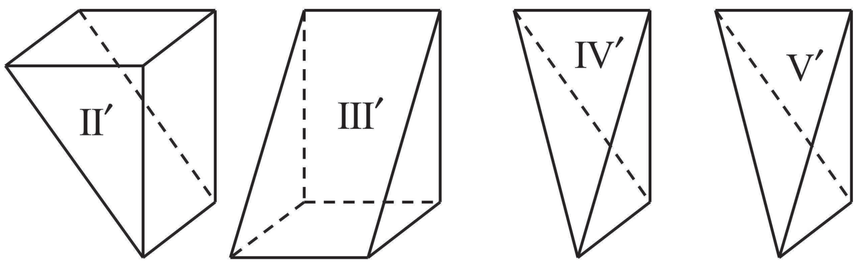
顯然，只要證明了 (4) 式，則由塹堵體積公式 $V_q=abh/2$，則 (2)、(3) 兩式是顯而易見的。這個原理可以稱爲劉徽原理。劉徽用無窮小分割證明了它。



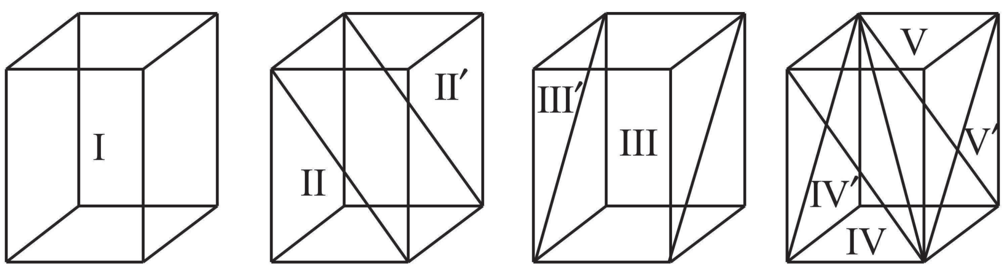
(1) 陽馬與鱉臑組合成塹堵　　(2) 塹堵之分解　　(6) 未知部分與原塹堵相似



(3) 陽馬分解成一小立方二小塹堵二小陽馬



(4) 鱉臑分解成二小塹堵二小鱉臑



(5) 塹堵重新拼成四小立方

圖 14　　劉徽原理之證明

他將一個鱉臑 (紅色) 與一個陽馬 (黑色) 拼成一塹堵[19] (圖 14(1))。 再用三個互相垂直的平面平分塹堵的長、 寬、 高 (圖 14(2))， 則此時陽馬被分解爲一個小長方體 (I) 、 兩個小塹堵 (II 、 III) 和兩個小陽馬 (IV 、 V) (圖 14(3))； 鱉臑被分解爲兩個小塹堵 (II′ 、 III′) 和兩個小鱉臑 (IV′ 、 V′) (圖 14(4))。 鱉臑中兩個小紅塹堵 II′ 、 III′ 與陽馬中兩小黑塹堵 II 、 III 拼成兩個小長方體 II–II′ 、 III–III′， 與小黑長方體 I， 共三個全等的小長方體， 其中屬於陽馬與屬於鱉臑的體積之比爲 $2:1$。 兩小紅鱉臑 IV′ 、 V′ 與兩小黑陽馬 IV 、 V 恰是兩小塹堵 IV–IV′ 、 V–V′， 它們又可合成第四個全等的小長方體 IV–IV′–V–V′， 陽馬與鱉臑在其中體積之比仍未知。 總之在原塹堵的 $3/4$ 中已證明 (4) 式成立， 在 $1/4$ 中仍未知，“是爲別種而方者率居三， 通其體而方者率居一”。 (圖 14(5))

劉徽指出：“餘數具而可知者有一、 二分之別， 即一、 二之爲率定矣。” 就是說， 在餘下的 $1/4$ 中能證明可知部分陽馬與鱉臑體積之比仍爲 $2:1$， 則就可以確定在整個塹堵中陽馬與鱉臑體積之比爲 $2:1$。 爲什麼呢? 由於所餘 $1/4$ 中， 兩個小塹堵的結構與原塹堵完全相似 (圖 14(6))， 因此可以重複剛才的分割， 同樣可以證明在其中 $3/4$ 的中 (4) 式成立， 換言之， 在原塹堵的 $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$ 中 (4) 式尚未被證明。 這個過程可以無限繼續下去，“半之彌少， 其餘彌細。 至細曰微， 微則無形。 由是言之， 安取餘哉?” 無限分割到最後， 沒有證明 (4) 式成立的部分爲 0， 換言之， 在整個塹堵中證明了 (4) 式。

下面將看到， 劉徽原理是劉徽體積理論的核心。

3. 牟合方蓋和截面積原理。

在證明其它面積和體積， 尤其是曲面面積和圓體體積時， 劉徽

[19] 劉徽的文字仍使用長 、 寬 、 高相等的立體棋。 然他隨後說 “雖方隨棋改， 而固有常然之勢也，” 表明他的證明適於 $a \neq b \neq h$ 的一般情形， 我們按一般情形論述。

以另一種方式使用了無窮小分割。

劉徽指出，《九章算術》"開立圓術" 所蘊涵的球體積公式

$$V = \frac{9}{16}D^3$$

是錯誤的，其中 D 是球直徑。他用兩上底徑等於球徑的圓柱正交，其公共部分稱作牟合方蓋 (圖 15)。他指出，球與外切牟合方蓋的體積之比爲 $\pi : 4$："合蓋者，方率也；丸居其中，即圓率也。" 劉徽雖然沒能求出牟合方蓋的體積，卻指出了徹底解決球體積的正確途徑，二百多年後，祖沖之父子求出了牟合方蓋的體積，從而求出球體積的正確公式。

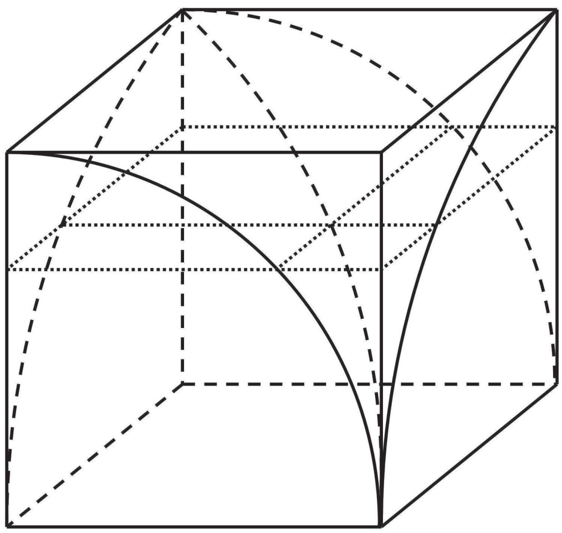


圖 15　球、牟合方蓋與立方 (八分之一)

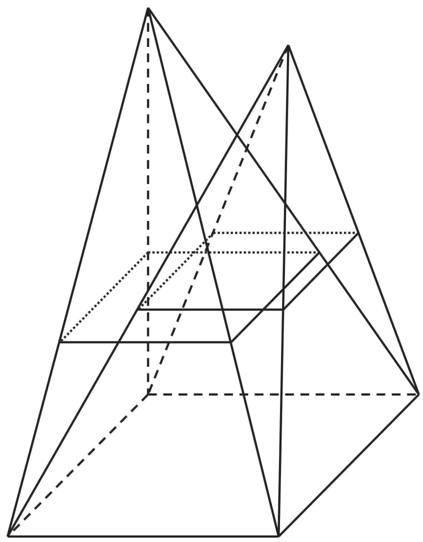
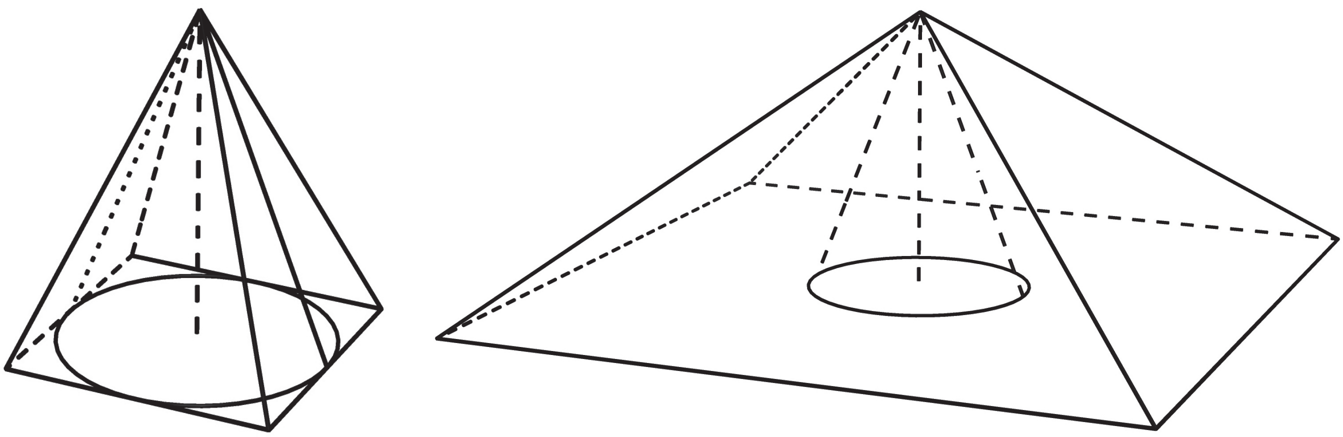


圖 16

劉徽能指出《九章算術》球體積公式的錯誤並指出應使球與牟合方蓋比較，基於他對截面積原理的深刻認識。從《九章算術》商功章諸題的編排及劉徽註，可以看出，《九章算術》時代，人們通過比較有某種關係的兩個等高立體的最大截面積 (通常是底面積) 來解決圓體體積，而沒有認識到必須任意等高處的截面積之比都等於最大截面積之比，方能作比較，從而錯誤地認爲球與外切圓柱之比爲 $\pi : 4$。劉徽揚棄了《九章算術》的錯誤，認識到，必須兩立體任意等高處的截面積都成定比。我們從他說的 "上連無成不方，故方錐與陽馬同實" (圖 16)，清楚地看出了這一思

想。成，訓層。就是說，等高同底的方錐與陽馬因爲每一層都是相等的方形，所以其體積才相等。顯然，劉徽的這一思想與後來西方的卡瓦列里 (Cavalieri) 的不可分量原理十分接近。劉徽基於這種認識，提出了圓錐與外切方錐 (圖 17(1))，圓亭與外切方亭、球與牟合方蓋的體積之比均爲 $\pi : 4$，圓錐與等高的以圓錐底周爲底邊長的方錐體積之比是 $25 : 314$ (相當於 $1 : 4\pi$，圖 17(2))。



(1) (2)

圖 17

劉徽把中國古代關於截面積原理的認識提高到理性階段，爲祖暅最後提出“緣冪勢既同，則積不容異”的祖暅原理 (即卡瓦列里原理) 作了準備。

劉徽還提出圓錐表面積與外切方錐表面積 (底除外) 之比爲 $\pi : 4$。

4. 極限思想在近似計算中的應用。

首先是圓周率的計算。劉徽指出，(1) 式中的周、徑“謂至然之數，非周三徑一之率也。”因而需要求這個數即 π 的精確值。他利用上述的割圓程序，割直徑爲 2 尺的圓，由圓半徑 r 和圓內接正 $6 \cdot 2^n$ 邊形邊長 l_n，兩次運用勾股定理並開方，可以求出 $6 \cdot 2^{n+1}$ 邊形邊長 l_{n+1}，劉徽依次求出 l_1、l_2、l_3、l_4，算出正

$96 (= 6 \cdot 2^4)$ 邊形面積 $S_4 = 313\dfrac{584}{625}$ 寸^2， 正 $192 (= 6 \cdot 2^5)$ 邊形面積 $S_5 = 314\dfrac{64}{625}$ 寸^2， 則 $S_4 + 2(S_5 - S_4) = 314\dfrac{169}{625}$ 寸$^2 > S$。 因此取 314 寸^2 爲圓面積 S 的近似值， 利用 (1) 式反求出圓周長：“以半徑一尺除圓冪， 倍所得， 六尺二寸八分， 即周數。” 接著 “令徑二尺與周六尺二寸八分相約， 周得一百五十七， 徑得五十， 則其相與之率也。” 此即 $\pi = 157/50 (= 3.14)$。 劉徽認爲此率 “猶爲微少。” 他又取 $314\dfrac{4}{25}$ 寸^2 爲圓面積的近似值， 利用同樣的程序求出 $\pi = 3927/1250$。 並求出 l_8， 算出 S_9， 驗證了這個值。 這是中國古代第一次提出圓周率的正確方法， 它奠定了中國圓周率計算長期在世界上領先的基礎。 據信， 祖沖之就是用劉徽的方法將圓周率的有效數字精確到八位。

劉徽指出《九章算術》弧田 (弓形) 術不精確。 他由弧田的弦和矢， 利用勾股定理， 求出圓徑， 利用割圓思想， 將弧割爲二等分， 由勾股定理， 求出小弧之弦、 矢， 再將小弧二等分， 如此繼續下去 (圖 18)，“割之又割， 使至極細。 但舉弦矢相乘之數， 則必近密率矣。” 顯然， 求這些三角形的面積之和， 可以將弧田面積精確到人們所需要的程度。

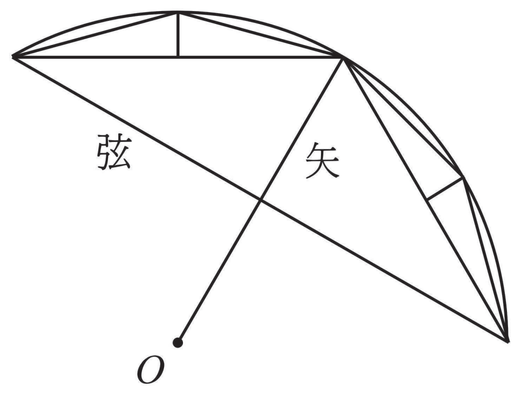


圖 18

另一個傑出的應用便是開方中提出求微數的思想。《九章算術》在開方不盡時，“以面命之”， 這是以被開方數的方根定義一個數， 相當於無理數。 至於其近似值， 劉徽之前有的表示成：$\sqrt{N} \doteq a + \dfrac{r}{2a+1}$ 的。 劉徽認爲這 “雖粗相近， 不可用也。”

提出：“不以面命之，加定法如前，求其微數。微數無名者以爲分子，其一退以十爲母，其再退以百爲母。退之彌下，其分彌細，則朱幂雖有所棄之數，不足言之也。”在開立方中也有類似的方法。顯然，這種求十進分數的思想與現今求無理根的十進小數近似值完全相同。並且，這種方法也源於他的極限思想。劉徽求微數的意義十分重大。求圓周率每一步都要開方，劉徽說：“開方除之，下至秒忽。又一退法，求其微數。微數無名者以爲分子，以十爲分母。”倘無求微數，計算精確的圓周率是不可能的。求微數是保證中國圓周率計算長期領先的先決條件。同時，劉徽的微數開創了十進小數的先河，對中國在宋、金時代最先使用小數起了促進作用。

枝條雖分而同本幹

——劉徽的數學體系

劉徽通過爲《九章算術》作註，把自己的數學知識分散開來，好像雜亂無章，前後失次，實際上並不是這樣。他說：“事類相推，各有攸歸，故枝條雖分而同本幹知[20]，發其一端而已。”這個端是什麼呢？劉徽在談到數學研究並不特別困難時說：“至於以法相傳，亦猶規矩度量可得而共。”規、矩分別是畫圓、畫方的工具，表示事物的空間形成，度量指度、量、衡，表示數量關係。劉徽的話說明他認爲數學方法起源於空間形式和數量關係的統一，這正反映了中國古算的特色一幾何與算術、代數的統一。

由上文所列出的證明看出，其中的推理是演繹推理，因而其證明是演繹證明。劉徽證明的前提是若干公認的事實及已經證明過的公式、解法，這在上文已經述及。當然，還必須提出許多定義。

[20]“知”，訓“者”，原文“知”上有“者”字，係後人旁註“知”字而衍入正文。

在中國，數學定義最初出現在先秦的《墨經》中，可是，這種傳統沒有繼承下來。《九章算術》沒有任何定義，數學概念的含義靠約定俗成。劉徽繼承墨家的傳統，提出了若干定義。前面已經談到率、方程的定義。又如正負數："兩算得失相反，要令正負以名之。"這個定義表明，兩個相反的數，一個爲正，則另一個必爲負，不再是以盈爲正，以欠爲負的素樸描述，具有高度抽象性。根據這個定義，方程中各行係數，可以根據消元的方便而定："可得使頭位常相與異名。"面積："凡廣從相乘謂之冪。"根據這個定義，可以計算曲面的面積，甚至看來與面積無關的兩數相乘問題，都可化爲面積問題而解決。關於體積，劉徽沒寫出定義，但是，遍察《九章算術註》，劉徽只對《九章算術》53 個問題的術文沒寫註，其中有 52 個問題 (分別在卷二、三、八)，或者已註過總術，或已註過同類術文，劉徽主張簡約，當然不必再註。那麼，此外劉徽沒作註的只有商功章方堡壔 (方柱體) 的體積公式。這不是疏忽，應該說，劉徽把它看成不能證明的事實，因此可以理解爲定義。

劉徽著力探討《九章算術》各公式、解法直至數學各部分之間的關係，以使數學成爲"約而能周、通而不黷"的體系。不言而喻，劉徽的體系是與《九章算術》不同的。以體積問題爲例。《九章算術》直到劉徽前，以棊驗法爲主要方法，只能證明特殊尺寸的多面體體積，而對《九章算術》大部分一般性體積公式無能爲力，其正確性是歸納的結果。劉徽的體系則不然，他認爲鱉臑 (四面體) 和陽馬體積的證明是關鍵，在用無窮小分割完成其證明之後指出："不有鱉臑，無以知陽馬之數，不有陽馬，無以知錐亭之類，功實之主也。"他又著力證明了幾種不同的鱉臑體積公式，接近提出任何四面體的體積都是 $\dfrac{abh}{6}$。他把方錐、方亭、芻童、羨除等多面體分割成有限個長方體、塹堵、陽馬及

鱉臑，然後求其和以證明其體積公式。劉徽註清楚地表明，他的多面體理論是從長方體出發，以四面體體積公式的證明爲核心，以演繹推理爲主要方法的理論體系。又如，《九章算術》粟米、衰分和均輸三章都是關於比例和比例分配的問題，內容交錯、重複。劉徽用率統一了這三章的方法，不僅把比例、比例分配歸結爲今有術，而且將分數、追及、行程、程功、利息、均輸等一般算術問題都化爲今有問題，指出：今有術，“此都術也。”劉徽又推而廣之，將率應用於面積、體積、解勾股形、盈不足、方程等問題，使率成爲計算問題的綱紀。

總之，把劉徽分散到九章、上百條術文、246 個題目中的數學知識根據他形諸文字者進行梳理，就會看到，數學在劉徽頭腦中形成了一個獨具特色的體系。它從規矩度量的統一出發，引出面積、體積、率、正負數等的定義，運用齊同原理、出入相補原理、無窮小分割方法，以演繹邏輯爲主要推理方法，以計算爲中心，以率爲綱紀，其中沒有任何循環推理。它“約而能周，通而不黷”，全面、簡潔地反映了到公元三世紀爲止的中國人民的數學知識。劉徽《九章算術註》不僅有概念、有命題，而且有聯結這些概念和命題的邏輯推理。它的出現標誌著中國古代數學形成了自己的理論體系，完成了由感性向理性，由或然性向必然性的昇華。

時代的產物　學者的風度

何以在公元三世紀又何以是劉徽完成了這樣傑出的《九章算術註》？這需要分析當時的時代背景和劉徽的品格。

中國封建社會經過兩漢大發展，到魏晉時期發生了大變革，經濟關係的基本特徵是莊園農奴制，門閥士族佔據政治舞台的中心，中國封建社會進入一個新的階段。與此相適應，繁瑣的兩

漢經學和讖諱迷信被冷落，儒學衰微，代之而起的是以研究三玄——《周易》、《老子》、《莊子》爲中心的辯難之風，思想界出現了春秋戰國百家爭鳴之後所未有過的解放與活躍局面。“析理”，探索思維規律，互相辯難，追求理勝，成爲思想界的風氣。漢末及三國時的社會動亂固然不利於數學的發展，然生產關係的變革及其帶來的政治上的變革給數學的發展以新的機制。儒學影響的削弱，思想上的解放，使知識分子較能按自己的特長和社會的需要發揮才智，而少受追求功名利祿及代聖賢立言的精神枷鎖的束縛，這就打開了數學研究中發揮創造性的大門。以嚴謹爲其特點的數學幾百年來積累了大量公式、解法需要證明其正確性，而以“析理”爲要件的辯難之風的興起促進了這個過程的完成。劉徽註《九章算術》的宗旨“析理以辭，解體用圖”無疑是辯難之風中“析理”在數學中的反映。劉徽主張“要約”，“舉一反三”，反對以多爲貴，遠引繁言，主張觸類而長，都與嵇康、王弼、何晏等思想家的主張一致，他們的許多用語、甚至句法也都相近。因此，劉徽深受辯難之風的影響而析數學之理，是不言而喻的。同時，我們由此斷定劉徽爲嵇康、王弼的同代人而稍小一點，那麼當生在公元三世紀二十年代後期，或其後，他註《九章算術》時年僅三十歲左右。隨著儒學的衰微，不僅名家、道家重新抬頭；即使秦漢以來視爲異端的墨家也受到人們的重視，玄學家們經常孔、墨並稱；此時，埋沒二百餘年的王充《論衡》也傳播開來。劉徽的無窮小分割思想中“不可割”的觀點與墨家“不可新”一脈相承，“微則無形”的觀點源於《莊子》“至精無形”，劉徽的推理方式受到王充影響 ··· 等等，當然也是時代的產物。

北宋大觀三年 (1109) 劉徽被封爲淄鄉男，據當時受封者多依其里貫來看，劉徽當是淄鄉人。據《漢書》的資料，淄鄉在今山東境內，可能在鄒平縣境。今山東地區，古是齊魯之邦，是儒學的發祥地，稷下學官招徠全國著名的學者，成爲百家爭鳴的

中心之一。經兩漢到魏晉，學術空氣十分濃厚，二、三世紀更出現了若干著名思想家，如徐幹、仲長統、鄭玄、王弼，曹魏時期，齊魯地區是正始之音辯難之風的中心之一，劉徽註中不僅明確引用《墨子》、《考工記》、《左氏傳》的話，而且對《周易》、《論語》、《管子》、《莊子》等先秦典籍的話，順手拈來，天衣無縫，說明他諳熟諸子百家言，是和他生活在齊魯地區，受到良好的文化教養並置身於辯難之風之中分不開的。另一方面，公元二、三世紀，齊魯地區數學比較發達，出現了劉洪、鄭玄、徐岳、高堂隆、王粲等數學家，這就給劉徽少年時師承賢哲，成年後“採其所見”，深入研究準備了豐富的資料。在這樣的客觀條件下，使劉徽有可能改變數學偏重實踐經驗、忽視理論研究的傳統，向既重視實踐，又重視理論研究的方向轉化。

而劉徽本人具有一個科學家的素養，則是他成功的內在因素。首先，他繼承了《九章算術》開創的數學聯繫實際的傳統。劉徽不管是證明《九章算術》的公式、解法，還是談及數學起源的哲理問題，都是實事求是，沒有神秘的成分。他說：“不有明據，辯之斯難。”全部《九章算術註》，其推理、證明都有可靠的論據和前提。他針對廣爲流傳的“隸首造數”的說法，指出“其詳未之聞也”。他在充分肯定了數學的作用之後說：“至於以法相傳，亦猶規矩度量可得而共，非特難爲也。”從根本上否定了聖人創造數學的看法。他批評張衡數學研究中欲協其陰陽奇偶而不顧數學上疏密的錯誤，指出“雖有文辭，斯亂道破義，病也。”與數字神秘主義劃清了界限。劉徽博覽群書，善於汲取歷代思想家的思想資料用於自己的數學創造，但是他不迷信古人。《九章算術》在東漢已是經典著作，劉徽爲之作註，對之自然十分推崇，然而劉徽並不盲從。他在全面論證了《九章算術》的公式、解法的同時，指出了它的若干錯誤及不精確處。如批評宛田術和開立圓術的錯誤。指出它有關圓或圓體的問題或術文“以

周三徑一爲率，皆非也。” 批評前人 “世傳此法，莫肯精覈，學者踵古，習其謬失。” 同樣，劉徽相信自己設計的牟合方蓋是解決球體積的正確途徑，然 “判合總結，方圓相纏，濃纖詭互，不可等正”，未能求出其體積。然而他決不不懂裝懂，故弄玄虛以欺世人，坦率地表示 “欲陋形措意，懼失正理，敢不闕疑，以俟能言者”，既表現了他 “知之爲知之，不知爲不知” 的實事求是作風，又反映了他寄希望於後學，相信後人能超過自己的坦蕩胸懷。劉徽認爲，用數學方法解決實際問題，應在認識數學精理的基礎上儘量使用靈活的方法，所謂 “設動無方”，而不應 “專於一端”。他以《莊子》中 “庖丁解牛” 的寓言作比喻，說 “數，猶刃也。易簡用之則動中庖丁之理，故能和神愛刃，速而寡尤。” 因此，他對一個問題常常提出幾種不同的解法，對一種解法，常常提出不同的理解途徑，大大豐富了《九章算術》的內容。

當然，我們在表彰這位數學巨匠的功績時，我們也不能不指出他的某些不足。劉徽在數學上無疑是位創造者、革新者。就他的數學水準，完全可以寫出一部水準更高的自成體系的著作來，然而他未能突破給經典著作作註的慣例，把自己的眞知灼見分散到《九章算術》中，這對後人理解《九章算術》當然大有裨益。但作註的形式卻限制了他的數學創造、數學方法的展開，也限制了他的思想對後世的影響。比如就極限思想而言，從現存中國古算著作看，在李善蘭及西方微積分學傳入中國之前，再沒有人超過甚至沒有達到劉徽的水準。劉徽說：“一者，數之母”，即把任何數都看成可以用 1 的積累表示出來，在有理數的範圍內這無疑是正確的。同時，這種思想對求圓周率的近似值，求無理根的近似值而不必考慮哲學上的困難，無疑也是有貢獻的。然而，這同時也關上了通向無理數的大門，使無理數的發現失之交臂。

文　　獻

[1] 九章算經， 南宋鮑瀚之刻本 (1213 年)， 文物出版社 1980 年影印， 收入《 南宋算經六種 》。

[2] 九章算經， 明《 永樂大典 》所引， 今存卷 16343－16344， 中華書局 1960 年影印 。

[3] 楊輝《 詳解九章算法 》所引《 九章算術 》， 清道光《 宜稼堂叢書 》本， 宋景昌校 。

[4] 九章算術， 清武英殿聚珍版 (木活字)， 戴震自 [2] 輯校 。

[5] 九章算術， 清《 四庫全書 》本， 同上 。

[6] 九章算術， 清戴震校， 孔繼涵刻微波榭本 。

[7] 九章算術， 錢寶琮校點《 算經十書 》， 中華書局， 1963 。

[8] 劉徽註《 九章算術 》， 日川原秀城譯， 朝日出版社， 1980 。

[9] 海島算經， 同 [7]。

[10] 九章算術細草圖說， 李潢， 清鴻語堂本 。

[11] 九章算術音義， 李籍， [4]、 [5] 之附錄 。

[12] 杜石然， 古代數學家劉徽的極限觀念， 《 初等數學史 》， 科技出版社， 1959 。

[13] 錢寶琮主編， 中國數學史， 科學出版社， 1964 。

[14] 李儼 、 杜石然， 中國古代數學簡史， 九章出版社， 1993 。

[15] Wagner (華道安), *An early Chinese derivation of the volume of a pyramid, Liu Hui*, third century A.D., Historia Mathematica, 1979, 6 。

[16] 李繼閔， 劉徽對整勾股的研究， 《 科技史文集 》， 第 8 輯， 上海科技出版社， 1979 。

[17] 郭書春，《九章算術》中的整數勾股形研究，同上。

[18] 嚴敦傑，劉徽簡傳，《科學史集刊》，第 11 集，地質出版社，1984

[19] 郭書春，劉徽的極限理論，同上。

[20] 郭書春，劉徽的體積理論，同上。

[21] 梅榮照，劉徽的方程理論，同上。

[22] 梅榮照，劉徽的勾股理論，同上。

[23] 李繼閔，從勾股比率論到重差術，同上。

[24] 郭書春，《九章算術》和劉徽註中之率概念及其應用試析，同上。

[25] 吳文俊，出入相補原理，《中國古代科技成就》，中國青年出版社，1978。

[26] 郭書春，劉徽的面積理論，《遼寧師範學院學報》，1983 第 1 期。

[27] 郭書春，劉徽《九章算術註》中的定義及其演繹邏輯試析，《自然科學研究》，1983 年，第 3 期。

[28] 吳文俊，《海島算經》古證探源，《<九章算術>與劉徽》，北京師範大學出版社，1983。

[29] 李繼閔，中國古代的分數理論，同上。

[30] 李迪，劉徽的數學推理方法，同上。

[31] 沈康身，更相減損術源流，同上。

[32] 李繼閔，略論《九章算術》理論體系之特色，同上。

[33] 郭書春，關於劉徽研究中的幾個問題，《自然科學史研究》，1983 年，第 1 期。

[34] 郭書春，《九章算術》方程章劉徽註新探，《自然科學史研究》，1985 年，第 1 期。

[35] 郭書春，關於《九章算術》勾股章劉徽註的校勘及劉徽的勾股理論系統，《自然科學史研究》，1985 年，第 4 期。

[36] 郭書春，劉徽思想淵源，《中國哲學史研究》，1984 年，第 2 期。

[37] 郭書春，試論劉徽的數學理論體系，《自然辯證法研究通訊》，1987 年，第 2 期。

[38] 郭書春，關於《九章算術》的版本，《數理化信息》(2)，遼寧教育出版社，1986。

[39] 郭書春，從劉徽《九章算術註》看我國古代對祖暅公理的認識過程，《遼寧師範大學學報》，1986 年增刊。

[40] 郭書春，評戴震對《九章算術》的整理和校勘，《明清數學史論文集》(待發表)。

[41] 郭書春，關於《九章算術》的校勘，《嚴敦傑紀念文集》。

[42] 郭書春，關於《九章算術》版本考。

[43] 郭書春，劉徽祖籍考 。

[44] 郭書春彙校《九章算術》，遼寧教育出版社。

[45] 郭書春，李籍《九章算術音義》試析，《自然科學史研究》，1989 年，第 3 期。

[46] 李繼閔，劉徽關於無理數的論述，《西北大學學報》，1989 年，第 1 期。