# 斐　波　那　契

斐波那契，L. (Fibonacci，Leonardo) 約 1170 年生於義大利比薩；1250 年卒於比薩。數學。

斐波那契之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fibonacci.html

# 斐　波　那　契

歐　陽　絳

(山西大學)

斐波那契， L. (Fibonacci， Leonardo) 約 1170 年生於義大利比薩； 1250 年卒於比薩。 數學。

斐波那契是波那契 (Bonacci) 家族的成員。 這個家族在當時的比薩很有影響。 斐波那契的父親圭列爾莫 (Guilielmo) 作爲比薩共和國的官員， 於 1192 年左右被派往布日伊 (Bougie， 今屬阿爾及利亞)， 管理比薩的商業僑民。

斐波那契受過良好的敎育。 22 歲時隨父親到布日伊， 在那裡學會了用印度數碼計算。 後來又隨父親到埃及、 敍利亞、 希臘 (拜占庭)、 西西里和普羅旺斯旅行； 他通過廣泛的學習和認眞的研究， 熟練掌握了多種計算技巧。

十二世紀末， 斐波那契回到比薩， 在這裡度過了四分之一個世紀。 他在比薩著書立說， 書中不僅用印度數碼和方法進行計算， 把它們應用於商業活動的所有領域， 並且闡述了許多代數和幾何問題。 他的最重要成果表現在不定分析和數論方面， 並遠遠超過了前人。

大約 1225 年， 斐波那契受到國王腓德烈二世 (1194 − 1250) 的召見， 成爲宮庭數學家。 在保存下來的一份 1240 年的文件上寫著： 由於斐波那契曾向市民和官吏講授計算方法， 每年給予他薪金若干金磅。

保存至今的斐波那契著作主要有五部： (1)《算術書》(*Liber abaci*， 1202， 1228)； (2)《實用幾何》(*Practica geometriae*， 1220， 1221)； (3)《花》(*Flos*， 1225)； (4) 給帝國哲學家德俄

多儒 (Theodorus) 的一封未註明日期的信； (5)《平方數書》(*Liber quadratorum*， 1225)。 我們知道他還有其它著作， 例如關於商業算術的《小方法》(*Di minor guisa*)。 遺憾的是他對歐幾里得《原本》第 10 卷的評述失傳了， 在該書中， 斐波那契以其對無理量的數值處理取代了歐幾里得的幾何表示。 邦孔帕尼 (Boncompagni) 和萊布里 (Libri) 曾編輯整理斐波那契的著作； G. 康托爾 (Cantor)、G. 洛里亞 (Loria) 和 A. П. 尤什克維奇對斐波那契著作的基本原理作過仔細的探討。

## 1.《算術書》

這裡的 “算術”(abacus) 不是指古老的算盤或沙盤， 而是指一般計算。 從十三世紀到十五世紀， 該書有過十二種版本，但是，只有十三世紀和十四世紀初的三種版本是完整的。 該書有 15 章，分四部分。

第一部分， 第 1 − 7 章。 斐波那契首先講述羅馬數碼和指算法， 然後介紹了印度數碼， 按照阿拉伯方式， 個位 “在前面”(在右邊)，分數在整數的左邊。 此外， 他引進了分數中間的那條橫槓。計算方法是通過數值的例子講授的， 並且多用去九法核對結果 (也常用去七法和去十一法)。 書中還給出把分數分解爲單位分數的規則，引進了多種表示分數的符號。 例如， $\frac{6\,2}{7\,5}$ 即 $\frac{2}{5}+\frac{6}{7\cdot 5}$； $0\frac{6\,2}{7\,5}$ 即 $\frac{2}{5}\cdot\frac{6}{7}$； $\frac{6\,2}{7\,5}0$ 即 $\frac{2}{5}+\frac{6}{7}$； $\frac{1\,1\,1\,5}{5\,4\,3\,9}$ 即 $\frac{5}{9}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\cdot\frac{5}{9}$。最後列出許多數表，包括乘法表、質數表、 因數表等。

第二部分， 第 8 − 11 章。 這部分是與商人有關的問題， 例如

貨物的價格、 利潤、 物物交換、 利息、 工資、 合股分紅、 貨幣兌換等。 其中的 “百雞問題”， 可能受到中國的影響。 它實際是一個不定方程問題。

第三部分， 第 12 − 13 章。 這部分內容最爲廣泛， 包括許多怪題、 難題。 例如： (1) “水池問題”： 一隻蜘蛛每天沿水池的牆向上爬若干英呎， 每天晚上往回爬若干英呎， 問它多長時間能爬出來? (2) “兎和狗問題”： 狗不僅往前追而且也往回跑； 速度不是常數而是依算術級數增加的。 問狗多長時間能追上兎? (3) “給與取問題”： 有兩個或多個人， 他們中的一個向其他人中的一個或幾個要一定數量的錢， 並且知道此時這個人的錢和其他人的錢的比例， 求原來的錢數。 一個簡單的例子是： $x + 7 = 5(y - 7)$、 $y+5 = 7(x-5)$。 (4) “求錢數問題”： 兩個或多個人得到一筆錢， 並且知道每個人的錢佔總錢數的比例， 求每個人的錢數。 對於 3 個人， 有如下的幾個表達式： ①$x + b = 2(y + z)$， ②$y + b = 3(x + z)$， ③$z + b = 4(x + y)$。 這也是不定方程問題。 還有一組更爲廣泛流傳的問題， 被稱做 “單獨一個人不能買”， 說的是： 幾個人中的任何一個， 只有當他從別人手中得到一部分錢時， 才能買到某件東西。 這組題有各種變異， 甚至可以涉及 7 個人、 5 匹馬。 以一個僅涉及 3 個人的問題爲例， 其方程可寫爲

$$x + \frac{y+z}{3} = y + \frac{z+x}{4} = z + \frac{x+y}{5} = S。$$

書中包含很多餘數問題， 例如求滿足條件 $n \equiv 1 \pmod{2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ 和 } 6} \equiv 0 \pmod 7$ 的 $n$。 另外， 斐波那契還提出了一個極爲有趣的 “兎子問題”， 即： “由一對兎子開始， 一年後可以繁殖成多少對兎子? ” 其中假定： “每對大兎每月能生產一對小兎， 而每對小兎生長兩個月就成大兎。 ”

斐波那契在運用特殊的方法解決特殊問題方面， 具有驚人的技巧； 他還常常巧妙地引進輔助未知數。 在其它場合， 則使用一般的方法， 如簡單試位法， 反演法， 雙試位法等。

書中表明，斐波那契已注意到負數。他給出了諸如 $22+(-9)=22-9$ 和 $-1+11=+10$ 的運算。

第四部分，第 14、15 章。第 14 章依印度－阿拉伯算法講授求平方根和立方根的數値方法，與現代的方法基本一致，他已懂得在被開方數上加零，以達到更大的精確度。他還給出如下近似方法：對於 $\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r}$，第一個近似是 $a_1=a+r/2a$，令 $r_1=a_1^2-A$，則第二個近似爲 $a_2=a_1-r_1/2a_1$。對於立方根

$$\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{a^3+r}\text{，}$$

第一個近似是

$$a_1=a+\frac{r}{(a+1)^3-a^3}=a+\frac{r}{3a^2+3a+1}\text{。}$$

對於第二個近似，斐波那契令 $r_1=A-a_1^3$，並且

$$a_2=a_1+\frac{r_1}{3a_1\cdot(a+1)}\text{。}$$

雖然奈薩維 (al-Nasawi) 已經知道第一個近似，但進一步的近似則是斐波那契首先發現的。他在該章中實現了歐幾里得無理量的完整的運算，並且對計算的正確性給出幾何式的證明。

第 15 章分爲三節。第一節講比例及它們的各種變換。例如，在一個問題中給定：(1) $6:x=y:9$；(2) $x+y=21$。從 (1) 得 $xy=54$；然後利用《原本》第 2 卷第 5 個命題，得

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{21}{2}\right)^2-54$$

和

$$x-y=15\text{。}$$

從而解得 3 和 18。第二節先講畢達哥拉斯定理應用；然後是許多不同類型的問題，例如：給定 $3^2+4^2=25$，解不定方程 $x^2+y^2=25$。此外還有測量體積的問題，例如求各種物體 (包

括球，取 $\pi = 3\frac{1}{7}$) 沉入水中時，容器內水會溢出多少。第三節給出花拉子米的六種類型的二次方程 $ax^2 = bx$、$ax^2 = c$、$bx = c$、$ax^2 + bx = c$、$ax^2 + c = bx$ 和 $ax^2 = bx + c$；然後對它們作精確數值計算。斐波那契在這裡還講到能歸結爲二次方程的高次方程，例如 (1) $y = 10/x$、(2) $z = y^2/x$ 和 (3) $z^2 = x^2 + y^2$ 被給定，就導致 $x^8 + 100x^4 = 10000$。當涉及幾個未知數時，斐波那契以 radix 和 res 代表 $x$ 和 $y$，以 pars 代表第三個未知數；有時，又把兩個未知數的和定作 res；對於 $x^2$ 用 quadratus，census 或 avere 表示；對於 $x^3$，用 cubus 表示；對於 $x^4$，用 census de censu 或 censum census 表示 $\cdots$ 等等。常數項被稱作 numerus，denarius 或 dragma。

## 2.《實用幾何》

這是斐波那契的第二部著作，在羅馬、巴黎等地存有九個抄本。斐波那契在這部著作中不僅通俗地講授量度問題，還講了一些幾何的證明方法。《實用幾何》分八章，並冠以緒論。在緒論中解釋基本概念以及在比薩流行的線段和面積的測量方法。第 1 章講矩形的面積；第 2 章和第 5 章講平方根和立方根。第 3 章爲線段和平面圖形 (三角形、正方形、矩形、菱形、梯形、多邊形和圓) 的面積計算提供準確的證明；對於圓，採用阿基米得的 96 邊多邊形，$\pi$ 取 $3.141818\cdots$，此外，斐波那契還熟悉有凹角的四邊形。

該書中的許多問題導致二次方程，而這些二次方程可以利用典型的公式來解決。這些問題是以言辭表述的，例如，對於 $4x - x^2 = 3$，他表述爲：如果從四邊的和中減去該正方形的面積，則得 3 竿。在這裡，斐波那契已經注意到了雙解。順著這樣

的思路，他給測量員以實際指導，而且講了使用儀器的方法，例如求三角形田地的高的垂足和在山邊上田地的投影的方法，還講到測量山邊上直線的水平投影的儀器。第 4 章講曲面的剖分 (來源於歐幾里得的《論剖分》)。第 6 章討論體積 (包括正多面體的體積)。第 7 章講物體 (比如樹) 的高的計算方法，並且給出以三角形的相似性爲基礎的測量規則；在這裡，角由象限儀測定。第 8 章講從外接圓和內切圓的直徑計算五邊形和十邊形的邊，及其逆運算；還講到從面積計算邊。隨後有兩個不定方程：$a^2+5=b^2$ 和 $c^2-10=d^2$。最後講如何計算內接於等邊三角形的長方形和正方形的邊長 (斐波那契用的是 60 進位制)。

## 3. 《花》

這部著作是獻給腓特列二世 (Frederick II) 的，多是在宮庭舉行數學競賽時提出的問題，他給出方程 $x^2+5=y^2$ 和 $x^2-5=z^2$ 的解，並證明了三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的解不可能是整數，不可能是分數，也不可能是歐幾里得的無理量 (換句話說，沒有能用直尺和圓規作出的根)；並且，他找到了一個準確到小數點後第 10 位的近似解 $x=1.36880810785$(當時是以 60 進位制寫出的)。我們不知道他是怎樣得到這一結果的。

## 4. 《給帝國哲學家德俄多儒的一封未註明日期的信》

該信的主題是 “百雞問題”，斐波那契在《算術書》中曾討論過這一問題。信中推演了解不定問題的一般方法。然後講了一個幾何問題：求作一個內接於等邊三角形的正五邊形。斐波那契通過二次方程得到解，這是早期將代數應用於幾何的典型範例。該信以一個有五個未知數的線性問題結束；斐波那契沒有邏輯地構造解，而只是給出一個機械的公式。

## 5.《平方數書》

這部關於不定分析的，有獨創性的著作，使他成爲丟番圖 (Diophantus) 和 P.de 費馬 (Fermat) 之間在數論方面的傑出數學家。該書撰於1225年。其主題是：求 $x^2+5=y^2$ 和 $x^2-5=z^2$ 這兩個齊次方程的解。斐波那契知道：從 1 開始，連續加奇數所得和爲平方數。對於奇數 $a$，從 1 到 $(a^2-2)$ 的奇數和爲 $(\frac{a^2-1}{2})^2$。如果在此表達式上再加上 $a^2$，則得另一個平方數 $(\frac{a^2+1}{2})^2$。

斐波那契還給出了下述定理：如果 $(a^2+b^2)$ 和 $(x^2+y^2)$ 是平方數，而且 $a:b\neq x:y$，$a:b\neq y:x$，則就有如下等式 $(a^2+b^2)\cdot(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(ay+bx)^2+(by-ax)^2$。然後，斐波那契引進一組特殊的數：$(a+b)$ 爲偶數時，$n=ab\cdot(a+b)(a-b)$；$(a+b)$ 爲奇數時，$n=4ab(a+b)(a-b)$。他命名這樣一個數爲相含數 (congruum)，並且證明：它必定能被 24 整除。他發現 $x^2+h$ 和 $x^2-h$ 能同時是平方數，僅當 $h$ 是相含數時。例如 $5^2+24=7^2$、$5^2-24=1^2$ 和 $10^2+96=14^2$、$10^2-96=2^2$。對於 $a=5$ 和 $b=4$、$h=720=5\cdot 12^2$，於是得到平方數的兩個差 $y^2-x^2=x^2-z^2=720$。他確定 $2401-1681=1681-961$ 或 $49^2-41^2=41^2-31^2$。以 $12^2$ 分之，得到

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2+5=\left(4\frac{1}{12}\right)^2$$

和

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2-5=\left(2\frac{7}{12}\right)^2 。$$

斐波那契接著證明了數論中的一系列命題，例如：平方數不可能

是相含數， $x^2+y^2$ 和 $x^2-y^2$ 不可能同時是平方數， $x^4-y^4$ 不可能是平方數 $\cdots$ 等等。 在這類問題中， 斐波那契長期處於領先地位。

縱觀斐波那契的活動， 應該說他在西方的數學復興中起到了先鋒作用， 或者說他在東西方的數學發展中起到了橋樑作用。 G. 卡爾達諾 (Cardano) 在講述斐波那契的成就時說： 我們可以假定， 所有我們掌握的希臘之外的數學知識都是由於斐波那契的存在而得到的， 他在 L. 帕喬利 (Pacioli) 以前很久， 就從印度和阿拉伯取得了這些知識。 斐波那契對古代數學作了嶄新的思考， 並且獨立地把它推向前進。 在算術方面， 他顯示出計算上的高超才能， 並把負量和零認作數。 在幾何上， 他既具備歐幾里得的嚴謹又懂得如何應用新的代數方法解幾何問題。

斐波那契的數學工作對後世有深遠影響。 特別值得一提的是： 以《 算術書 》中那個有趣的 “兎子問題” 爲基礎， 後人得出著名的斐波那契數列：

$$1、1、2、3、5、8、13、21、34、\cdots$$

這個數列的特徵是

$$u_1=u_2=1、u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\ (n\geq 3)。$$

其通項爲

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n。$$

一個正整數數列， 其通項竟要用無理數 $\sqrt{5}$ 來表達! 這是一個十分意外的結果。 斐波那契數列有許多重要的性質和應用。 例如， 由於

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

它便與黃金分割聯繫起來。 1963 年創刊的《 斐波那契季刊 》(*The Fibonacci Quarterly*) 專門登載有關這個數列的最新發現。 其中包

括：

(1) 任何斐波那契數的平方與其兩邊的兩個斐波那契數的乘積之差爲 1。

(2) 任何兩個相繼的斐波那契數的平方和

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}\text{。}$$

(3) 對於任何四個相繼的斐波那契數 $A$、$B$、$C$、$D$，下列公式成立：

$$C^2 - B^2 = A \times D\text{。}$$

(4) 最後一位數字，每 60 個數一循環；最後兩位數字，每 300 個數一循環；最後三位數字，每 1500 個數一循環；最後四位數字，每 15000 個數一循環；最後五位數字，每 150000 個數一循環；$\cdots$ 等等。

(5) 每第三個數可被 2 整除，每第四個數可被 3 整除，每第五個數可被 5 整除，每第六個數可被 8 整除 $\cdots$ 等等。這些除數本身也構成斐波那契數列。

儘管斐波那契數列的通項公式和關於斐波那契數列的一系列成果是後人得到的，但我們不能忘記：這些數學成果都起因於斐波那契在《算術書》中提出的兔子問題。

## 文　　獻

### 原始文獻


[1] L. Fibonacci, *Scritti di Leonardo Pisano*, B. Boncompagni ed., 2 vols; Rome, 1875 – 1862。

[2] Leonardo de Pise, *Le livre des nombres carrés*, P. Ver Eecke transl. Bruges, 1952。

[3] Leonardo Fibonacci, *La pratica di geometria*, volgarizzata da Cristofano di Gherardo di Dino cittadino pisano, G. Arrighi transl. Pisa, 1966。

[4] B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano metematico del secolo decimoterzo*, Atti dell' Academia pontificia dei Nuovi Lincei, 5(1851－1852), 5－91, 208－246。

[5] B. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secole decimoterzo*, notzie raccolte Rome, 1854

[6] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II, Leipzig, 1913, 3－53。

[7] G. Loria, *Leonardo Fibonacci* 見 *Gli scienziati italiani*, Aldo Mieli, ed., Rome, 1923, 4－12。

[8] G. Sarton, *Introduction to the history of science*, II, Baltimore, 1931, 611－613。

[9] D.E. Smith, *History of mathematics*, New York, 1958。

[10] A.P. Youschkevitch, *Geschichte der Mathematik in Mittelalter*, Leipzig, 1964。