# 馬　哈　維　拉

馬哈維拉 (Mahāvīra) 約生於公元 800 年， 九世紀活躍於印度邁索爾。 約卒於公元 870 年。 數學。

# 馬　哈　維　拉

陳　一　心

(湖南科學技術出版社)

馬哈維拉 (Mahāvīra) 約生於公元 800 年， 九世紀活躍於印度邁索爾。 約卒於公元 870 年。 數學。

馬哈維拉是印度南部邁索爾人， 耆那教教徒， 曾在拉喜特拉庫塔王朝 (Rāṣṭrakūṭa) 的宮廷裡生活過很長一段時間。 約於公元 850 年， 他撰寫了《計算精華》(*Gaṇita sāra saṃgraha*) 一書。 該書在印度南部曾被廣泛使用， 十一世紀被譯成泰盧固語。 二十世紀初， 它被重新發現。 1912 年， 在馬德拉斯譯爲英文出版 。《計算精華》是印度第一本初具現代形式的數學教科書， 現今數學教材中的一些論題和結構在其中已可見到。

馬哈維拉的工作屬於純數學領域， 對天文學問題幾乎沒有涉獵。 這與他的前輩們是頗爲不同的。 在古代印度， 數學家一般也是天文學家。

馬哈維拉的《計算精華》共九章： (1) 術語； (2) 算術運算； (3) 與分數有關的運算； (4) 有各種特點的運算； (5) 與三分律 (比例律) 有關的運算； (6) 混合運算； (7) 面積計算； (8) 與挖掘有關的計算； (9) 與影子有關的計算。

馬哈維拉改進和推廣了他的前輩們的許多結果， 其中最有特色的研究包括： 零的運算、 二次方程、 利率計算、 整數性質、 排列組合、 單分數法則 ··· 等等。

### 1. 零的算法

《計算精華》中敍述了零的算法：“一個數乘零得零， 一個數

加零、減零或除以零，這數都不變”。這表明，當時尚未認識到零不能作除數。

## 2. 一元二次方程和不定方程

在這方面，成書於約公元一世紀時的中國《九章算術》已有較多的成果。公元三世紀時，希臘數學家丟番圖 (Diophantus) 著《算術》一書，也解決了不少二次方程、不定方程問題，但他不承認負數的合理性。馬哈維拉以前的印度數學家不斷地研究了這些方程的解法，阿耶波多 (Āryabhaṭa I) 建立了求一次線性不定方程正整數通解的法則，即庫塔卡 (Kuttaka)。婆羅摩笈多 (Brahmagupta) 給出了一元二次方程的一個求根公式。馬哈維拉也討論了很多這方面的問題。例如：

“一根柱子的 $\frac{1}{12}$ 乘以 $\frac{1}{30}$ 沒於水中，剩下的 $\frac{1}{20}$ 乘以 $\frac{3}{16}$ 埋在淤泥裡，還有 20 腕尺露出在水面上，親愛的朋友，請問這柱子有多高？”

馬哈維拉給出方程

$$\left(x-\frac{x^2}{12\times 30}\right)-\frac{1}{20}\cdot\frac{3}{16}\left(x-\frac{x^2}{360}\right)^2=20，$$

並求出了它的有理解。

在另一些問題中，他還給出了形如

$$x-(bx+c\sqrt{x}+a)=0$$

的方程的解。

馬哈維拉對庫塔卡也作了一些改進。他在倒回去求方程的解時省略了用第一個商數參與運算的一步，一個未知數是用代入方程法求得的。但他總是躲閃著不讓輾轉除法的餘數爲 0，這其實是不必要的。

## 3. “花環數”

兩整數相乘， 若其乘積的數字呈中心對稱， 馬哈維拉便稱之爲“花環數”， 例如：

$$14287143 \times 7 = 100010001\text{；}$$
$$142857143 \times 7 = 1000000001\text{；}$$
$$12345679 \times 9 = 111111111\text{；}$$
$$333333666667 \times 33 = 11000011000011\text{；}$$
$$11011011 \times 91 = 1002002001\text{；}$$
$$27994681 \times 441 = 12345654321\text{。}$$

他對這種狀似花環的特殊整數的構成規律進行了研究。

### 4. 排列組合

古代耆那教典籍中含有一些簡單的排列組合問題， 馬哈維拉給出公式

$$C_r^n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}\text{。}$$

### 5. 單分數法則

單分數是分子爲 1 的分數。 古埃及數學家阿梅斯 (Ahmes) 曾造出把分數 $\dfrac{2}{2n+1}$ 表示成單分數和的表 ($n = 1 \sim 49$)， 其原理很可能是經驗性的。 馬哈維拉研究出一套比較完整的單分數表示法：

(1) 把 1 表示成 $n$ 個單分數的和

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}} + \frac{1}{2\cdot 3^{n-2}}\text{。}$$

(2) 把 1 表示成 $2n-1$ 個單分數的和

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot \frac{1}{2}}+\cdots \\ &+ \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n\cdot \frac{1}{2}}+\frac{1}{2n\cdot \frac{1}{2}}\ 。\end{aligned}$$

(3) 把給定的單分數表示成 $r$ 個分子分別爲 $a_1$、$a_2$、$\cdots$、$a_r$ 的分數之和

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} &= \frac{a_1}{n(n+a_1)}+\frac{a_2}{(n+a_1)(n+a_1+a_2)}+\cdots \\ &+ \frac{a_{r-1}}{(n+a_1+a_2+\cdots+a_{r-2})(n+a_1+a_2+\cdots+a_{r-1})} \\ &+ \frac{a_r}{a_r(n+a_1+\cdots+a_{r-1})}\ 。\end{aligned}$$

(4) 把任何分數表示爲單分數的和

若 $\frac{p}{q}$ 是給定的分數 $(p<q)$，選擇 $i$ 使得 $\frac{q+i}{p}$ 爲一個整數，比如說爲 $r$，則 $\frac{p}{q}=\frac{1}{r}+\frac{i}{rq}$。對 $\frac{i}{1-q}$ 重複此過程，因爲 $i<q$，此過程經有限步便停止了。

(5) 把一個單分數表示爲兩個單分數的和

方法一：$\frac{1}{n}=\frac{1}{pn}+\frac{1}{\frac{pn}{p-1}}$，其中 $p$ 的選擇使 $p-1$ 能被 $n$ 整除；

方法二：$\frac{1}{ab}=\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(a+b)}\ (b\geq 1)$。

(6) 把任何分數表示成有給定分子的兩分數之和

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{\frac{ap+b}{m}\cdot\frac{n}{p}}+\frac{b}{\frac{ap+b}{m}\cdot n}\ ,$$

其中 $p$ 可整除 $n$ 、 $m$ 可整除 $ap+b$ 。

結合 (1) 和 (6)， 任何分數都可表示爲 $2n$ 個帶給定分子的分數之和。

在幾何學方面， 馬哈維拉重新研究了婆羅摩笈多關於邊爲有理數的圓內接四邊形的作圖。 像婆羅摩笈多一樣， 馬哈維拉也沒有察覺到這類四邊形必須是內接於圓的。 馬哈維拉所討論過的幾何作圖問題很多， 例如： (1) 給定一條邊， 作一個其它兩邊均爲有理數的直角三角形； (2) 給定一斜邊 $c$， 求作一直角三角形， 使二直角邊均爲有理數； (3) 求作一個三邊相等的梯形； (4) 求作一有給定面積的圓內接四邊形； (5) 作一有給定周長的圓內接四邊形； (6) 求作一長方形， 使其面積在數量上是其周長或對角線長的倍數， 或者一般地， 是其邊長與對角線長的線性組合； (7) 作兩個長方形： ① 其周長相等， 但其中一個的面積是另一個的 2 倍； ② 其面積相等， 但其中一個的周長是另一個的 2 倍； ③ 一個長方形的周長是另一個的 2 倍， 其面積是另一個的 $\frac{1}{2}$ 。 最後這個作圖問題， 一般地對應著方程

$$m(x+y)=n(u+v)\ ,$$
$$pxy=quv\ ,$$

其中 $(x,y)$ 、 $(u,v)$ 分別爲兩個長方形的邊， $m$ 、 $n$ 、 $p$ 、 $q$ 是給定的數。 馬哈維拉得到了兩個解。

馬哈維拉還研究過橢圓和其它幾何圖形。 他給出橢圓的面積爲周長 $\times\frac{1}{2}$ 半短軸， 這個錯誤的結果可能是從圓面積 $\pi d\times\frac{d}{4}$ (其

中 $d$ 爲圓的直徑) 類推而來的。 對於弓形面積， 他用了近似公式 $S=\frac{1}{2}(b+h)h$ (其中 $b$ 爲弓形的弦長， $h$ 爲弓形的高)， 這一公式最早出現在中國古代數學名著《九章算術》中。

## 文　　獻


### 原始文獻

[1] Mahāvīra, *Gaṇitasārasañgraha*, Madras, 1912。

### 研究文獻

[2] B. Datta and A.N. Singh, *History of Hindu mathematics*, Asia Publishing House, Bombay, 1938。

[3] A.K. Bag, *Mathematical in ancient and medieval India*, Chaukhambha Orientalia, Varanasi, 1979。

[4] David Pingree, *Mahāvīra*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 9, 1981, 22。

[5] D.E. Smith, *The Ganita-Sara-Sangraha of Mahāvīrācārya*, Bibliotheca Mathematica, 3(1908 − 1909), 9, 106 − 110。

[6] E.T. Bell, *Mahavira's Diophantine system*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 38(1946), 121 − 122。

[7] А. П. Юшкевич, История математики в средние века, Москва, 1961。

[8] А. И. Володарский, Очерки истории средневековой индийской математики, Иэдательство《НаУка》,Москва, 1977。