花　拉　子　米

花拉子米 (al-Khwārizmi， Abū Ja‘far Muḥammad Ibn Mūsā) 約公元780 年生於巴格達 (今伊拉克)； 約公元850 年卒。 數學、 天文學、 地理學。

花拉子米之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Al-Khwarizmi.html

花 拉 子 米

杜 瑞 芝

(大連理工大學)

花拉子米 (al-Khwārizmi， Abū Ja‘far Muḥammad Ibn Mūsā) 約公元780 年生於巴格達 (今伊拉克)； 約公元850 年卒。 數學、 天文學、 地理學。

阿布•賈法爾•穆罕默德•伊本•穆薩•阿爾－花拉子米的傳記材料， 很少流傳下來。 一般認爲他生於花拉子模 (Khwarizm， 位於阿姆河下游， 今烏茲別克境內的希瓦城 (Хива) 附近， 故以花拉子米爲姓。 另外一個說法爲他生於巴格達附近的庫特魯伯利 (Quṭrubbulli)。 祖先是花拉子模人。 花拉子米是拜火教徒的後裔， 早後在家鄉接受初等教育， 後到中亞細亞古城默夫 (Мерв) 繼續深造， 並到過阿富汗、 印度等地遊學， 不久成爲遠近聞名的科學家。 東部地區的總督馬蒙 (al-Ma’mūn， 公元 786-833 年) 曾在默夫召見過花拉子米。 公元 813 年， 馬蒙成爲阿拔斯王朝的哈利發後， 聘請花拉子米到首都巴格達工作。 公元 830 年， 馬蒙在巴格達創辦了著名的 “智慧館”(Bayt al-Hikmah， 是自公元前三世紀亞歷山大博物館之後最重要的學術機關)， 花拉子米是智慧館學術工作的主要領導人之一。 馬蒙去世後， 花拉子米在後繼的哈利發統治下仍留在巴格達工作， 直至去世。 花拉子米生活和工作的時期， 是阿拉伯帝國的政治局勢日漸安定， 經濟發展， 文化生活繁榮昌盛的時期。

花拉子米科學研究的範圍十分廣泛， 包括數學、 天文學、 歷史學和地理學等領域。 他撰寫了許多重要的科學著作。

在數學方面，花拉子米編著了兩部傳世之作：《代數學》和《印度的計算術》。

代數學的內容和方法是自古以來逐漸形成的。早在古埃及阿默士的紙草書中就已經出現屬於一元一次方程的問題。巴比倫人也知道某些二次方程的解法。在漢穆拉比時代的泥板中已有二次方程的問題，從中可以看出從算術到代數的過渡。代數學在希臘時代得到重大發展，其代表人物是丟番圖 (Diophantus)。他的著作《算術》(*Arithmetica*) 中的大部分內容可劃入代數的範圍。書中出現了符號的運算法則和用字母表示的未知數，解決了某些二次方程，特殊的三次方程和大量的不定方程問題。公元七－八世紀，印度數學獲得了可觀的發展。印度數學家婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 給出了二次方程的一個求根公式。二次方程的一般解法是花拉子米在他的《代數學》中首先給出的。

《代數學》大約寫於公元 820 年，有多種版本流傳下來。比較重要的有兩種：一種是抄錄於 1342 年的阿拉伯文手稿，現存牛津大學圖書館，1831 年由 F. 羅森 (Rosen) 譯成英文，在倫敦出版了它的阿－英對照本；另一種是 L. Ch. 卡平斯基 (Karpinski) 根據著名翻譯家切斯特的羅伯特 (Robert of Chester) 1145 年翻譯的《代數學》拉丁文譯本編譯的。

《代數學》的阿拉伯文書名 *'Hisab al-jabr W'al-muqabalah*，直譯應爲《還原與對消的科學》。al-jabr 意爲 "還原"，這裡指把負項移到方程另一端："還原" 爲正項；muqabalah 意即 "對消" 或 "化簡"，指方程兩端可以消去相同的項或合併同類項。一般認爲拉丁文中代數學一詞 algebra 是由 al-jabr 演變而來。

在《代數學》中，花拉子米用十分簡單的例題講述了解一次和二次方程的一般方法。他的作法實質上已經把代數學作爲一門關於解方程的科學來研究，只是其研究形式與現代的不同。該書包括三部分：第一部分講述現代意義下的初等代數，第二部分列舉各

種實用算術問題，最後一部分是關於繼承遺產的應用問題。

在第一部分裡，作者系統地討論了一、二次方程的解法。他給出六種類型的標準方程，這些方程是由三種量組成：(1) 根 (jadhr，指植物的根或事物的根本) 或一堆 “東西”(Shay’)；(2) 根自乘的結果，即根的平方 (māl，也表示財產或貨幣的和)；(3) 簡單數或稱 “迪拉姆”(dirham，阿拉伯貨幣單位)。現在把解方程求未知量叫做求根就是來源於此。花拉子米完全用文字來表述，書中沒有出現任何字母和縮寫符號。爲了明確起見，下面用現代符號來表示花拉子米論述的六種類型方程：

(1)	“平方” 等於 “根”	$ax^2 = bx$。
(2)	“平方” 等於 “數”	$ax^2 = c$。
(3)	“根” 等於 “數”	$bx = c$。
(4)	“平方” 和 “根” 等於 “數”	$ax^2 + bx = c$。
(5)	“平方” 和 “數” 等於 “根”	$ax^3 + c = bx$。
(6)	“根” 和 “數” 等於 “平方”	$bx + c = ax^2$。

以上 a、b、c 都是正數。對於每種類型的方程的解法，花拉子米都給出具體例子。例如對於第四種類型的方程，花拉子米的例題是 “一個平方數及其根的 10 倍等於 39 個迪拉姆”。他把求解過程敍述爲：“取根的數目的一半，在這裡就是 5，將它自乘得 25，把它同 39 相加得 64，開方等於 8，再減去根數的一半，即 5，等於 3。這就是根。” 下面用現代符號表示該方程及求解過程：

$$x^2 + 10x = 39，\ 10 \times \frac{1}{2} = 5，\ 5^2 = 25，$$

$$25 + 39 = 64，\ \sqrt{64} = 8，\ 8 - 5 = 3，\ x = 3，\ x^2 = 9。$$

即

$$x = \sqrt{(\frac{10}{2}) + 39} - \frac{10}{2}。$$

這種解法相當於給出方程 $x^2+px=q$ 的一個求根公式

$$x=\sqrt{(\frac{p}{2})^2+q}-\frac{p}{2}\text{。}$$

花拉子米拋棄了負根。

在解第五種類型的方程 $x^2+21=10x$ 時，花拉子米求出了兩個根，相當於

$$x=\frac{10}{2}\pm\sqrt{(\frac{10}{2})^2-21}=7\text{、}3\text{。}$$

在數學史上，他是最早認識到二次方程有兩個根的數學家。在這方面花拉子米比希臘人和印度人有明顯的進步。他還特別指出，當根的數目之半自乘的結果小於自由項時，開平方是不可能的，此時方程無根。這相當於指出我們現在稱之爲判別式的必須非負的條件。

在論述了六種典型方程的解法之後，花拉子米又用幾何方法給出它們的證明。這些證明無疑受到希臘幾何學的影響，有的似乎是歐幾里得《原本》中有關命題的翻版。

例如，對於方程 $x^2+10x=39$ 的根的正確性，花拉子米給出了兩種不同的幾何證明。第一種證法是在邊長爲 x 的正方形的四個邊上向外作邊長爲 x 和 $\frac{10}{4}$ 的矩形，再把這個圖形補充成邊長爲 $x+5$ 的正方形 (圖 1)。大正方形的面積等於 $x^2+10x+25$，即 64 (因爲由已知方程知 $x^2+10x=39$)，因此其邊長爲 8。x 是較小正方形的邊，等於 $8-2\times\frac{10}{4}$，即 3。第二種證法是在邊長爲 x 的正方形的兩個相鄰邊上作邊長爲 x 和 5 的矩形，然後把圖形補充爲完整的大正方形 (圖 2)。

在幾何證明之後，花拉子米建立了兩種變換 – “還原” 與 “對消”。他指出，經過這兩種變換，一般形式的一次和二次方程就

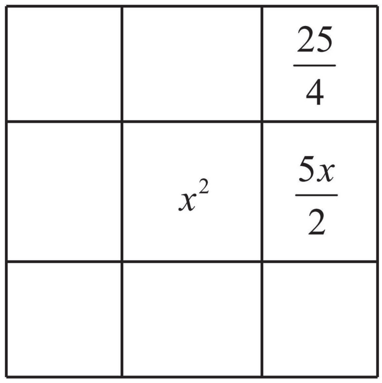

圖 1

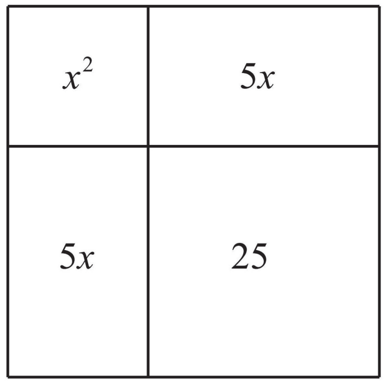

圖 2

能化成已經討論過的六種標準方程， 當然， 這些變換都是用文字敍述的。 花拉子米以問題 “把 10 分爲兩部分， 使其平方之和等於 58” 爲例來說明這兩種變換。 這個問題相當於方程

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58 \tag{1}$$

或

$$2x^2 + 100 - 20x = 58\text{。} \tag{2}$$

接下去作者指出：“100 和兩個平方減去 20 個根， 即 100 和兩個平方等於 58 和 20 個根” 這段話的意思是， 方程 (2) 左端的 “$-20x$” 移到方程右端， 應變爲 “$+20x$”。 花拉子米稱這種變換爲 al-jabr (即 “還原”)。 這樣一來， 方程 (2) 變成

$$2x^2 + 100 = 58 + 20x\text{，} \tag{3}$$

即

$$x^2 + 50 = 29 + 10x\text{。} \tag{4}$$

花拉子米又對方程 (4) 施行 “對消” 變換 — “從 50 中減去 29， 則平方和 21 等於 10 個根”， 於是 (4) 化爲 $x^2 + 21 = 10x$， 屬於第五種類型方程。 花拉子米稱後一種變換爲 muqabalah (即 “對消”)。

“還原” 與 “對消” 是花拉子米提出的解方程的基本變形法則。 從此以後， 解方程的概念逐步明朗起來。 這兩種變形法則被長期沿用下來， 成爲現在的移項與合併同類項。

在花拉子米所列舉的各種實際問題中，還出現了相當於現代二元二次方程 (或分式方程) 組的情形，如用現代符號表示，他的問題中的第一個條件相當於方程 $x+y=10$ 而依據第二個條件可分別列出下列方程：

$$x \cdot y = 21\text{，}$$
$$x^2 - y^2 = 40\text{，}$$
$$x^2 + y^2 + (x-y) = 54\text{，}$$
$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 2\frac{1}{6}\text{，}$$

等等。不過，他並沒有明確地給出第二個未知量，而是 "用一個東西" 和 " 10 減去一個東西" 來代替。事實上，上述方程組都很容易化爲一元二次方程。

《代數學》中還用大量例子闡明代數式的運算法則，如單項式乘二項式，兩個二項式相乘，同類根式的乘除法 ⋯ 等等。

關於花拉子米撰寫《代數學》一書所受的學術影響以及資料來源等問題，至今尚未搞清。首先，花拉子米似乎沒有受印度代數的影響。印度數學家並未給出方程的根的幾何論證。他們解二次方程也沒有區分出第四、五、六種類型。花拉子米之所以把一次、二次方程分爲六種類型，讓其係數 a、b、c 總是正數，是爲了避免單獨出現負數或減數大於被減數的情形。他認識到二次方程有兩個根，但只是取正根。對於負根和零根，一概摒棄。此外，《代數學》中完全用文字敍述，沒有出現符號。在對負數的認識和使用符號等方面，花拉子米比印度數學家有明顯的退步。花拉子米關於二次方程的根的幾何論證法似乎受到希臘幾何學的影響，但是他的論證方法又在本質上區別於歐幾里得 (Euclid)《原本》中的代數幾何學。花拉子米引入後三種典型方程的許多問

題與丟番圖《算術》中的問題相似， 例如形如

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

的問題。 但是他們解決問題的途徑不同。 事實上， 丟番圖著作的第一批阿拉伯文譯本是在花拉子米去世後才出現的， 因此花拉子米很難受到丟番圖的影響。 科學史家推測 [1]， 花拉子米可能通曉中東、 近東、 巴比倫以及古希臘羅馬的科學遺產， 在此基礎上寫出了獨具風格的代數著作。 至於 al-jabr 一詞， 可能來源於亞述語中的有關術語， 而後者又源於古巴比倫語中的表示兩件東西相等的詞語。

《代數學》在十二世紀傳入歐洲， 之後的幾個世紀， 它成爲歐洲人的標準課本， 其內容、 思想和方法相當廣泛地影響過歷代數學家。 在中世紀最著名的數學家 L. 斐波那契 (Fibonacci) 的《算盤書》(1202) 中， 就有一章名爲 “aljabra et almuchabala”。 其中許多問題出自花拉子米的《代數學》， 十五世紀著名數學家 L. 帕喬利 (Pacioli) 寫了一本《算術、 幾何、 比和比例集成》(1494)， 其中廣泛地討論了一次和二次方程， 作者沿作了花拉子米的解法和幾何證明。 事實上， 在中世紀和文藝復興時期， 凡是在代數學方面有過貢獻的歐洲學者， 他們的工作在不同程度上都受到花拉子米的影響。 《代數學》以其邏輯嚴密、 系統性強、 通俗易懂和聯繫實際等特點被奉爲代數教科書的鼻祖。

花拉子米的算術著作， 只有一種譯本流傳下來， 就是十四世紀中葉翻譯的拉丁文譯本手稿， 現存劍橋大學圖書館，1875 年由義大利數學史家 B. 邦孔帕尼 (Boncompagni) 在羅馬出版， 書名爲：“*Trattati d’Aritmetica publicati da Baldassare Boncompagni, I. Asgoritmi de numero indorum*”。 以後， 這部著作的拉丁文譯本就定名爲 “*Algoritmi de numero indorum*”。 其中 Algoritmi 本是花拉

[1] S. Gandz， *The sources of al-Khowārismīs algebra*， *Ositis*， Vol.1， 1936， p.263 − 277。

子米的拉丁文譯名，可是被人理解爲印度的讀數法，後來它竟演變成表示任何系統或計算系列的“算法”的專業術語。這份手稿由於反覆傳抄，其中有多處譯文不準確，還出現一些空白。現代科學史家根據其它一些有關著作[2]進行了認眞的比較研究，恢復了它的本來面貌，我們把這部著作的名稱譯爲《印度的計算術》。

該書是一部專門講述印度數碼及其計算法的著作。作者首先講述了印度人使用九個數碼和零號記數的方法。這種方法體現了十進位值制記數原理，任何一個整數都能很簡單地表示出來並進行計算。作者還給出四則運算的定義和法則。例如乘法定義爲重複相加，除法定義爲重複相減。具體地說，兩數相乘，就是把其中一個數按另一個數的大小增加倍數，其結果爲乘積；兩數相除，就是把其中較大的數按較小的數的大小分成若干部分，用較大的數減較小的數，能減去多少個，商就是多少。花拉子米特別提出倍乘法和倍除法，即乘以 2 和除以 2 的運算。古埃及人是很重視這兩種運算的。花拉子米強調它們是爲了幫助學生記憶開平方的法則。花拉子米在該書中給出的開平方的方法，用現代符號表示，相當於下列近似公式：

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k}\sqrt{N \cdot 10^{2k}}$$

計算結果中的分數部分表示爲 60 進位分數。

書中還專門講述了分數理論。花拉子米把分數分爲“能讀的”和“不能讀的”兩種。前者指 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\cdots$、$\frac{1}{10}$，在阿拉伯語中有相應的單詞與之對應，其詞根來源於相應的整數的詞根 ($\frac{1}{2}$ 除外) 其它分數稱爲“不能讀的”，在阿拉伯語中用兩個以上的複合詞來表示。分數的表示法與中國古代用算籌表示分數的方法大體相

[2]主要有兩部著作：一部是十二世紀學者希斯帕雷西斯 (Johance Hispalcensis) 所著“*Liber algorismi de practica arismetrice*”，另一部是“*Liber ysagogarum alchorismi in artem astronomicam a magistro A. Compositum*”，作者可能是十二世紀英國學者阿德拉德 (Adelard of Bath)。

同。例如 $3\frac{1}{2}$ 和 $8\frac{3}{11}$ 表示爲 (用現代阿拉伯數碼)：

$$\begin{array}{cc} 3 & 8 \\ 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{array}$$

分子在上，分母在下，帶分數的整數部分又在分數部分之上。中國科學史家推測，這種表示法可能是由中國經印度傳入阿拉伯世界的。

花拉子米在這部著作中列表給出分數乘法的例子：

$$8\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5} \times 3\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{9}$$

即

$$\left(8+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) \times \left(3+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)$$

8		3
1 2		1 3
1 4		1 9
1 5		
40		27
	1080	
358		93
	33294	
	30 894 1080	

從這個計算表格可以看出，計算步驟是先通分：

$$8\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{5}=\frac{358}{40}，3\frac{1}{3}\frac{1}{9}=\frac{93}{27}；$$

然後相乘:

$$\frac{358}{40}\times\frac{93}{27}=\frac{33294}{1080}，$$

最後寫成標準形式 $30\frac{894}{1080}$。在計算過程中，分子和分母的位置顚倒。通分母時沒有取最小公倍數。這個例子表明，花拉子米時代的阿拉伯學者掌握把一般分數化爲單分子分數的方法。

《印度的計算術》一書有著特殊的歷史作用，它是第一部用阿拉伯文撰寫的在伊斯蘭國家介紹印度數碼和記數法的著作。它的問世對十進位制記數法在中東、近東和歐洲各國的傳播和普及起到了決定作用。阿拉伯人最初只有數詞，沒有數碼字，在征服埃及、敍利亞等地之後，他們開始使用希臘字母記數法。公元 773 年 (另一說 771 年)，印度學者把他們著名的悉檀多 (Sindhind Zij，即曆數書) 帶入阿拔斯王朝阿爾曼蘇的宮庭中。印度的數碼字和記數法從此傳入伊斯蘭世界。花拉子米的《印度的計算術》極大地推動了印度數碼和記數法在阿拉伯國家的傳播。十二世紀時，這部著作傳入歐洲各國，對歐洲數學的發展也產生了顯著的影響。印度數碼逐漸代替了希臘字母記數系統和羅馬數字等，最終成爲世界通用的數碼字。在十二－十三世紀，出現了一批直接受《印度的計算術》影響而編寫的算術書：在義大利，有 L. 斐波那契 (Fibonacci) 的《算盤書》(*Liber Abaci*)；在英國，有 J. de 薩克羅博斯科 (Sacrobosco) 的《算法書》(*Algorismus*)；在法國，有 A. de 維爾迪厄 (Villedieu) 的《算法歌》(*Carmen de algorismi*)；在德國，有 N. de 約丹努斯 (Jordanus) 的《算法論證》(*Algorismus Demonstratus*) 等。這些著作又從拉丁文譯成多種文字，通行了幾個世紀，對印度數碼和記數法引進歐洲起到重要作用。

花拉子米對幾何學也有一定貢獻。在他的《代數學》中，有一章名爲“測量篇”，專門講述圖形和物體的測量。關於平面圖形，他主要研究了三角形、四邊形和圓。他對三角形和四邊形進行分類，建立了相應的測量公式。他使用的圓面積近似公式爲

$$S = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}d^2，$$

此處 d 爲圓的直徑。該公式相當於取圓周率 π 等於 $3\frac{1}{7}$，而 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}$ 即 $\frac{1}{14}$，這裡保持了阿拉伯人對分數的特殊表示法。他還使用過圓周率的另兩個值：$\sqrt{10}$ 和 $\frac{62832}{20000}$。此外，花拉子米還建立了弓形面積的公式：

$$\sigma = \frac{d}{2}\cdot\frac{s}{2} - \left(\frac{d}{2} - h\right)\frac{a}{2} \quad (\text{小於半圓的弓形})$$

或

$$\sigma = \frac{d}{2}\cdot\frac{s}{2} + \left(h - \frac{d}{2}\right)\frac{a}{2} \quad (\text{大於半圓的弓形})$$

此外 d 爲直徑、s 爲弦所對弧長、a 爲弦長、h 爲弦心距。花拉子米還研究了稜柱、圓柱、圓錐和稜台等立體的體積測量問題。在“測量篇”中，可以發現一些來自印度數學的資料，以及來自希臘數學家海倫的《度量論》中的內容。可見花拉子米是熟悉古代印度和希臘的學術遺產的。

花拉子米在天文學、地理學和歷史學等方面也有重要貢獻。天文學在中世紀東方精密科學中佔有重要地位。古希臘和印度的天文學對中世紀伊斯蘭世界天文學發展有很大影響。八世紀末傳入巴格達。九世紀開始出現第一批用阿拉伯文撰寫的天文學著作。其中爲解決天文學問題所需的三角表和天文表的彙編稱爲積尺 (相當於印度的悉檀多)，藉助這些數據表來測定時間，計算天體上星球位

置， 確定日蝕和月蝕開始的時刻等。 這些積尺在當時的天文學著作中佔有重要地位。 花拉子米撰寫的有關著作是比較優秀的， 他努力使古希臘羅馬的天文學理論和傳入古波斯的印度天文學知識結合起來， 詳細闡明了在印度天文學中臻於完善的方法， 對托勒密的天文學理論系統做了補充。 除積尺外， 花拉子米還撰寫了其它天文學著作。 其中有三種是專門講述星盤知識的。 論述了各種星盤的構造、 功能和應用， 並介紹了另一種天文儀器 — 正弦平方儀。 他還撰寫了一些關於日規和曆法的著作。

中世紀阿拉伯國家對地理科學也是十分重視的， 這可能是由於軍事和商業貿易上的的需要。 在當時， 這方面的首要任務是制造世界地圖。 地圖的制作需要複雜的數學和天文學知識， 因此地理學著作是與數學和天文學緊密聯繫在一起的。 科學家們把古希臘羅馬時期的數學地理學原理作爲研究地理學的主要依據。 花拉子米是中世紀阿拉伯世界第一部地理學專著的作者， 他的《地球景像書》爲地理學的研究工作奠定了基礎， 這部著作的阿拉伯文本現存斯特拉斯堡圖書館。 書中首先詳述了當時所知的地球上的居民區並畫出包括重要居民點 (標明坐標)、 山、 海、 島、 河流等的地圖。 作者參考了希臘的有關著作， 但具有獨創性， 給出許多全新的資料。 例如， 他把地球上居民區分爲七個 “氣候帶”， 還修正了托勒密有關著作中的一些數據。 該書附有四張地圖， 是用最古老的阿拉伯制圖術繪制的。 這部著作爲中世紀近東和中東地理學， 大地測量學和制圖學的發展奠定了基礎。

花拉子米還用阿拉伯文寫出了最早的歷史著作， 他的《歷史書》在這門科學的發展中起到了重要作用。

文　　獻

原始文獻

[1] L.C. Karppinski and Robert of Chester’s Latin, *Translation of the*

algebra of al-Khowārizmi, New York, 1915。

[2] А. П. Юшкевич, Арифметический трактат мухаммеда бен муса ал-Хорезми, Труды института истории естествознания и техник том1. 1954。

研究文獻

[3] G.J. Toomer, *Al-Khwārizmi*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 7, 1973, 358－365。

[4] Мухаммад ибн муса ал-Хорезми к 1200-летию со дня рождения, ИИЕиТ АН СССР, ИВ АН УзССР, Москва, 1983。

[5] П. Г Булгаков, Б. А. Розенфельд, А. А. Ахмедов, Мухаммад ал-Хорезми около 783－около 850, Москва, 1983。

[6] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961。

[7] [蘇]С. Х. 希拉日吉諾夫，Г. П. 馬特維耶夫斯卡婭，穆罕默德•伊本•穆薩•阿爾－花拉子米及其對科學史的貢獻，科學史譯叢，4(1984)，第 50－57 頁。

[8] 杜瑞芝，花拉子米和他的代數著作，數學的實踐和認識，1 (1987)，第 79－85 頁。

[9] 杜瑞芝，花拉子米的算術著作，遼寧師範大學學報增刊 (數學史專輯)，1986，第 50－56 頁。