阿　耶　波　多

阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 公元 476 年生於印度拘蘇摩補羅 (Kusumapura)；卒於公元 550 年。數學、天文學。

阿耶波多之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Aryabhata_I.html

阿　耶　波　多

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 公元 476 年生於印度拘蘇摩補羅 (Kusumapura)；卒於公元 550 年。數學、天文學。

阿耶波多是迄今所知最早的印度數學家。他的出生地拘蘇摩補羅 (Kusumapura) 距現今的巴特拉 (Patna) 不遠。巴特拉在當時叫華氏城 (Pātaliputra)，是一座有名的古城。釋迦牟尼晚年曾行教至此。華氏城先後是孔雀王朝、笈多王朝的都城。公元五世紀初，即阿耶波多出生前近一個世紀中國的高僧法顯曾在該城的佛教寺院裡從事學術活動。

阿耶波多在華氏城和拘蘇摩補羅著書立說，屬於拘蘇摩補羅學派。他的主要著作一共有兩本：一本是《阿耶波多曆書》(*Āryabhatīya*)，成書於公元 499 年，另一本天算書已經失傳。《阿耶波多曆書》包括 “天文表集” (*Daśagītikā*)、“算術”(*Ganitapāda*)，“時間的度量” (*Kālakriyāpāda*)，“球”(*Golapāda*) 等部分。該書於公元 800 年左右被譯成拉丁文，有較大的影響。《阿耶波多曆書》曾被多次評註，特別是在南印度，許多學者對該書進行過深入的研究。

阿耶波多對數學作出了多方面的貢獻。其中 π 值、正弦表和一次不定方程的解法是他的最有代表性的成果。

在數學史上，π 值即圓周率的計算佔有重要的地位。在某種程度上，它反映一個國家數學發展的水準。中國魏晉時期，劉

徽運用“割圓術”求得 $3.14+\frac{64}{625}<\pi<3.14+\frac{169}{625}$。按照《九章算術》方田章後面的註文，$\pi=\frac{3927}{1250}$，即 3.1416。但這一註文是否爲劉徽所加，尚無定論。在南北朝時，祖沖之求得 $3.1415926<\pi<3.1415927$，並得出兩個重要的近似值：約率 $\frac{22}{7}$，密率 $\frac{355}{113}$。其中約率 $\frac{22}{7}$ 早已爲希臘數學家阿基米德 (Archimedes) 所知，他利用圓的外切與內接正 96 邊形，曾算得 $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$。除中國以外，關於 π 值爲 3.1416 的記載，也見於阿耶波多的著作中。阿耶波多指出：“100 加 4 再乘 8，再加 62000，就得到直徑是 20000 的圓周長近似值”。即 $\pi=\frac{104\times 8+62000}{20000}=3.1416$。這個 π 值爲後來的許多印度數學家所採用，婆什迦羅 (Bhāskara II) 更把它寫成 $\frac{3927}{1250}$。它究竟是阿耶波多自己獨立地用幾何方法求得的，還是與中國的 $\pi=\frac{3927}{1250}$ 有某種師承關係，待進一步研究。

在三角學方面，阿耶波多以他制作的正弦表而聞名於世。希臘人托勒密 (Ptolemy) 早就制作過從 0^o 到 90^o 每隔半度的弦表，他把圓周分爲 360 等份，每等份繼續分爲 60 小等份。另把半徑分爲 60 等份，對一給定圓弧，求對應弦用半徑的 $\frac{1}{60}$ 爲長度單位來表示的長度。印度已失傳的天文學著作《蘇利耶曆書》(*Sūrya Siddhānta*) 中據說也載有正弦表，阿耶波多的正弦表很可能是在此表的基礎上改進而成的。在制作過程中，他大概用了幾何技巧和

近似運算等數學知識。 阿耶波多正弦表包含從 0° 到 90° 每隔 $3^\circ 45'$ 的正弦值， 它比較過去希臘人的弦表， 有兩點明顯的區別： 其一， 把圓周分爲 360 等份， 每份繼續分爲 60 小等份， 半徑 r 也同圓周一樣度量。 於是， 從圓周長 $= 360 \times 60 = 21600$ 分及圓周長 $= 2\pi r$， 得半徑 $r = 3437.746$。 略去小數部分， 取近似值得 $r = 3438$。 不再像希臘人那樣， 把圓周分爲 360 份， 而把半徑另分爲 60 份。 阿耶波多默認曲線和直線可用同一單位度量， 這無疑是一大進步。 按照這種統一的度量法， 即有 $\sin 7^\circ 20' = 449$、 $\sin 30^\circ = 1719$ 等等。 其二， 阿耶波多是計算半弦 (相當於現在的正弦線) 而不是全弦的長， 這也是與希臘人不同的，阿耶波多稱半弦爲 jîva， 該詞原意爲獵人的弓弦。阿拉伯人將它譯成 dschîba。 後來又誤成形狀相似的 dschaib， 這個詞的原意爲胸膛、 海灣或凹處。 十二世紀時， 它被蒂沃利 (義大利中部， 羅馬之東) 地方的柏拉圖 (Plato of Tivoli) 意譯成拉丁文 sinus，“正弦” 一詞即來源於此。

不定方程可以說是阿耶波多貢獻最大的一個領域。 他提出： 如何決定一個整數 N， 使 N 除以整數 a 餘 r_1， 除以整數 b 餘 r_2， 即 $N = ax + r_1 = by + r_2$ 或 $by - ax = c$， 其中 $c = r_1 - r_2$。 通過研究這類問題， 阿耶波多建立了求一次線性不定方程 $by - ax = c$ (a、 b、 c 都是整數) 的正整數通解的法則， 並將此法則推廣到解一次聯立不定方程組。 這項工作是走在當時世界前列的。 阿耶波多的法則實際上就是輾轉相除法， 印度人稱求解一次不定方程爲庫塔卡 (Kuttaka)， 意思爲碾細。 阿耶波多開庫塔卡的先河。 按照他的學生婆什迦羅 (Bhāskara I) 等人的解釋， 用現代數學語言表達， 對 $by - ax = c$ (I) 不妨設 a、 b 互質。 阿耶波多的解法如下：

作輾轉除法， 可得到一系列的商和餘數：

$$q、q_1、q_2、q_3、\cdots、q_m、r_1、r_2、r_3、\cdots、r_{m+1}。$$

其中，

$$a = bq + r_1$$
$$b = r_1 q_1 + r_2 \text{，}$$
$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \text{，}$$
$$r_2 = r_3 q_3 + r_4 \text{，}$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{m-2} = r_{m-1} q_{m-1} + r_m \text{，}$$
$$r_{m-1} = r_m q_m + r_{m+1} \text{。}$$

以 $a = bq + r_1$ 代入方程 (I) 中， 可得

$$by = (bq + r_1)x + c \text{。}$$

故

$$y = qx + y_1 \text{，} \qquad by_1 = r_1 x + c \text{。} \tag{I.1}$$

將 $b = r_1 q_1 + r_2$ 代入 (I.1) 中， 得

$$x = q_2 y_1 + x_1 \text{，} \qquad r_1 x_1 = r_2 y_1 - c \text{。} \tag{I.2}$$

按上法運算下去， 並把所得的式子排成兩欄， 有

(1)	$y = qx + y_1$，	$by_1 = r_1 x + c$，	(I.1)
(2)	$x = q_1 y + x_1$，	$r_1 x_1 = r_2 y_1 - c$，	(I.2)
(3)	$y_1 = q_2 x_1 + y_2$，	$r_2 y_2 = r_3 x_1 + c$，	(I.3)
(4)	$x_1 = q_3 y_2 + x_2$，	$r_3 x_2 = r_4 y_2 - c$，	(I.4)
(5)	$y_2 = q_4 x_2 + y_3$，	$r_4 y_3 = r_5 x_2 + c$，	(I.5)
(6)	$x_2 = q_5 y_3 + x_3$，	$r_4 x_3 = r_6 y_3 - c$，	(I.6)
	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
$(2n-1)$	$y_{n-1} = q_{2n-2} x_{n-1}$ $+y_n$，	$r_{2n-2} y_n = r_{2n-1} x_{n-1}$ $+c$，	$(\mathrm{I}.2n-1)$
$(2n)$	$x_{n-1} = q_{2n-1} y_n$ $+x_n$，	$r_{2n-1} x_n = r_{2n} y_n$ $-c$，	$(\mathrm{I}.2n)$
$(2n+1)$	$y_n = q_{2n} x_n$ $= +y_{n+1}$，	$r_{2n} y_{n+1} = r_{2n+1} x_n$ $+c$，	$(\mathrm{I}.2n+1)$

互除可以進行到 0， 也可以進行到某一步爲止。 再分下列幾種情況討論：

(1) 假定互除進行到 0，則因爲 a、b 互質，故倒數第二個餘數是 1。若序數是偶數，則會有 $r_{2n}=1$、$r_{2n+1}=0$ 以及 $q_{2n}=r_{2n-1}$。式 (I.$2n$) 和 (I.$2n+1$) 分別爲 $y_n=q_{2n}x_n+c$、$y_{n+1}=c$。給 x_n 以任一整數值 t 可得 y_n 的一整數值。由 ($2n$)，又得到 x_{n-1} 的值，一步步往回推，最後可得到 x、y 的整數值；若序數是奇數，則可由式 (I.$2n-1$) 和 (I.$2n$) 等求解。

(2) 假定互除在某一步停止。若序數是偶數，則有 $r_{2n}y_{n+1}=r_{2n+1}x_n+c$，或 $y_{n+1}=\dfrac{r_{2n+1}x_n+c}{r_{2n}}$。給 x_n 一個適當的整數值，使 y_{n+1} 也爲整數。由 $(2n+1)$，得 y_n 的整數值。再一步步繼續往回推，可得 x、y 的整數值；若序數是奇數，則有 $r_{2n-1}x_n=r_{2n}y_n-c$，或 $x_n=\dfrac{r_{2n}y_n-c}{r_{2n}-1}$。令 y_n 爲一適當的整數，使 x_n 也爲整數。由 $(2n)$，得 x_{n-1} 的整數值。逆推可解出 x、y 的整數值。

顯然，若 $x=\alpha$、$y=\beta$ 是方程 $by-ax=c$ 的最小整數解，則 $x=bm+\alpha$、$y=am+\beta$ (m 爲任意整數) 也是方程的解，這就是方程的通解。

阿耶波多的法則，被他的學生婆什迦羅推廣到解方程 $by-ax=-c$，後來的印度數學家繼續研究了這類不定方程問題，得到了其他一些結果。十世紀中，阿耶波多 II (Āryabhaṭa II) 進一步改進了阿耶波多的法則，並指出運算可以簡化及法則可能失效的情況。數百年來積累的這些成果，形成了印度數學中有名的庫塔卡理論。

在世界古代數學史上，不定方程也受到中國、希臘等國學者的注意。中國古代數學名著《九章算術》討論了不定方程組

問題，並指出解法："如方程，以正負術入之"。即按線性方程組來解。古希臘學者丟番圖 (Diophantus) 因研究不定方程很有成就，以至後人把求整係數不定方程的整數解稱爲解 "丟番圖方程"。丟番圖研究的主要是高次不定方程，他解方程時只限於正根，認爲負根出現則表明方程不合理。解二次方程的時候，即使兩個根都是正根，他也只取一根。希臘學者在這方面的缺陷，被阿耶波多及後來的印度數學家彌補了。

阿耶波多還有其它許多數學成果，例如印度的字母記數法，開平方、開立方法則 $\cdots$ 等等。他還引入了一些算術級數，它們在過去的印度典籍中沒有發現過。但是，他關於求圓面積的公式顯然取自早期的印度天算著作。對於半徑爲 r 的球的體積，阿耶波多誤爲 $\pi r^2\sqrt{\pi r^2}$，三稜錐的體積則誤爲底三角形的面積 $\times$ 高 $\times\dfrac{1}{2}$。

《阿耶波多曆書》是印度第一部重要天算著作。在書中，阿耶波多運用他提出的數學方法，計算了黃道、白道的升交點和降交點的運動，討論了日月五星的最遲點及其遲速運動，推算了日月蝕的發生時間，並像中國人那樣去推算上元積年。他還提出過地球自轉的先進思想，可惜未被後來的天文學家所承認。

阿耶波多在印度科學史上是有重要影響的人物，1975 年 4 月 19 日印度發射的第一顆人造衛星名爲阿耶波多號，就是爲了紀念他的。

文　　獻

原始文獻

[1] Āryabhaṭa I, *Āryabhaṭīya*, Leiden, 1874。

[2] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombaya, 1938。

[3] H. Kern, *On some fragments of Āryabhaṭa*, Journal of the Royal Asiatic Society, 20(1863), 371－387。

[4] Bhāu Dājī, *Brīef notes on the age and authenticity of the works of Āryabhaṭa Varāhamihira, Brahmagupta, Bhaṭṭ otpala, and Bhāsk- ārachārya*, Journal of the Royal Asiatic Society, 1865, 392－418。

[5] L. Rodet, *Sur la véritable signification de la notation numérique inventée par Āryabhaṭa*, Journal Asiatique, Ser. 7, 16(1880), 440－485。

[6] G.R. Kaye, *Two Āryabhaṭas*, Bibliotheca Mathematica, 10(1910), 289－292。

[7] J.F. Fleet, *Āryabhaṭa's System of expressing numbers*, Journal of the Royal Asiatic Societym, 1911, 109－126。

[8] N.K. Mazumdar, *Āryabhaṭa's rule in relation to indeterminate equations of the first degree*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 3(1911－1912), 11－19。

[9] R. Sewell, *The first Arya Siddhanta*, Epigraphia Indica, 16(1921－1922), 100－144； 17(1923－1924), 17－104。

[10] A. A. Krishnaswami Ayyangar, *The mathematics of Āryabhaṭa*, Quarterly Journal of the Mythic Society, 16(1926), 158－179。

[11] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской Математики, Иэдательство《Наука》, Москва, 1977。

[12] W.E. Clark, *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*, The University of Chicago Press, 1930。