婆 羅 摩 笈 多

婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 約公元 598 年生，約 670 年卒。數學、天文學。

婆羅摩笈多之圖像請參閱 Wikipedia, the free encyclopedia 網站

http://en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta

婆羅摩笈多

陳一心

(湖南科學技術出版社)

婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 約公元 598 年生， 約 670 年卒。數學、天文學。

婆羅摩笈多是印度印多爾北部烏賈因 (Ujjain) 地方人， 原籍可能爲現在巴基斯坦的信德。 從他的姓名結構中含 gupta 推測， 他屬於吠舍氏的成員， 即當時的平民階層。 婆羅摩笈多長期在烏賈因工作， 這裡是當時印度數學、 天文學活動的三個中心之一。

婆羅摩笈多在 30 歲左右， 編著《婆羅摩修正體系》(*Brāhmasphuṭasiddhānta*， 公元 628 年) 一書。 該書用此名， 是因他修改和引用印度最古老的天文學著作《婆羅摩體系》(*Brāhmasiddhānta*) 裡面的內容。《婆羅摩修正體系》分爲 24 章， 其中《算術講義》(*Gaṇitād'hāya*) 和《不定方程講義》(Kuṭakhādyaka) 兩章是專論數學的， 前者是研究三角形、四邊形、 零和負數的算術運算規則、 二次方程等； 後者是研究一階和二階不定方程。《婆羅摩修正體系》的其它各章是關於天文研究的， 也涉及到許多數學知識。

婆羅摩笈多的另一部著作《肯達克迪迦》(*Khaṇḍakhādyaka*， 音譯)， 是天文學方面的名著。 它包含八章， 研究了行星的黃經， 與週日運動有關的三個問題， 月蝕、 日蝕、 星的偕日升落， 以及行星的會合等。

婆羅摩笈多的這些著作在拉賈斯坦邦、 古吉拉特邦、 中央邦、 北方邦、 比哈爾、 尼泊爾、 潘賈婆 (Panjab) 和克什米爾等地受到廣泛重視， 許多學者對其進行過研究。

婆羅摩笈多的一些數學成就在世界數學史上有較高的地位，他提出了負數概念，用小點或小圈記在數字上面以表示負數，並給出負數的運算法則，如“兩個正數之和為正數，兩個負數之和為負數，一個正數和一個負數之和等於它們的差”；“一個正數與一個負數的乘積為負數，兩個負數的乘積為正數，兩個正數的乘積為正數”等等。他的負數概念及其加減法法則，僅晚於中國(約公元一世紀成書的中國《九章算術》最早得出負數及其加減法運算的概念)而早於世界其他各國數學界；而他的負數乘除法法則，在全世界都是領先的。

婆羅摩笈多對數學的最突出貢獻的解不定方程 $Nx^2+1=y^2$。在歐洲，這種方程曾在 J. 佩爾 (Pell) 的代數書中論及，後被 L. 歐拉 (Euler) 命名為佩爾方程。1767 年，J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 運用連分數理論，給出了該問題的完全的解答。事實上，婆羅摩笈多在公元 628 年便幾乎完全解出了這種方程，只是當時不為歐洲人所知，其後，婆羅摩笈多的解法又被婆什迦羅 (Bhāskara) 改進。

按照婆羅摩笈多的解法，令 (α,β) 和 (α',β') 分別為 $Nx^2+K=y^2$ 和 $Nx^2+K'=y^2$ 的一個解集，於是很容易變換為 $Nx^2+KK'=y^2$ 的解 $x=\alpha\beta'\pm\alpha'\beta$、$y=\beta\beta'\pm N\alpha\alpha'$。這被稱為婆羅摩笈多引理。特別地，取 $K=K'$，若 $Na^2+K=\beta^2$，則有 $x=2\alpha\beta$、$y=\beta^2+N\alpha^2$ 為 $Nx^2+K^2=y^2$ 的解，故有

$$N\left(\frac{2\alpha\beta}{K}\right)^2+1=\left(\frac{\beta^2+Na^2}{K}\right)^2。$$

因此，$x=\dfrac{2\alpha\beta}{K}$、$y=\dfrac{\beta^2+Na^2}{K}$ 為方程 $Nx^2+1=y^2$ 的解。若上述值為整數，便得到一整數解集：

(1) 若 $K=\pm1$，則上述值顯然為整數。

(2) 若 $K=\pm 2$，則有 $x=\alpha\beta$ (取正號)、$y=\dfrac{\beta^2+\beta^2-2}{2}=\beta^2-1$。$x$ 和 y 爲整數。

(3) 若 $K=4$，則 $x=\dfrac{\alpha\beta}{2}$、$y=\dfrac{\beta^2-2}{2}$。若 a 爲偶數，則因 $Na^2+4=\beta^2$，β 也爲偶數。故此爲方程的一對整數解。若 a 爲奇數，應用婆羅摩笈多引理，可得

$$x=\frac{1}{2}\alpha(\beta^2-1)、y=\frac{1}{2}\beta(\beta^2-3)。$$

若 β 爲奇數，則 x、y 皆爲整數；若 β 爲偶數，x、y 也是整數。

(4) 若 $K=-4$，按上述過程

$$N\left(\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2+1=\left\{\frac{1}{2}(\beta^2+2)\right\}^2。$$

反覆運用婆羅摩笈多引理，可得

$$x=\frac{1}{2}\alpha\beta(\beta^2+1)(\beta^2+3)、$$
$$y=(\beta^2+2)\left\{\frac{1}{2}(\beta^2+1)(\beta^2+3)-1\right\}。$$

無論 β 是奇數還是偶數，以上解都是整數。

總之，解 $Nx^2+1=y^2$，若得到一組解 (α,β) ($K=\pm 1$、± 2 或 ± 4)，反覆運用婆羅摩笈多引理，便可得到一無窮解組。這就是婆羅摩笈多解方程 $Nx^2+1=y^2$ 的方法。

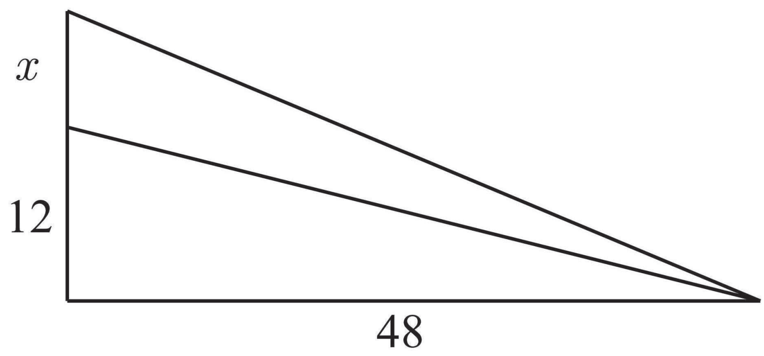
婆羅摩笈多還研究了不定方程 $ax\pm by=c$，這類方程在印度首先爲阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 所研究，並得到解答，婆羅摩笈多將其推廣到聯立不定方程及多個未知量的情形。

對方程 $ax^2+bx=c$ ($a>0$、b 和 c 可以是負數)，婆羅摩笈

多給出一個根的公式

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}。$$

《婆羅摩修正體系》中的許多代數問題都是屬於天文學計算，印度書中常見的離奇古怪的題並不多，後來的註釋者補上一些以說明某種法則。如：山上住著兩個苦行者，一個是巫師，會在空中飛行。他從山頂筆直跳到空中去，到達某一高度後，斜降到一個小鎮上。另一個從山頂垂直到達地面，再步行到同一小鎮。二人所經距離相等，求山和小鎮的距離，以及巫師升空的高度。



這是一個二次不定方程，註釋者按圖中數字求得 $x=8$。

在幾何學方面，婆羅摩笈多對有理直角三角形即邊爲有理數的直角三角形很有興趣。他給出了一般解 $a=2mn$、$b=m^2-n^2$、$c=m^2+n^2$(m、n 是任意不相等的有理數)，但沒有證明。

婆羅摩笈多對有理四邊形的研究也取得了許多成果，不過，他沒有認識到他所得到的結論僅適用於圓內接四邊形。令 (a,b,c) 和 (α,β,γ) 分別是兩個有理直角三角形的邊，並有關係 $c^2=a^2+b^2$ 和 $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$，則邊爲 $(c\beta,a\gamma,c\alpha,b\gamma)$ 和 $(c\beta,c\alpha,b\gamma,a\gamma)$ 的兩個四邊形稱爲婆羅摩笈多四邊形。例如，取 (a,b,c) 和 (α,β,γ) 分別爲 $(3,4,5)$ 和 $(5,12,13)$，便得到邊爲 $(60,39,25,52)$ 和 $(60,25,52,39)$ 的婆羅摩笈多四邊形。圓內接四邊形的兩個定理被稱爲婆羅摩笈多定理：(1) 邊爲 a、b、c、d 的圓內接四邊形的面積爲

$\sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)(S-d)}$，其中 $2S = a+b+c+d$。(2) 邊爲 a、b、c、d 的圓內接四邊形的對角線長分別爲

$$\sqrt{\left(\frac{bc+ad}{ab+cd}\right)\ (ac+bd)}$$

和

$$\sqrt{\left(\frac{ab+cd}{bc+ad}\right)(ac+bd)}。$$

婆羅摩笈多還探討了藉助於一給定的正弦表求中間角正弦的方法。他所使用的插值法則等價於牛頓－斯特靈公式。

婆羅摩笈多的一些數學結論夾雜著錯誤，例如計算邊長爲 12 的等邊三角形的面積，他寫爲 6×12；邊長爲 10、13、13 的等腰三角形的面積寫爲 5×13；邊長爲 13、14、15 的三角形面積寫爲 $7 \times \frac{1}{2} \times (13+15) \cdots$ 等等。這表明他沒有正確掌握求三角形面積的公式。關於 $0 \div 0$，他認爲商是 0，這也是不正確的。

公元八世紀時，婆羅摩笈多的著作被帶到巴格達，在皇室的支持下譯成阿拉伯文，對當時阿拉伯的天文學和數學產生了一定影響。印度的一些天文表被阿拉伯人稱爲辛德罕德 (Sindhind)，從發音上推測它們很可能取自婆羅摩笈多的《婆羅摩修正體系》，這些天文表在阿拉伯世界享有極高的聲譽。

文　　獻

原始文獻

[1] Brahmagupta, *Brāhmasphuṭasiddhānta*, edited with explanatory notes by Sudhakara Dvivedi, Benares, 1902。

[2] Brahmagupta, *Khaṇḍakhādyaka*, edited with the commentary

of Āmarāja (約 1250) by Babua Misra, Calcutta, 1925； English translation with notes and comments by Prabodh Chandra Sengupta, Calcutta, 1934。

研究文獻

[3] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombat, 1938。

[4] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961。

[5] David Pingree, *Brahmagupta*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 1973, 416－418。

[6] David Pingree, *A census of the exact sciences in Sanskrit*, Philadeiphia, 1969。

[7] Ś.B. Dīksita, *Bhārātīya jyotiḥsāstra*, Poona, 1931, 216－227。

[8] P.C. Sengupta, *Brahmagupta on interpolation*, Bullitin of the Calcutta Mathematical Society, 23(1931), 125－128。

[9] Sudhākara Dvivedin, *Gaṇakataran̄giṇi*, Benares, 1933。

[10] M. Simon, *Zu Brahmagupta diophantischen Gleichungen Zweiten Grades*, Archiv der mathematik und Physik, 20(1913), 280－281

[11] H. Weissenborn, *Das Trapez bei Euclid*, Heron und Brahmagupta, Abhandlungen Zur Geschichte der Mathmatik, 12 (1879) 167－184。