帕　波　斯

帕波斯 (Pappus of Alexandria) 生於亞歷山大， 約生於公元 290 年， 約卒於公元 350 年。 數學 、 天文 、 地理 。

帕　波　斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

帕波斯 (Pappus of Alexandria) 生於亞歷山大，約生於公元 290 年，約卒於公元 350 年。數學、天文、地理。

帕波斯是亞歷山大晚期的數學家。確定他的生活年代，主要的依據是他在註釋托勒密的書時提到他最近曾目睹一次日蝕。經考證，這次日蝕應發生在公元 320 年 10 月 18 日[1]([3])。另外，賽翁 (Theon of Alexandria，公元 390 年前後) 編寫的一份年代表，手稿現藏在萊頓，旁邊有註釋的字跡。對著戴克里先 (Diocletian，羅馬皇帝，公元 284－305 年在位) 的名字寫道：“此時帕波斯寫作”([4]，II，p.356)。這和前面的日蝕年代出入不大，可能在戴克里先時代他還年青，剛開始寫作。

帕波斯有不少著作，唯一流傳下來的正是最有價值的一種：《數學彙編》(*Mathematical Collection*)，簡稱爲《彙編》(*Collection*，或 *Synagoge*)，synagoge 的希臘原文是 $\sigma\upsilon\nu\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\eta}$，是收集，彙集的意思。《彙編》在歷史上佔有特殊的地位，這不僅僅是它本身有許多發明創造，更重要的是記述了大量前人的工作，保存了一大批現在在別處無法看到的著作。它和普羅克洛斯的《概要》是研究希臘數學史的兩大原始資料。

《彙編》原有八卷，卷 I 和卷 II 的前一部分已失傳。各卷寫於不同的年代，完成全書應在公元 320 年或 340 年之後。

目前唯一完善的版本是 F. 胡爾奇 (Hultsch) 校訂並翻譯的希臘文與拉丁文對照本，包括非常寶貴的導言、註解和附錄 ([1]) 唯

[1]在奧泊爾子 (Theodor von Oppolzer)《日月蝕典》(*Canon der finsternisse*，1887) 中是 3642 號。

一全部譯成現代語的有 P.V. 埃克 (Eecke) 的法文譯本 ([2])。 選擇其中一部分譯出的則較多， 而最早的拉丁文譯本是 F. 科曼迪諾 (Commandino， 1509 – 1575) 作出的 (1566)， 只是一部分。 以後在十七、 十八世紀及近代又有多種摘要譯本 (例如 [6])。

公元四世紀， 希臘數學已成強弩之末。 “黃金時代”(公元前 300 – 200) 幾何巨匠已離去五、 六百年， 公元前 146 年亞歷山大被羅馬人佔領， 學者們雖然仍能繼續研究， 然而已沒有他們的先輩那種氣勢雄偉、 一往無前的創作精神。 公元後， 興趣轉向天文的應用， 除門納勞斯 (Menelaus)、 托勒密在三角學方面有所建樹之外， 理論幾何的活力逐漸凋萎。 在此情況之下， 總結數百年來前人披荆斬棘所取得的成果， 以免年久失傳， 確是十分必要的， 這項任務由帕波斯來完成。

他爲此目的寫成《分析薈萃》(*Treasury of analysis*) 一書， 收錄了歐幾里得、 阿波羅尼奧斯等人著作重要部分， 可惜此書已失傳。 後來又有《彙編》之作， 其中的卷 VII 反映了《分析薈萃》的主要內容。 《彙編》不是希臘數學的百科全書， 它更像一本手册， 必須和原著一起研讀。 但由於許多原著已經散失， 《彙編》便成爲了解這些著作的唯一源泉。

《彙編》內容簡介

失傳的卷 I 和卷 II 的前 13 個命題大概和留下來的部分一樣， 是論述阿波羅尼奧斯的大數記法的， 相當於以 “萬”(10000， myriad) 爲底的乘冪表示法。

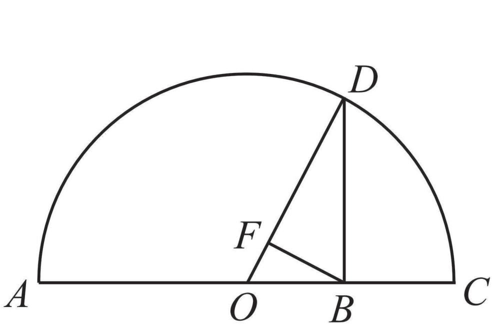
卷 III 分 4 節， 第 1 節將幾何問題明確地分爲三類： 1. 平面 (plane) 問題， 即可以用直尺圓規解決的問題； 2. 立體 (solid) 問題， 要用立體 (指圓錐) 的截線， 即圓錐曲線來解決。 3. 線性 (linear) 問題， 用比圓錐曲線更複雜的曲線來解決， 如螺線、 割圓

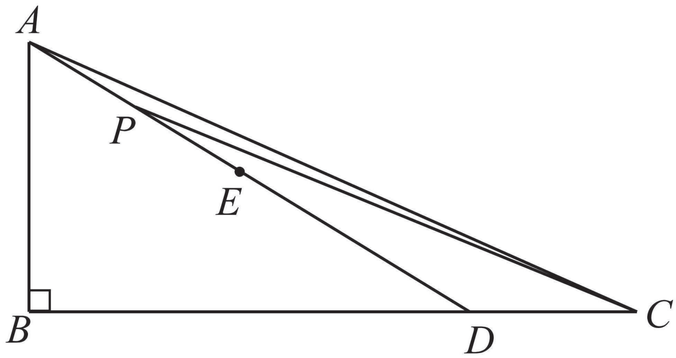
曲線 (quadratrices)、 蚌線 (cochloids)、 蔓葉線 (cissoid) 等。 這些曲線有的已有機械作圖法。

注意此處 “線性” 一詞的用法和現代迥然不同。 現在所謂 “線性” 就是 “直線性” 或 “一次性”， 但希臘當時的 “線” 包括直線和曲線， 這裡指的是曲線， 還特別將直線及圓錐曲線排除在外。 帕波斯指出求兩線段的兩個等比中項的問題 (即倍立方問題) 屬於立體問題， 這表明他已意識到不可能用尺規來解決。 這一事實直到十九世紀才獲得嚴格證明。

接著他給出埃拉托塞尼、 尼科米迪斯及海倫三家的倍立方問題解法。 最後補充聲稱是自己的第四種解法， 這和歐托基奧斯所說的斯波拉斯 (Sprous of Nicaea) 解法大同小異 ([4]， I， p.266)。

第 2 節討論各種中項 (平均)： 等差中項、 等比中項、 調和中項等。 記載某一位幾何學家 (沒有指名) 給出下述的關係： 設 ADC 是以 O 爲心， AOC 爲直徑的半圓， B 是 OC 上任一點， 作 $BD \perp AC$ 交半圓於 D， 連 OD， 作 $BF \perp OD$。 則 OD、 BD 分別是 AB 與 BC 的等差、 等比中項， 這是明顯的。 又 FD 是 AB 與 BC 的調和中項， 帕波斯對此沒有給出證明， 實際證明很容易 ([5]， p.438)。 除此以外， 還討論了其它六種中項。





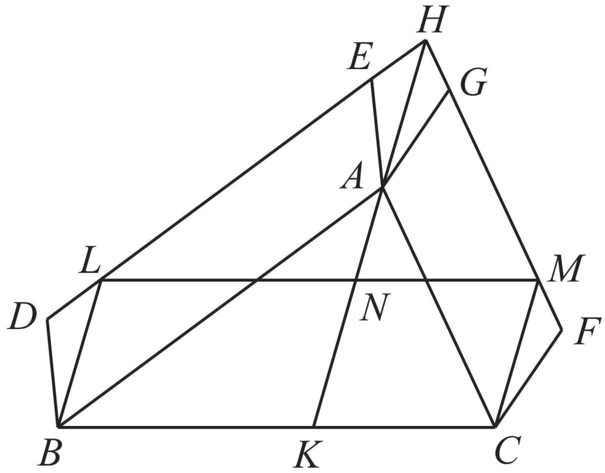
第 3 節有一系列的命題， 直接抄錄自艾里西諾斯 (Erycinus) 的《悖論集》(*Paradoxes*)， 內容和歐幾里得《原本》卷 I 第 21 命題有關。 這命題是： 從 $\triangle ABC$ 底邊 BC 的兩端點 B、 C 作直線交於三角形內一點 P， 則構成的 $\triangle BPC$ 兩邊之和 $BP + PC <$

$BA + AC$。帕波斯證明了如果直線不從兩端點而是從 BC 上某一點 D 出發，則構成三角形的兩邊之和可以等於或大於原三角形兩邊之和。例如在直角三角形 ABC 中，在底邊 BC 上取一點 D，連 AD，在其上取 E 使 $DE = BA$，取 EA 的中點 P，連 PC，則 $DP + PC > BA + AC$。其餘的命題與此類似，但複雜得多。

第 4 節論述如何作球的內接五種正多面體，和《原本》卷 XIII 的方法不同。

帕波斯並不是單純照錄前人的工作，他隨時提出自己的見解，包括對已有知識的修正、補充、評論、引申，也有些完全是獨創的。但他沒有處處都指明來源，以致常常分不清是誰的研究成果或者是他本人的發明。

卷 IV 第 1 節是勾股定理 (《原本》卷 I 命題 47，西方名爲畢達哥拉斯定理) 的推廣。設 $\triangle ABC$ 是任意三角形，在 AB、AC 上分別作平行四邊形 $ABDE$ 與平行四邊形 $ACFG$，延長 DE 與 FG 交於 H，連 AH。則平行四邊形 $ABDE$ 與平行四邊形 $ACFG$ 之和等於以 BC 及 AH 爲邊，夾角爲 $\angle ABC + \angle DHA$ 的平行四邊形。

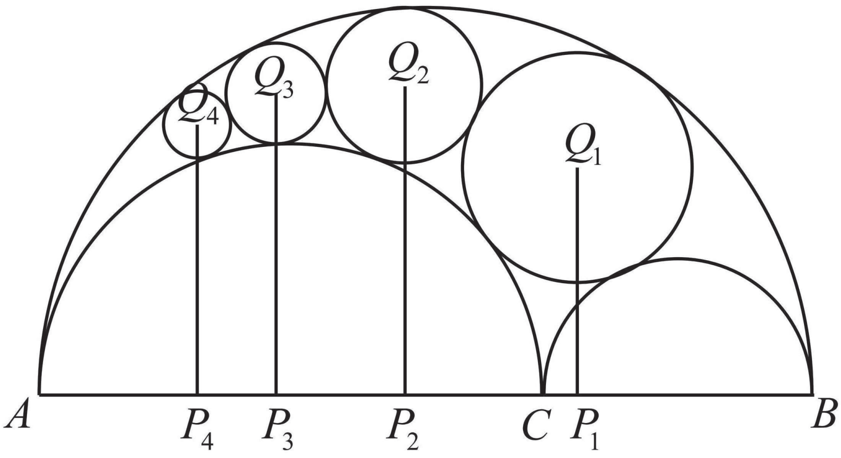


如圖所示，延長 HA 交 BC 於 K 點，且分別作 $CM // AH$、$BL // AH$。則不難證明平行四邊形 $BCML$ 等於 AB、AC 上的兩個平行四邊形之和。

這一節還有若干圓相切的問題。

第 2 節是引起人們極大興趣的 “皮匠刀”(shoemaker’s knife，’άρβηλος) 問題。所謂 “皮匠刀”，是三個半圓所包圍的部分，兩個小半圓外切，又同時內切於大半圓。阿基米德在《引理集》

(*Book of Lemmas*) 中曾經給出這圖形的一些性質。 帕波斯進一步加以探索。



在大半圓的直徑 AB 上任取一點 C，以 AC 及 CB 爲直徑分別作半圓， 就得到 "皮匠刀"。 設在 "皮匠刀" 內有一連串互相外切的圓 Q_1、Q_2、Q_3、 $\cdots$(同時又切於圓形的邊緣)，其直徑依次爲 d_1、d_2、d_3、 $\cdots$。分別從各圓的圓心向 AB 作垂線 P_1Q_1、P_2Q_2、P_3Q_3、 $\cdots$，帕波斯證明了

$$P_1Q_1 = d_1 \text{、} P_2Q_2 = 2d_2 \text{、} P_3Q_3 = 3d_3 \text{、} \cdots \text{。}$$

接著還討論了其它種種的情形[2]。

這一卷的其餘部分主要討論一些特殊曲線和怎樣利用這些曲線去解決 "三大問題"。 首先是阿基米德螺線， 他用不同於阿基米德的方法巧妙地求出第一圈和始線所包圍的面積。

其次描述了尼科米迪斯發明的蚌線， 並用蚌線解倍立方問題。尼科米迪斯的著作已失傳， 有賴帕波斯和其他學者的記載， 他的成果才保存下來。

接著闡述了 "割圓曲線"， 這曲線最初由希皮亞斯 (Hippias of Elis， 公元前 400 年) 提出， 後來狄諾斯特拉托斯 (Dinostratus) 和尼科米迪斯都研究過並用來 "化圓爲方"(作一正方形等於已知圓的面積)。

帕波斯給出兩種利用 "曲面軌跡"(surface-loci) 產生割圓曲線

[2] "皮匠刀" 問題在中國和日本常稱爲 "圓內容累圓術"， 日本人研究的甚多， 見藤原松三郎《日本數學史要》(東京都， 1956)， p.251； 林鶴一《和算研究集錄》(下， 東京都， 1937)， p.833 − 845。 中國周達 (1878 − ?) 著《巴氏累圓奇題解》(知新算社， 1904) 對此頗有發明。

的方法， 一種是用柱面螺旋線 (cylindrical helix)， 一種是以阿基米德螺線爲底的直柱。 他還陳述一種 “球面上的螺線”(spiral on a sphere)： 設球面上的子午圈 (通過南北兩極的大圓) 以過兩極的球直徑爲軸勻速旋轉； 在子午圈上有一點， 從北極出發勻速向赤道移動， 當子午圈旋轉一周回到原來的位置時， 此點同時到達赤道， 此點的軌跡叫做 “球面上的螺線” 。

最後帕波斯列舉了各種三等分任意角的方法。 包括雙曲線解法、 阿基米德螺線解法、 割圓曲線解法等， 還將一個角分成給定比的兩部分。

特別值得注意的是帕波斯在這裡用到了圓錐曲線的焦點準線性質， 又在卷 VII 中給出證明： 設一動點至一定點的距離與至一定直線的距離之比等於常數， 則動點的軌跡是圓錐曲線。 當這個常數等於 1 時是拋物線、 小於 1 時是橢圓、 大於 1 時是雙曲線 ([4]， I， p.243)。

奇怪的是在整個阿波羅尼奥斯的《圓錐曲線論》中竟沒有這個性質 (或定義)， 只提到橢圓和雙曲線的焦點而沒有提拋物線的焦點。 至於在他之前的阿里斯泰奥斯 (Aristaeus， 約公元前 340) 和歐幾里得是否已知這一性質， 未有定論。

卷 V 講的是 “等周問題”(isoperimetry)， 前面的序言有一段非常精采的關於 “蜜蜂的機敏” 的描寫 ([4]， II， p.389； [6]， II p.589)：

“蜂房是蜂蜜的容器， 它是許許多多的六稜柱形， 一個接一個， 中間沒有一點空隙。 這種設計的優點是避免雜物的滲入， 弄髒了這些純潔的產品。 蜜蜂希望有勻稱規則的圖案， 也就是等邊等角的圖形。 ... ... 鋪滿整個平面區域的正多邊形一共只有三種： 正三角形、 正方形和正六邊形。 蜜蜂憑著本能的智慧選擇了角最多的六邊形。 因爲使用同樣多的材料， 六邊形比三角形和正方形具有更大的面積， 從而可貯藏更多的蜜。 人的智慧比蜜蜂

更勝一籌， 我們能夠研究更一般的問題， 知道在周界相等的正多邊形中， 角越多面積越大。 周界相同， 面積最大的平面圖形是圓”。

帕波斯如果進一步觀察蜂房的底部， 會令他更加驚奇， 那是由三個相同的菱形組成的， 菱形的一個角總是 $109°28'$。 這引起十八世紀時學者們一系列的研究[3]。

本卷第 1 節介紹和補充芝諾多羅斯 (Zenodorus， 約公元前 180) 的工作， 他曾著《論等積形》(*On isometric figures*) 一書， 已失傳， 若干命題保留在賽翁 (Theon of Alexandria) 給托勒密《天文集》卷 I 所作的註釋中。 帕波斯所列舉芝諾多羅斯的命題有：

(1) 周長相等的正多邊形中， 邊數越多的面積越大；

(2) 圓面積比有同樣周長的正多邊形面積大；

(3) 周長相等的 n 邊形中， 正 n 邊形面積最大；

(4) 表面積相等的立體中， 球的體積最大。

帕波斯補充了一個命題： 周長相等的弓形中， 半圓的面積最大。

第 2 節比較各種表面積相等的立體的體積。 帕波斯並不企圖證明球體積比一切表面積相等的立體都大。 只是證明比表面積相等的正多面體以及錐體、 柱體的體積大。

第 3 節記述了阿基米德發現的十三種半正多面體， 這是別的資料所沒有的。 半正多面體就是由若干類的正多邊形構成的多面體， 每一類正多邊形必須相等， 例如 18 個相等的正方形和 8 個相等的正三角形構成一個 26 面體。

第 4 節是和阿基米德《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*) 有關的一些命題。

第 5 節證明了五種正面體若有相同的表面積， 則面數越多， 體積越大。

[3]參見梁宗巨《世界數學史簡編》， 遼寧人民出版社， 1980， p.500。

卷 VI 主要講天文學，指出許多書中的遺漏和錯誤。有的是疏忽造成的，有的表達不夠確切，也有的可以進一步改進。提到的書有托勒密《小天文學》(*Little astronomy*)[4]，西奥多修斯 (Theodosius of Bithynia)《球面學》(*Sphaerica*)、《論晝夜》(*On days and nights*)，門納勞斯《球面學》(*Sphaerica*)，奥托利科斯 (Autolycus of Pitane)《運行的天體》(*On moving sphere*)，還有歐幾里得《現象》(*Phaenomena*)、《光學》(*Optics*) 等。

卷 VII 是全書最重要的一卷，它除了保存大量已失傳的著作外，更難能可貴的是富有啓發性的思想，對後來數學的發展有深刻的影響。他收集了十二種書，視爲幾何學的精華，構成他的《分析薈萃》。他認爲通過《原本》的學習之後，要登堂入室，達到更高的境界，就要掌握這些知識。

他列舉的書除了歐幾里得《已知數》(*The data*) 和阿波羅尼奥斯《圓錐曲線論》(*Conics*) 之外，其餘十種均已失傳。計有：歐幾里得《推論集》(*Porisms*)、《曲面軌跡》(*Surface-loci*)；阿波羅尼奥斯《截取線段成定比》(*Cutting-off of a ratio*)、《截取面積等於已知面積》(*Cutting-off of an area*)、《確定的截線》(*Determinate section*)、《論接觸》(*Contacts*)、《傾斜》(*Inclinations*)、《平面軌跡》(*Plane loci*)；阿里斯泰奥斯 (Aristaeus)《立體軌跡》(*Solid loci*)；埃拉托塞尼《論平均值》(*On means*) ([4]，II，p.401)。

帕波斯用 “分析” 作爲書名，爲了明確起見，他在本卷之首，先給出 “分析” 與 “綜合” 的定義。這本來是哲學或邏輯學的術語，是指思維的一種基本過程和方法。分析是把事物分解爲各個屬性、部分、方面，而綜合是把事物的各個屬性、部分、方面結合起來。但在數學中，意義完全不同。分析法是由結論推到前提的方法，即先假定結論是眞的，倒推回去，推出一已知爲眞

[4]這是一本入門書，用此名以區別於他的巨著《天文集》(*Syntaxis*)。帕波斯列舉的書有許多是收集在此書中的。

的命題。 又如果每一步都是可逆的， 就等於證明了從已知命題可以推出結論。 在幾何作圖題中， 常常先設圖形已經作出， 然後進行推理， 從中發現圖形的性質， 於是找到作圖的方法。 這一步驟叫做分析， 現在仍然是常用的方法。 粗略地說， 分析法就是一種倒推法。 而綜合法的過程與此相反， 是由已知推出所要證明的結論。 這種定義最早記載在歐幾里得《原本》卷 XIII 第 1 命題的後面， 是後人補充上去的 ([7]， III， p.442)。 最先提出這個定義大概是歐多克索斯 (Eudoxus， [8]， p.27)， 帕波斯在這一卷裡再一次加以肯定。

帕波斯在介紹各家的學說時， 常提出自己一些新的見解。 他綜述了阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》， 其中卷 III 有關於 “3 或 4 條直線的軌跡” 問題： 設 p_1 、 p_2 、 p_3 或 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 是一點到 3 或 4 條固定直線的距離 (或者是垂直距離， 或者量距離的直線與固定直線交於一定的角度)， 若 $p_1p_2 = \lambda p_3^2$(3 直線的情形) 或 $p_1p_2 = \lambda p_3p_4$ (4 直線的情形)， 其中 λ 是常數， 則點的軌跡是圓錐曲線。 帕波斯將它推廣到 5 條或 6 條直線： 設一點到 5 條或 6 條固定直線的距離爲 p_1 、 $\cdots$ 、 p_5 或 p_1 、 $\cdots$ 、 p_6， 若 $p_1p_2p_3 = \lambda p_4p_5a$ 或 $p_1p_2p_3 = \lambda p_4p_5p_6$， 其中 a 是一給定線段的長， 則點的軌跡也是一條確定的曲線， 但這曲線 (自然比圓錐曲線複雜) 尚未被研究出來。

他進一步推廣到任意條固定的情形， 這裡遇到一個困難。 當時希臘人將兩條線段的乘積看作面積， 3 條線段的積看作體積， 3 條以上的積沒有幾何意義， 應該避免出現。 帕波斯巧妙地用複比的辦法來克服了這一困難， 因爲兩條線段的比已不是線段， 若干個比可以任意相乘。 於是命題可以表達爲： 若一點到 n 條固定直線的距離爲 p_1 、 $\cdots$ 、 p_n， 如果

$$\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{p_3}{p_4}\cdots\frac{p_n}{a} = \lambda \quad (n \text{ 是奇數時})，$$

或

$$\frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{p_3}{p_4} \cdots \frac{p_{n-1}}{p_n} = \lambda \quad (n\text{ 是偶數時})\text{，}$$

則點的軌跡是一確定的曲線。

這問題的歷史意義在於，他提出了一個重要的軌跡問題，啓發人們去思考。一千多年之後，終於導致一個新領域 — 解析幾何的誕生。笛卡兒 (1637) 用代數方法去研究 “多條直線問題”，這是促使他去創立解析幾何的主要動機之一。他在《幾何學》(*La Géométrie*) 中用大量的篇幅徵引了帕波斯的著作 (拉丁譯文) 並從這一問題入手去闡發坐標幾何思想 (見 [9])。牛頓在《自然哲學之數學原理》第 1 編第 5 章 ([10]，p.129) 也詳細討論了 “4 直線軌跡問題”，用純粹幾何方法去證明軌跡是圓錐曲線。

帕波斯另一項值得稱道的貢獻是提出後來稱爲 “古爾丁[5] 定理” 的命題：“封閉的平面圖形圍繞同一平面內且不與之相交的軸迴轉，所產生的體積等於這圖形面積乘以圖形重心所描畫出的圓周的長”。他還進一步斷言：“可以將封閉平面圖形改成一段平面曲線，它迴轉所產生曲面面積等於曲線的長乘以其重心所畫過的圓周的長。”[6]帕波斯只敍述而沒有證明。後來古爾丁在他的書 (1635 − 1641) 中重提這個定理，實際上他也沒有證明，只是作了 “形而上學的推理”(metaphysical reasoning)。卡瓦列里 (Bonaventura Cavalieri，1598 − 1647) 指出這一缺陷後用自己創立的 “不可分法” (method of indivisibles) 去證明它。

帕波斯在介紹上述各種著作時，原是爲了便於讀者理解，先給出一系列引理。而現在卻可以通過這些引理去推測已失傳著作的內容。這些引理也有其本身的價值，它包括很多新的思想。例如已經出現屬於射影幾何學的一些概念，如對合 (involution)、非調和

---

[5]Paul Guldin，1577 − 1643，瑞士人。

[6]有一種意見認爲這個命題是後來的註釋者加上去的，但沒有充分的理由。希思 (Heath) 則肯定在帕波斯前後，沒有別的人能發現這樣的命題 ([4]，II，p.403)。此說已爲多數人所接受。

比 (anharmonic ratio， 即 cross ratio， 交比)[7]等。 這些概念未必是他的發明， 但至少已熟練掌握， 爲後世的射影幾何研究提供了線索。

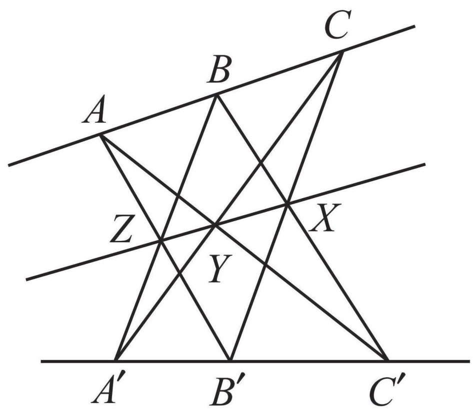
根據引理的內容， 可以推斷阿波羅尼奥斯《 確定的截線 》一書實際相當於一部 “對合的理論”， 交比的概念出現也很早[8]， 門納勞斯 (公元 100 年) 在《 球面學 》中已用到球面上的交比性質。

帕波斯有一些引理可以歸入幾何代數學的範圍， 即用幾何的形式表達代數的內容。 例如， 設 $ax = by$， 則

$$\frac{a}{x} = \frac{(a-y)(a-b)}{(b-x)(y-x)} \text{ 及 } \frac{b}{y} = \frac{(a-b)(b-x)}{(a-y)(y-x)}$$

等。

最有名的是爲歐幾里得《 引理集 》所作的引理 13 (即命題 139)： A 、 B 、 C 是一直線上的 3 點， A' 、 B' 、 C' 是另一直線上的 3 點， AB' 與 $A'B$ 交於 Z， BC' 與 $B'C$ 交於 X， CA' 與 $C'A$ 交於 Y， 則 X 、 Y 、 Z 三點共線。 這命題一直被稱爲 “帕波斯定理”。



卷 VIII 的主要內容是力學。 他在序言中極力維護力學是數學一部分的主張， 強調力學的價值絕不僅僅因爲有實際應用。 本卷一開始就給出重心的定義： 物體的重心是這樣的點， 如果在那一點將物體懸掛起來， 物體就靜止不動， 不管放的位置如何。 接著研究斜面的作用， 指出通過五個已知點作圓錐曲線的方法， 解決作七個全等的正六邊形內接於一個圓的問題， 還論述了齒輪、 螺釘、 槓桿和滑輪等。

帕波斯還寫過關於地理、 音樂、 流體靜力學等方面的書， 註

[7]非調和比之名是 M. 夏斯萊 (Chasles， 1793 − 1880) 引入的， W.K. 克利福德 (Clifford， 1845 − 1879) 則稱爲交比。

[8]大概在歐幾里得之前已經知道。

釋過托勒密、歐幾里得的著作。他是博學多才的，主要的貢獻是收集、總結、補充和評述幾乎是整個希臘時期的學術工作，使它流傳下來並發揚光大，其功不可磨滅。

文　　獻

原始文獻

[1] F. Hultsch, *Pappi alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentarii instruxit Friedericus Hultsch*, Berlin, 1876 – 1878。

[2] P.V. Eecke, *Pappus d'Alexandrie, La Collection Mathématique: oeuvre traduite pour la première fois du grec en français avec une inroduction et des notes*, Paris-Bruges, 1933。

研究文獻

[3] A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, I, Rome, 1931。

[4] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxfrod at the Clarendon Press, 1921。

[5] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxfrod at the Clarendon Press, 1931。

[6] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, 1957。

[7] T.L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements*, Dover Publications, Inc., 1956。

[8] F. Cajori, *A history of mathematics*, Macmillan Company, 1919

[9] M. Latham, D.E. Smith, *The geometry of René Descartes*, Dover Publications, Inc., 1954。

[10] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687 (中譯本：牛頓，自然哲學之數學原理，商務印書館，1931)