

# 祖 冲 之

祖冲之字文元。范陽道郡（今河北涿源）人。南北朝劉宋元嘉六年（公元 429 年）生於建康（今江蘇南京）；蕭齊永元二年（公元 500 年）卒。天文曆法、數學。

祖冲之的圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

[http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zu\\_Chongzhi.html](http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zu_Chongzhi.html)

# 祖 冲 之

杜 石 然

(中國科學院自然科學史研究所)

祖冲之字文元。范陽道郡(今河北涿源)人。南北朝劉宋元嘉六年(公元429年)生於建康(今江蘇南京);蕭齊永元二年(公元500年)卒。天文曆法、數學。

祖冲之的祖籍雖然在河北，但他自己卻是生長於南北朝時期南朝的政治、經濟中心建康(今南京)。自東晉南遷以來，江南地區的經濟得到迅速發展。水利和農業技術得到了改良，牛耕在南方普及。人口顯著增加，紡織、冶煉、陶瓷、造船等手工業技術也有明顯的發展，出現了一些繁榮的城市，建康就是其中較為突出的一個。

祖冲之出生在一個官宦人家。他的曾祖父祖台之，在東晉時，曾官至侍中、光祿大夫。祖父祖昌、父親祖朔之都曾在南朝做官，祖父是管理建築工程的官員——大匠卿，父親曾任奉朝請。這個家庭的歷代成員，大都對天文曆法有些研究。

從青年時起，祖冲之便對天文學和數學發生了濃厚興趣。爲了反駁別人責罵他不學無術，他曾在著作中自述說，從很小的時候起便“專功數術，搜煉古今”。他把從上古時起直至六世紀他生活的時代止的各種文獻、記錄、資料，幾乎全都搜羅來進行考察。同時，他又主張決不“虛推古人”，決不把自己束縛在古人陳腐的錯誤結論之中，並且親自進行精密的測量和仔細的推算。像他所說的那樣，每每“親量圭尺，躬察儀漏，目盡毫釐，心窮籌策”。祖冲之批判地接受前一代的學術遺產。利用並尊重其中一切正確有用的東西，再經過辛勤的實際工作，進行考核，敢於懷疑

古人錯誤陳舊的結論，並勇於提出自己的新見解，這正是古往今來一切傑出科學家的共同品質。

還是在青年時代，他便針對劉歆、張衡、鄭玄、闕澤、王蕃、劉徽等人的工作進行了仔細的研究，一一駁正了他們的錯誤並且導出了許多極有價值的結果。在這些成果中，準確到七位有效數字的圓周率數值，便是人所共知的例子。

他堅持這種嚴謹的治學態度，對過去科學家們的工作反覆進行考核，就是對他的前輩著名天文學家何承天，也是如此。經過實際觀測，他指出何承天所編製的為當時的劉宋王朝所奉行的元嘉曆，有不少錯誤。祖沖之指出，元嘉曆所推算的冬至時太陽所在宿度距實測已差3度，冬至、夏至時刻已差1天，五星的出沒時間差40天。於是，他著手編制了新曆法——大明曆，對曆法的編制做出了很多創造性的貢獻。大明曆是這個時代的一部最好的曆法。

大明六年(公元462年)，他上表給劉宋王朝的皇帝劉駿，請對新的曆法進行討論，予以頒行。這一年，祖沖之只有33歲。雖然他還很年輕，但事實上他已經攀登上了他生活時代的科學高峰。

但是新的曆法卻遭到皇帝寵幸的戴法興的反對。朝中百官懼於戴的勢力，多所附和。祖沖之則勇敢地進行了辯論，寫出了一篇非常著名的“駁議”呈送給皇帝。這篇理直氣壯、詞句鏗鏘的論文，充分顯示了祖沖之橫生洋溢的才華和敢於堅持真理的高貴品質。在“駁議”中，他寫下了兩句名言：“願聞顯據，以核理實”，“浮辭虛貶，竊非所懼”。為了明辨是非，他願意彼此拿出明顯的證據來相互討論，至於那些捕風捉影無根據的貶斥，他絲毫不懼怕。這場辯論反映了進步與保守、科學和反科學兩種勢力的鬥爭。見解保守的戴法興認為，曆法中的傳統持續下來的方法是“古人制章”、“萬世不易”的；他責罵祖沖之是什麼“誣天

背經”，認為天文和曆法是“非凡夫所測”、“非沖之淺慮，妄可穿鑿”的。祖沖之卻大不以為然。他反駁說，不應該“信古而疑今”，假如“古法雖疏，永當循用”，那還成什麼道理！日月五星的運行“非出神怪，有形可檢，有數可推”，只要進行精密的觀測和研究，孟子所說的“千歲之日至（指冬至、夏至）可坐而致也”，是完全可以做得到的。

科學的每一個進步，經常要和保守的勢力進行不調和的鬥爭，有時這種鬥爭會是很尖銳的。在這裡，祖沖之為我們樹立了光輝的榜樣。

由於種種阻礙，大明曆直到公元 510 年，經過劉宋王朝和蕭齊王朝，直到梁王朝天監九年，由於祖沖之的兒子祖暅的堅決請求。經過實際天象的校驗，才得以正式頒行。但是這已經是祖沖之死後十年的事了。

從劉宋時代起，祖沖之就開始在朝廷裡當品位不算高的小官。他歷任南徐州（今江蘇鎮江）從事史，公府參軍等職，還做過婁縣（今江蘇昆山）縣令，也做過謁者僕射等官。到了蕭齊王朝，祖沖之曾官至長水校尉，這是他一生官階最高（四品）的官職。這時他寫了“安邊論”等討論屯田、農殖等方面應採取的政策的政策性文章。齊明帝（公元 494 - 498 年在位）想令他“巡行四方，興造大業，可以利百姓者”，後因發生戰爭而作罷。這時，祖沖之已是風燭殘年，老死將至了。

特別值得注意的是，自從大明曆因受到皇帝寵幸人物的反對而未及時頒行受挫之後，在祖沖之的工作中，像在大明曆編制過程中所表現出的那種氣魄便不多見了。他好像是生長在養分不足的土壤裡，這樣的土壤，人們是不可能期望獲得一次比一次更加豐碩的成果的。歷史產生了如此的天才，但從另一個意義上又扼殺了如此的天才，這難道不正是在中國漫長的封建社會中，無數傑出人物的共同命運嗎？

祖沖之生平著作很多，內容也是多方面的。如上所述，在天文曆法方面有大明曆(附“上《大明曆》表”、“駁議”，均載《宋書·曆誌》)。他在數學方面的論著不幸均已失傳。《南齊書·祖沖之傳》中說他曾“註《九章》，造綴術數十篇”。在歷代國內外的各種圖書目錄中可以見到他所寫的數學著作的書名有：《綴術》(或題為其子祖暅所撰，或未具名)六卷、《九章術義註》九卷、《重差註》一卷。在古代典籍的註釋方面，祖沖之有《易義》、《老子義》、《莊子義》、《釋論語》、《釋孝經》等著作，但亦均失傳。文學作品方面，他曾著有《述異記》十卷(此書已佚，但是《太平御覽》等書中可以看到其中片斷)。

《隋書·經籍誌》中列有《長水校尉祖沖之集》51卷，這可能是他全部著作或是部分著作的彙集，可惜早已失傳了，現僅可知其中收有“上《大明曆》表”、“駁議”、“安邊論”等等。

祖沖之在數學方面的成就，首先應該敘述的乃是關於圓周率的計算。

在中國古代，也和世界上任何文化開發較早的國家和地區一樣，最早被人們使用的圓周率是3。這一誤差很大的數值，在中國一直被沿用到漢代。入漢以後，對圓周率的改進吸引了不少科學家的注意，例如劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗等人都進行了研究。在許多人的工作中，生活於魏晉之際的數學家劉徽的研究最為重要。假如把劉徽稱為是祖沖之的先行者，那他確實是當之無愧的。

劉徽在計算圓面積的過程中，實際上也計算了圓周率。劉徽從圓的內接正六邊形起算，依次將邊數加倍，分別求出內接正12、24、48、……等內接正多邊形的一邊之長，從而算出內接正24、48、96、……等正多邊形的面積。邊數增加的越多，內接正多邊形面積與其外接圓面積之差愈小，算得的圓面積也就愈準確，求得的圓周率也就更加精密。邊數增加愈多，像

是把圓愈割愈細，因此劉徽的這種方法稱為“割圓術”（載於現有傳本的劉徽註《九章算術》之中）。劉徽用這種方法求得圓周率  $157/50$ （相當於  $\pi = 3.14$ ），也有人認為他還得了  $3927/1250$ （相當於  $\pi = 3.1416$ ）。

關於祖沖之在圓周率方面的工作，其史料僅見於《隋書·律曆誌》，但記載過於簡略，下面就是此段記載的原文：

“古之九數，圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒各設新率，未臻折衷。宋末，南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二數之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五。約率：圓徑七，圓周二十二。”

這段記載說明：

(1) 祖沖之的圓周率方面的工作，是在劉歆、張衡、劉徽等人工作之上“更開密法”的。

(2) 他以 1 億為 1 丈，即由  $10^8$  一 九位數字開始進行計算。

(3) 他算得過剩近似值和不足近似值，同時指出真值在過剩、不足二近似值之間，相當於算得了

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927。$$

圓周率的這一數值作到了小數點後七位數字準確。

(4) 他還給出了兩個近似分數值，即

$$\text{密率：} \pi = \frac{355}{113} (\doteq 3.14159292, \text{ 即小數點後六位準確})$$

$$\text{約率：} \pi = \frac{22}{7} (\doteq 3.14285714, \text{ 即小數點後二位準確})。$$

關於祖沖之如何算得如此精密結果，關於他所使用的方法，則沒有任何史料流傳下來，這是非常遺憾的。不過，根據當時的情況來進行判斷，除開繼續使用劉徽“割圓術”之外，並不存在有其

它方法的任何可能性。清代的數學史家大都認為“厥後祖沖之更開密法，仍割之又割耳，未能於徽法之外別有新法也”(阮元《疇人傳·祖沖之》)，梅文鼎的著作以及《數理精蘊》等書，也都持這種觀點。實際上，如按劉徽方法“割之又割”，繼續算至圓內接正 12288 邊形和正 24576 邊形，得出

內接正 12288 邊形面積： $S_{12288} = 3.14159251$  方丈，

內接正 24576 邊形面積： $S_{24576} = 3.14159261$  方丈。

又根據劉徽割圓術可得下列不等式(式中  $S$  表示圓面積)：

$$S_{24576} < S < S_{24576} + (S_{24576} - S_{12288}),$$

即可得出

$$3.14159261 < \pi < 3.14159271,$$

而這正是《隋書·律曆誌》所給出的盈朒二限。

把 1 丈化爲 1 億，從圓的內接正六邊形算至正 24576 邊形(=  $6 \times 2^{12}$  邊形)，需要把同一個計算程序反覆十二次，而每個計算程序又包括加、減、乘、除、開方等十餘個步驟。因此，祖沖之爲了求得自己的結果，就要從 100000000 (九位數字) 算起，反覆進行加、減、乘、除、開方等運算 130 次以上。即使是今天，用紙和筆進行這樣的計算，也絕不是一件輕鬆的事，更何況中國古代的計算都用羅列算籌來進行的。可以想像，這在當時是需要何等的精心和超人的毅力。

由於在中國古代有利用分數進行計算的習慣，祖沖之還給出了密率 ( $355/113$ ) 和約率 ( $22/7$ )。

一個無理數可以用連分數形式來進行表示，例如圓周率即可表

示成連分數：

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

或記爲  $\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} + \dots\dots$ ，也可以記成

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \dots\dots],$$

依次截取、計算即可得出一串關於  $\pi$  的數值，例如

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} = \frac{333}{106} \text{ (相當於 } \pi = 3.141509431),$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} = \frac{355}{113},$$

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{1} + \frac{1}{292} = \frac{103993}{33102}$$

(相當於  $\pi = 3.141592653$ ),

.....

這一串數值都是最佳漸近分數值 (即這串數值  $P/Q$ ，都是在所有分母不大於  $Q$  的分數中與  $\pi$  最接近的分數值)。但是反過來說，最佳漸近分數值卻不一定都是由連分數來算得的。例如在  $103993/33102$  之前 (即在分母小於  $33102$  的分數中) 還有許多個最佳漸近分數值，最靠近  $355/113$  的是  $52163/16604$ 。因此也可以說，在分母小於  $16604$  的近似分數值中， $355/113$  是最佳分數，最與  $\pi$  接近。

但直到目前爲止，我們還沒有發現任何證據足以說明中國古代已有連分數的應用。

在中國古代的天文曆法的計算中，曾有過一種逐漸調整分母和分子數值以求得使分數值更加接近真值的方法，叫作“調日法”。宋代學者認為“調日法”始自南北朝時期稍早於祖沖之的何承天。“調日法”的基本內容是：假如  $a/b$ 、 $c/d$  分別為不足和過剩近似分數，則適當選取  $m$ 、 $n$ ，新得出的分數  $(ma + nc)/(mb + nd)$  有可能更加接近真值。例如由  $157/50$  (劉徽) 和  $22/7$  (祖沖之約率) 即可算得

$$\frac{157 \times 1 + 22 \times 9}{50 \times 1 + 7 \times 9} = \frac{355}{113},$$

又由  $3/1$  (古率) 和  $22/7$  亦可算得  $(3 \times 1 + 22 \times 16)/(1 \times 1 + 7 \times 16) = 355/113$ 。用“調日法”算得的分數值，再用割圓術求得的精確數值來校驗，即可斷定  $355/113$  為“密率”。

在西方，直到 1573 年，德國數學家 V. 奧托 (Otho, 1550? – 1605) 方才算得  $355/113$  這一數值；而在一般西方數學史著作中卻常誤以為這一數值是荷蘭工程師 A. 安托尼茲 (Anthonisz, 1527 – 1607) 得到的，因而稱  $355/113$  為安托尼茲率。日本數學史學家三上義夫 (1875 – 1950) 主張將  $355/113$  這一圓周率數值稱為“祖率”。

按《隨書·律曆誌》的記載，祖沖之曾用  $355/113$  這一圓周率來校算王莽所造的量器——“律嘉量斛”。約率  $22/7$  雖僅精確至小數點後二位數字，但使用起來是方便的。

關於球體體積的計算，乃是祖沖之在數學方面的又一項成就。祖沖之在批駁戴法興的“駁議”中說：“至若立圓 (球體) 舊誤，張衡述而弗改，……此則算氏之劇疵也……臣昔以暇日，撰正衆謬”，可見這也是祖沖之早年的工作。然而在七世紀，在唐代李淳風為《九章算術》所寫的註文中，卻把它作為“祖暅開立圓術”加以引述，因而也可以認為這是一項祖氏父子共同的研究結果。在中國古代，例如在《九章算術》中，是按外切圓柱體與球體體積之比等於正方形與其內切圓面積之比來進行球體體積計算

的。劉徽指出了這一錯誤並正確地提出“牟合方蓋”(垂直相交的二圓柱體的共同部分)與其內切球體體積之比,方才等於正方形與其內切圓面積之比。但是他卻未能求出“牟合方蓋”的體積。這一問題被祖氏父子解決了。祖氏父子的方法是:

首先取一立方體(高 = 半徑  $r$ ),以左下角為心,  $r$  為半徑,分縱橫二次各截立方體為圓柱體(如圖 1)。如此,立方體將被分成

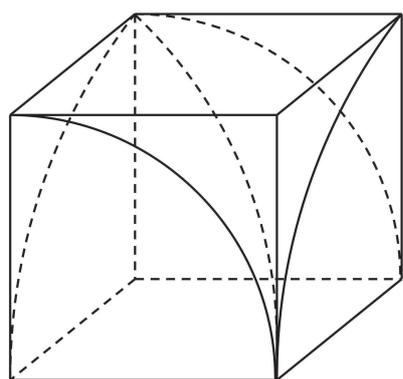


圖 1

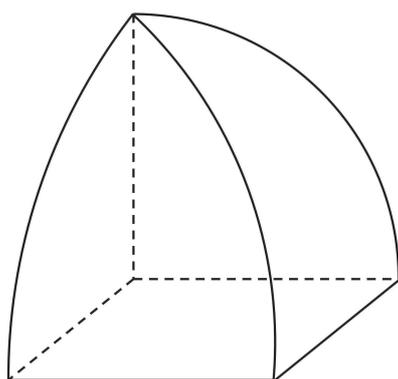


圖 2

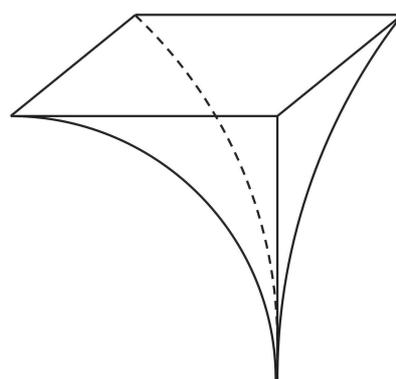


圖 3

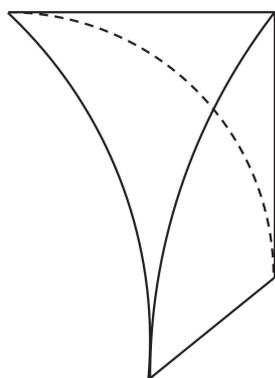


圖 4

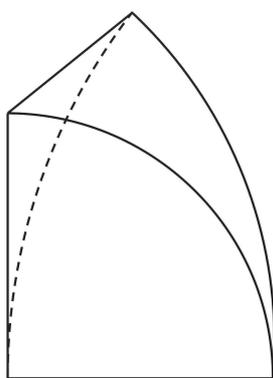


圖 5

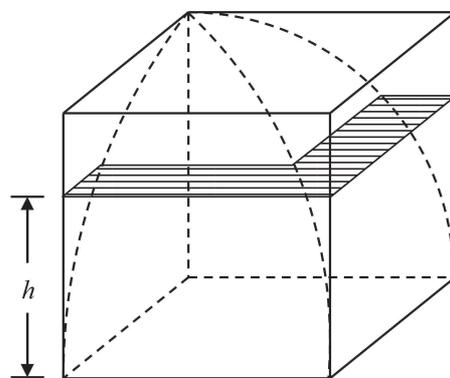


圖 6

四部分:兩個圓柱體的共同部分(即“牟合方蓋”的  $1/8$ ,祖氏父子稱之為“內棋”,如圖 2),以及其餘的三部分(“外三棋”,如圖 3、4、5)。

其次為算出“內棋”體積,他們先算出“外三棋”體積。方法是:將內、外棋再合成一個立方,在高為  $h$  處作一平行於底的平面(如圖 6)。如設“外三棋”的橫截面面積為  $S$ ,則

$$S = r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$$

再取一個高與底方每邊長度均為  $r$  的方錐，倒立之，則易算得這個方錐在高為  $h$  處的橫截面積亦為  $h^2$ 。

再次，“外三棋”和方錐在等高處的截面積總是相等，祖氏父子說“疊棋成立積，緣冪勢既同則積不容異”，這兩個立體體積不容不等。於是算得“外三棋”體積與一個方錐體積相等，即等於  $1/3$  立方體，從而算得“牟合方蓋”體積為  $2/3$  立方體。

最後再應用劉徽的成果：

球體積：“牟合方蓋”體積 = 圓面積：外切方面積  
從而得球體積的正確公式：

$$\text{球體積} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} \cdot \frac{2}{3}(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

在這裡，祖氏父子應用了“緣冪勢既同則積不容異”的原理，這一原理和義大利數學家 B. 卡瓦列里 (Cavalieri, 1598 – 1647) 所提出的“卡瓦列里公理”的意義是相同的。按道理，應該將“卡瓦列里公理”改稱之為“祖氏公理”。

在談到祖沖之在數學方面的成就時，我們還應提到那部失傳已久的《綴術》。

《隋書·律曆誌》在記述了祖沖之在圓周率方面的成就之後說：“(祖沖之) ... 又設開差冪、開差立，兼以正員 (按：應為“負”) 參之，指要精密，算氏之最者也。所著之書稱為《綴術》，學官莫能究其深奧，是故廢而不理。”唐代王孝通在其所著《緝古算經》的“自序”中說“祖暅之《綴術》(在古代史料中，多有將《綴術》記為祖暅所撰者) 時人謂之精妙，曾不覺方邑進行之術，全錯不通，芻蕘、方亭之問，於理未盡”。根據這二條資料，可知《綴術》的內容有“開差冪、開差立”、有“方邑進行之術”、有“芻蕘、方亭之問”。這些問題，據研究推斷，可能是一些有關二、三次方程的解法，“兼以正負參之”也可能是指其中的係數可正可負。假如這種推斷是對的，那麼可以說這些成

果成爲後世宋元時期中國數學家高次方程解法的先聲。

唐顯慶元年(公元 656 年)國子監添設算學館，規定《綴術》是必讀書籍之一，學習期限爲四年，是時限最長的一種。《綴術》還曾流傳至朝鮮和日本，在朝鮮、日本古代教育制度、書目等資料中，都曾提到《綴術》。

《宋史·楚衍傳》中說“楚衍……於《九章》、《緝古》、《綴術》、《海島》諸算經尤得其妙。……天聖(1023-1031)初造新曆”，可見宋初時期《綴術》或者尚未失傳。

祖沖之在天文曆法方面的成就，大都包含在他所編制的大明曆和爲大明曆所寫的“駁議”之中。

按祖沖之的自述，大明曆“改易之意有二，設法之情有三”。所謂“改易”，是指閏週的改革和在曆法計算中考慮歲差的影響；所謂“設法”則都是和上元積年的推算有關係。

中國古代的天文學家開始時認爲：太陽在黃道上，從冬至點開始，經過一個迴歸年的運行又回到原來的冬至點，即開始時認爲冬至點是固定不變的。但經過長時期的觀察，逐漸認識到太陽回不到原來的冬至點，也就是說冬至點每年都要向後(即向西)移動。據現代的觀測，冬至點大約每年沿黃道後移  $50.2''$ ，換算成赤經度數則爲大約 78 年後移  $1^\circ$  (如按古代以  $365\frac{1}{4}$  度爲一周年，則爲約 77 年後移 1 度)。這就是歲差現象，它是由太陽、月亮和其它行星對地球赤道突出部分的引力使地球自轉軸產生進動所引起的。

中國古代曆法對冬至十分重視，因此對冬至點所處恆星間的位置的觀測也十分注意。入漢以後的諸家曆法逐漸發現冬至點逐年的變化並載有冬至點的位置。魏晉以後，觀測日趨細密，對歲差現象的探討也前進了一大步。晉代天文學家虞喜“使天爲天，歲爲歲，乃立差以追其變，使五十年退一度”(唐代一行《大衍曆·議》

)，是虞喜首先正式指出歲差現象並給出 50 年 1 度的歲差數據。其後姜岌、何承天雖然也都給出了各自的數值，但首先把歲差的影響考慮到曆法計算之中的，乃是祖沖之。

祖沖之給出的赤經歲差數值為 45 年 11 個月退行 1 度。大明曆中的迴歸年日數為  $365\frac{9589}{39491} = \frac{14423804}{39491}$ ，大明曆中的“週天”為 14424644，以 39491 除之再與迴歸年日數相比，可知祖沖之在曆法計算中使用的歲差數值為  $\frac{860}{39491}$  度，經核算

$(\frac{860}{39491} \times 45\frac{11}{12} = 0.99993 \approx 1)$ ，這與 45 年 11 個月退行 1 度極為接近。

祖沖之大明曆中第二項重大改革是關於閏週的改革。早在公元前 500 年左右，中國古代天文學家便採用了 19 年 7 閏 (即在 19 年裡放置 7 個閏月) 的閏週。這雖然可以把迴歸年和朔望月日數之間產生的關係調和得比較好，但閏數仍嫌大了一些。儘管東漢末年以來的天文觀測日趨精密，但天文學家們卻總是墨守著這一置閏週期，沒有進行改進。第一個衝破這一陳舊閏週的是南北朝時期北涼的趙歐，他提出了 600 年間置入 221 個閏月的新閏週。但南朝何承天在編制元嘉曆時，卻未能接受改革閏週的新思想。而祖沖之在其所編大明曆中卻大膽地採用了改革的思想，提出 391 年置入 144 個閏月的新閏週。直到唐代初年中國天文學家不再討論閏週時止，祖沖之提出的閏週，在諸家曆法中要算是最好的。

祖沖之大明曆所給出的迴歸年長度為 365.24281481 日，直到宋代楊忠輔所編統天曆 (迴歸年長度為 365.2425 日) 時止，在曆代諸家曆法中，這一數值也是最好的。由於迴歸年日數和閏週數據都比較精密，故大明曆朔望月日數 — 29.5305915 日也是比較精密的，誤差僅為 0.0000056 日，每月約長 0.5 秒。直到宋代時

天曆、奉天曆、紀元曆等等曆法中，才有更好的朔望月數據出現。

大明曆三項新的“設法”都和“上元積年”的計算有關。在中國古代，天文學家爲了計算上的方便，大都先推算出一個若干年前的一個理想曆元，使各種天象週期都處於初始狀態。這樣，曆法中的其它計算均可依此順利算出。這個理想中的曆元被稱爲“上元”，由“上元”到編制曆法時止的累計年數被稱爲“上元積分”。例如漢初時的太初曆便提出以“元封七年十一月甲子日朔旦冬至”爲上元，後來的曆法還提出把五星也包括進去，即“五星聯珠”(五星處在同一初始狀態)，“日月合璧”(日月也同在此方位上)。據大明曆正文記載，祖沖之進一步提出：曆元必須是“上元之歲，歲在甲子，天正甲子朔夜半冬至，日月五星聚於虛度之初，陰陽遲疾，並自此始”，即要求“上元”之年必須是甲子年，此年十一月初一日亦須是甲子日，此日夜半需恰好爲合朔和冬至節氣，而且需要此時的日月五星(包括月亮又剛好處在近地點和黃白道的一個交點)都聚集在虛宿初度。

由於日月五星以及其它若干天文週期都是極複雜的小數(中國古代則是分數)，而且天文觀測的精確程度又受到時代的局限，所以這種上元積年的推算對曆法的編制和對天文學發展可能弊大於利，但它卻具有較大的數學方面的意義。因爲，當各種天文週期測定和算定，又經觀測定出日月五星等觀測時所處位置之後，計算上元積年問題是一個求解聯立一次同餘式問題。在這方面中國古代天文學家和數學家取得了較大的成就(“孫子問題”、“大衍求一術”)。

關於冬至時刻的推算，祖沖之首創了巧妙的測量與計算方法，並取得相當好的測算結果，這是大明曆的又一項成就。

祖沖之在大明曆中還給出交點月日數  $27.2122304$  ( $717777/26377$  日)，這是中國曆法史上的第一個交點月日數數據。與現代的理論

數值 (27.2122152 日) 相比，僅差 0.0000152 日，每交點月誤差為 1.3 秒。大明曆給出的五星週期數據也比較好：

木星：398.9030918 日 (15753082/39491 日)

火星：780.0307918 日 (30804196/39491 日)

土星：378.0697881 日 (14930354/39491 日)

金星：583.9308703 日 (23060014/39491 日)

水星：115.8796688 日 (4576204/39491 日)

除天文曆法和數學之外，祖沖之還製造過各種奇巧的機械，同時他還通曉音律，可以稱得上是一位博才多藝的科學家。

祖沖之曾造過指南車並獲得成功。在中國古代指南車的名稱由來已久，但其機制構造則未見流傳。三國時代的馬鈞曾製造指南車，至晉再次亡失。東晉末年劉裕攻長安，得姚秦許多器物，其中也有指南車，但“機數不精，雖曰指南，多不審正，回曲步驟，猶須人功正之”。南朝劉宋升明年間 (公元 477 - 479 年) 肅道成輔政，“使沖之追修古法。沖之改造銅機，圓轉不窮而司方如一，馬鈞以來未有也。”當時還有一位來自北方的工匠名為索馭麟，自稱也能造指南車。肅道成“使與沖之各造，使於樂遊苑共試校”，而索馭麟所造“頗有差僻，乃燬焚之”。

祖沖之還“以諸葛亮有木牛流馬，乃造一器，不因風水，施機自運，不勞人力”，但這是一種什麼機具，因缺乏資料，使人很難想像。祖沖之“又造千里船，於新亭江試之，日行百餘里”，這顯然是一種快船。他又“於樂遊苑內造水碓磨，武帝 (蕭蹟，公元 483 - 493 年在位) 親自臨視”。

祖沖之還曾製造過“欵器”。這種器具用來盛水“中則正，滿則覆”，古人常放置在身邊以自警，“晉時杜預有巧思，造欵器三改不成”。南齊永明年間 (蕭蹟) 竟陵王蕭子良“好古，沖之造欵器獻之”。

關於音律，有的史料記載說“沖之解鐘律博塞當時獨絕，莫

能對者” (以上各段中引文均見《南齊書》、《南史》中的祖沖之傳)。

## 文 獻

### 原始文獻

- [1] (南朝) 祖沖之，上大明曆表、大明曆、駁議，見《宋書》卷十三，中華書局，1974。
- [2] (梁) 蕭子顯，南齊書·祖沖之傳，中華書局，1972。
- [3] (唐) 李延壽，南史·祖沖之傳，中華書局，1975。

### 研究文獻

- [4] (清) 阮元，疇人傳·祖沖之，商務印書館重印本，1955。
- [5] 周清澍，我國古代偉大的科學家——祖沖之，見李光壁、錢君曄編《中國科學技術發明和科學技術人物論集》，三聯書店，1957。
- [6] 杜石然，祖沖之，見《中國古代科學家》，科學出版社，1959
- [7] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。