秦　九　韶

秦九韶字道古。普州安岳(今四川安岳)人。南宋嘉泰二年(1202 年)生;約景定二年(1261 年)卒於梅州(今廣東梅縣)。數學。

秦 九 韶

何 紹 庚

(中國科學院自然科學史研究所)

秦九韶字道古。普州安岳(今四川安岳)人。南宋嘉泰二年(1202年)生;約景定二年(1261年)卒於梅州(今廣東梅縣)。數學。

秦九韶祖籍魯郡(今河南范縣),其父秦季槱,字宏父,紹熙四年(1193)進士,後任巴州(今四川巴中)守。嘉定十二年(1219)三月,興元(今陝西漢中)軍士張福、莫簡等發動兵變,入川後攻取利州(今廣元)、閬州(今閬中)、果州(今南充)、遂寧(今遂寧)、普州(今安岳)等地。在嘩變軍隊進佔巴州時,秦季槱棄城逃走,攜全家輾轉抵達南宋都城臨安(今杭州)。在臨安,秦季槱曾任工部郎中和秘書少監等官職。寶慶元年(1225)六月,被任命爲潼川知府,返回四川。

秦九韶自幼生活在家鄉,十八歲時曾“在鄉裡爲義兵首”,後隨父親移居京都。他是一位非常聰明的人,處處留心,好學不倦。其父任職工部郎中和秘書少監期間,正是他努力學習和積累知識的時候。工部郎中掌管營建,而秘書省則掌管圖書,其下屬機構設有太史局,因此,他有機會閱讀大量典籍,並拜訪天文曆法和建築等方面的專家,請教天文曆法和土木工程問題,甚至可以深入工地,了解施工情況。他又曾向“隱君子”學習數學。他還向著名詞人李劉學習駢儷詩詞,達到較高水準。通過這一階段的學習,秦九韶成爲一位學識淵博、多才多藝的青年學者,時人說他“性極機巧,星象、音律、算術,以至營造等事,無不精究”,“遊戲、毬、馬、弓、劍,莫不能知。”

1225 年， 秦九韶隨父親至潼川， 擔任過一段時間的縣尉。 數年後， 李劉曾邀請他到南宋國史院校勘書籍文獻， 但未成行。 端平三年 (1236) 元兵攻入四川， 嘉陵江流域戰亂頻仍， 秦九韶不得不經常參與軍事活動。 他後來在《 數書九章 》序中寫道："際時狄患， 歷歲遙塞， 不自意全於矢石間， 嘗險罹憂， 荏苒十祀， 心槁氣落"， 眞實地反映了這段動盪的生活。 由於元兵進逼和潰卒騷亂， 潼川已難以安居， 於是他再度出川東下， 先後定居湖州 (今浙江吳興)。 秦九韶在任和州守期間， 利用職權販鹽， 強行賣給百姓， 從中牟利。 定居湖州後， 所建住宅 "極其宏敞"， "後爲列屋， 以處秀姬 、 管弦"。 據載， 他在湖州生活奢華， "用度無算"。

淳祐四年 (1244) 八月， 秦九韶以通直郎爲建康府 (今江蘇南京) 通判， 十一月因母喪離任， 回湖州守孝。 在此期間， 他專心致志研究數學， 於淳祐七年 (1247) 九月完成了數學名著《 數書九章 》。 由於在天文曆法方面的豐富知識和成就， 他曾經受到皇帝召見， 闡述自己的見解， 並呈有奏稿和 "數學大略" (即《 數書九章 》)。

寶祐二年 (1254)， 秦九韶回到建康， 改任沿江制置使參議， 不久去職。 此後， 他極力攀附和賄賂當朝權貴賈似道， 得於寶祐六年 (1258) 任瓊州守， 但三個月後被免職。 同時代的劉克莊說秦九韶 "到郡 (瓊州) 僅百日許， 郡人莫不厭其貪暴， 作卒哭歌以快其去"， 周密亦說他 "至郡數月， 罷歸， 所攜甚富"。 看來， 由於他在瓊州的貪暴， 百姓極爲不滿。 秦九韶從瓊州回到湖州後， 投靠吳潛， 得到吳潛賞識， 兩人關係甚密。 吳潛曾相繼在開慶元年 (1259) 擬任以司農寺丞， 景定元年 (1260) 擬任以知臨江軍 (今江西清江)， 都因遭到激烈反對而作罷。 在這段時間裡， 秦九韶熱衷於謀求官職， 追逐功名利祿， 在科學上沒有顯著成績。 在南宋統治集團內部的激烈鬥爭中， 吳潛被罷官貶謫， 秦九韶也受到牽

連。 約在景定二年 (1261)， 他被貶至梅州做地方官，“在梅治政不輟”， 不久便死於任所。

秦九韶在數學上的主要成就是系統地總結和發展了高次方程數值解法和一次同餘組解法， 提出了相當完備的 “正負開方術” 和 “大衍求一術”， 達到了當時世界數學的最高水準。

我們知道， 古典代數學的中心課題是方程論， 我國古代對於列方程和解方程都曾取得傑出的成就。 早在《 九章算術 》中便已載有開平方術和開立方術， 後來又有 “開帶從平方”、“開帶從立方” 等二次和三次方程的數值解法， 祖沖之父子和王孝通等都對這一課題進行了深入研究。 在十一世紀， 宋代數學家賈憲又創造一種新的開方法 —— 增乘開方法， 通過隨乘隨加導出減根方程， 逐步求出高次方程的正根。 以上這些方法都要求方程各項係數爲正整數。在宋代， 有不少數學家研究了高次方程數值解法， 特別是劉益提出的 “正負開方術”， 方程係數可正可負， 取消了以前對方程係數只允許爲正整數的限制。 但是， 這些工作還不夠完整和系統。秦九韶在前人工作的基礎上， 提出一套完整的利用隨乘隨加逐步求出高次方程正根的程序， 亦稱 “正負開方術”， 現稱秦九韶法。

a	商
a_n	實
a_{n-1}	方
a_{n-2}	上廉
a_{n-3}	二廉
$\vdots$	各廉
$\vdots$	
a_1	下廉
a_0	隅

對於形如

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$

的高次方程及其正根， 秦九韶將其表示爲右圖的形式。 這與古代開方術的分離係數表示法基本一致， 只是他令 “實” 常爲負 ($a_n < 0$)， 這一點有所差別。 圖中的數碼用籌算數字。 下面以《 數書九章 》“尖田求積” 問題爲例說明秦九韶高次方程數值解法的運算步驟：

(1) 依據術文列出方程

$$-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0，$$

佈置算籌如圖式 (1)。“益隅” 是指 x^4 的係數是負數，“從上廉” 是

指 x^2 的係數是正數，“虛” 表示係數爲零，“實” 規定爲負數。

(2) 把 “上廉” 向左移四位，“隅” 向左移八位， 算得上商 8，放在 “實” 的百位數上邊， 如圖式 (2)。 這實際上相當於對原方程進行 $x = 100x_1$ 的變換， 得

$$-10^8x_1^4 + 763200 \cdot 10^4x_1^2 - 40642560000 = 0\text{。}$$

40642560000	實
0	虛方
763200	從上廉
0	虛下廉
1	益隅

(1)

8	商
40642560000	實
0	方
763200	從上廉
0	下廉
1	益隅

(2)

(3) 以商 8 乘益隅得 -800000000 置負下廉。 以 8 乘負下廉，與原有的上廉相消，得 1232000000 爲上廉。 以 8 乘上廉得 9856000000 爲方。 以 8 乘方得 “正積” 78848000000， 以原有的負實與正積相加， 得正實 38205440000。 如圖式 (3)。

(4) 以 8 乘益隅， 併入下廉得 -1600000000。 以 8 乘下廉，與原有的正上廉相消得 -11568000000 爲負上廉。 以 8 乘上廉與原有的方相消， 得 -82688000000 爲負方， 如圖式 (4)。

8	商
38205440000	正實
98560000	方
123200	上廉
800	負下廉
1	益隅

(3)

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
1156800	負上廉
1600	負下廉
1	益隅

(4)

(5) 以 8 乘益隅， 併入下廉得 -2400000000。 以 8 乘下廉， 併入上廉， 得 -30768000000 爲負上廉。 如圖式 (5)。

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
2400	負下廉
1	益隅

(5)

8	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
3200	負下廉
1	益隅

(6)

(6) 以 8 乘益隅， 併入下廉得 -3200000000 爲負下廉。 如圖式 (6)。

(7) 把 “方” 向右移一位， 上廉移二位， 下廉移三位， 隅移四位。 以負方除正實， 算得次商 4。 如圖式 (7)。

(8) 以次商 4 乘益隅， 併入下廉得 -3240000。 以 4 乘下廉併入上廉得 -320640000。 以 4 乘上廉， 併入方得 -9551360000。 以 4 乘方， 與正實相消， 恰恰消盡。 即得 840 爲方程的一個正根。 如圖式 (8)。

84	商
38205440000	正實
826880000	負方
3076800	負上廉
3200	負下廉
1	益隅

(5)

840	商
	實空
955136000	負方
3206400	負上廉
3240	負下廉
1	益隅

(6)

由以上運算過程可以看出， 當求得 $8 < x_1 < 9$， 確定第一位得數爲 8 以後， 圖式 (3) 至圖式 (6) 相當於求出進行 $x_2 = x_1 - 8$ 的變換

後所應得出的新方程 (圖式 (6))：

$$\begin{aligned}&-10^8x_2^4-3200\cdot 10^6x_2^3-3076800\cdot 10^4x_2^2\\&\qquad -826880000\cdot 10^2x_1+38205440000=0\text{。}\end{aligned}$$

圖式 (7) 相當於對上式進行 $x_3=10x_2$ 的變換後得出的新方程：

$$\begin{aligned}&-10^4x_3^4-3200\cdot 10^3x_3^3-3076800\cdot 10^2x_3^2\\&\qquad -826880000\cdot 10x_3+38205440000=0\text{。}\end{aligned}$$

最後求得 $x_3=4$，因此，

$$x=100x_1=100(8+x_2)=100\left(8+\frac{x_3}{10}\right)=840\text{。}$$

從 (1) 到 (8) 的各個步驟基本上都是自下而上隨乘相加，最後由 "實" 中減去，有很強的機械性。這也是 "增乘開方法" 的主要特點。有人說，計算機發明以後，解方程變得有趣了。確實是這樣，秦九韶的高次方程數值解法，可以毫無困難地轉化爲計算機程序。在《數書九章》中，秦九韶列舉了二十多個解方程問題，次數最高達十次。除一般方法外，還討論了 "投胎"、"換骨"、"玲瓏"、" 同體連枝" 等特殊情形，並將其廣泛應用於面積、體積、測量等方面的實際問題。在西方，關於高次方程數值解法的探討，經歷了漫長的歷史過程，直到 1840 年，義大利數學家 P. 魯菲尼 (Ruffini，1765 − 1822) 才創立了一種逐次近似法解決數字高次方程無理數根的近似值問題，而 1819 年英國數學家 W. G. 霍納 (Horner，1768 − 1837) 在英國皇家學會發表的論文 "用連續逼近法解任何次數字方程的新方法" 中，才提出與增乘開方法演算步驟相同的算法，後被稱爲 "霍納法"。秦九韶的成就要比魯菲尼和霍納早五六百年。

秦九韶對於一次同餘組解法的理論概括，是他在數學史上的另一傑出貢獻。中算家對於一次同餘式問題解法的研究是適應天文學

家推算上元積年的需要而產生的。 最早見於記載的一次同餘問題是《孫子算經》中的 “物不知數問題” (亦稱 “孫子問題”)：“今有物不知其數， 三三數之剩二， 五五數之剩三， 七七數之剩二， 問物幾有何？” 這相當於求解一次同餘組：

$$N \equiv 2 \pmod 3 \equiv 3 \pmod 5 \equiv 2 \pmod 7 \text{，}$$

等價於求解不定方程組

$$N = 3x + 2 \text{、} N = 5y + 3 \text{、} N = 7z + 2$$

的正整數解 N 。《孫子算經》所給出的答案是 $N = 23$， 但其算法很簡略， 未說明其理論根據。 秦九韶在《數書九章》中明確給出了一次同餘組的一般性解法， 現簡要介紹如下：

已知

$$N \equiv R_i \pmod{A_i} \text{，} i = 1 \text{、} 2 \text{、} 3 \text{、} \cdots \text{、} n \text{，}$$

求最小的正整數 N。 設 A_i 兩兩互質， 若能求得一串數值 k_1、k_2、 $\cdots$ 、 k_n， 使 k_i 分別滿足

$$k_i \frac{M}{A_i} \equiv 1 \pmod{A_i} \text{，} i = 1 \text{、} 2 \text{、} 3 \text{、} \cdots \text{、} n \text{，}$$

其中 $M = A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n$， 則

$$N \equiv R_1 k_1 \frac{M}{A_1} + R_2 k_2 \frac{M}{A_2} + \cdots + R_n k_n \frac{M}{A_n} \pmod M \text{，}$$

於是， 問題的解答爲

$$N = \sum_{i=1}^{n} R_i k_i \frac{M}{A_i} - pM \text{，}$$

p 爲正整數， 它的取值要使 N 成爲小於 M 的正整數。 這就是孫子剩餘定理， 在西方文獻中稱爲 “中國剩餘定理”。

顯然， 一次同餘組解法的關鍵是如何選定滿足條件

$$k_i \frac{M}{A_i} \equiv 1 \quad \pmod{A_i}$$

的一組數 k_i。秦九韶將這組數稱爲 "乘率", 並在《數書九章》中詳細敍述了計算乘率的方法 —— "大衍求一術" (現在亦指整個一次同餘組解法)。用現代符號表示, 大衍求一術的基本計算程序是:

若 $G_i = \dfrac{M}{A_i} > 0$, 先用 A_i 除 G_i, 求得餘數 $g_i < A_i$, 那麼 $G_i \equiv g_i \pmod{A_i}$, 於是 $k_iG_i \equiv k_ig_i \pmod{A_i}$。但 $k_iG_i \equiv 1 \pmod{A_i}$, 故問題歸結爲求 k_i, 使之滿足 $k_ig_i \equiv 1 \pmod{A_i}$。秦九韶把 A_i 稱爲 "定數", g_i 稱爲 "奇數"。他的大衍求一術實際上就是把奇數 g_i 和定數 A_i 輾轉相除, 相繼求得商數 q_1、q_2、$\cdots$、q_n 和餘數 r_1、r_2、$\cdots$、r_n。在輾轉相除過程中, 隨即算出下表右側的 c_i 值:

	商數	餘數	c 值
A_1/g_1	q_1	r_1	$c_1 = q_1$
g_1/r_1	q_2	r_2	$c_2 = q_2c_1 + 1$
r_1/r_2	q_3	r_3	$c_3 = q_3c_2 + c_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r_{n-2}/r_{n-1}	q_n	r_n	$c_n = q_nc_{n-1} + c_{n-2}$

秦九韶指出, 當 $r_n = 1$ 而 n 是偶數時, 最後得到的 c_n 就是所求乘率 k_i。如果 $r_n = 1$ 而 n 是奇數, 那麼把 r_{n-1} 和 r_n 相除, 形式上令 $q_{n-1} = r_{n-1} - 1$, 那麼餘數 r_{n+1} 仍然是 1, 再作 $c_{n+1} = q_{n+1}c_n + c_{n-1}$, 這時 $n+1$ 是偶數, c_{n+1} 就是所求的 k_i。不論哪種情形, 最後一步都出現餘數 1, 故稱 "求一術"。可以證明, 秦九韶這一算法是完全正確的和十分嚴密的。下面是用大衍求一術求乘率的一個數字實例 (其數字見於《數書九章》中關於開禧曆上元積年的推算)。已知奇數 $g = 377873$, 定數 $A = 499067$, 求乘率 k。按照輾轉相除公式, 整個計算過程可表示爲如下的籌算圖式:

(1)	(天元) 1	(奇) g	1	377873
		(定) A		499067

(2)	1	g	1	377873
	$c_1 = q_1$	r_1	1	121194
		(q_1)		$(q_1 = 1)$

(3)		(q_2)		$(q_2 = 3)$
	$c_2 = c_1 q_2 + 1$	r_2	4	14291
	c_1	r_1	1	121194

(4)	c_2	r_2	4	14291
	$c_3 = c_2 q_3 + c_1$	r_3	33	6866
		(q_3)		$(q_3 = 8)$

(5)		(q_4)		$(q_4 = 2)$
	$c_4 = c_3 q_4 + c_2$	r_4	70	559
	c_3	r_3	33	6866

(6)	c_4	r_4	70	559
	$c_5 = c_4 q_5 + c_3$	r_5	873	158
		(q_5)		$(q_5 = 12)$

(7)		(q_6)		$(q_6 = 3)$
	$c_6 = c_5 q_6 + c_4$	r_6	2689	85
	c_5	(q_5)	873	158

(8)

c_6	r_6	2689	85
$c_7 = c_6 q_7 + c_5$	r_7	3562	73
	(q_7)		$(q_7 = 1)$

(9)

	(q_8)		$(q_8 = 1)$
$c_8 = c_7 q_8 + c_6$	r_8	6251	12
(c_7)	r_7	3562	73

(10)

c_8	r_8	6251	12
$c_9 = c_8 q_9 + c_7$	r_9	41068	1
	(q_9)		$(q_9 = 6)$

(11)

	(q_{10})		$(q_{10} = 11)$
$c_{10} = c_9 q_{10} + c_8$	r_{10}	457999	1
c_9	r_9	41068	1

從圖式 (11) 可知，右上角的數字 (r_{10}) 已變成 1，並且 $n = 10$ 是偶數。因此，左上角的數字 (c_{10}) 即爲所求乘率，即 $k = 457999$，這時有 $377873 \times 457999 \equiv 1 \pmod{499067}$。由上例可見，秦九韶的大衍求一術與他的高次方程數值解法一樣，簡潔、明確、帶有很強的機械性，其程序亦可毫無困難地轉化爲算法語言，用計算機來實現。在《數書九章》中，秦九韶通過大量例題，如 “古曆會積”、“治曆演紀”、“積尺尋源”、“推計土功”、“程行計地” 等等，展示了大衍求一術在解決曆法、工程、賦役和軍旅等實際問題中的廣泛應用。由於在許多問題中，模數 A_i 並非兩兩互質，而中國傳統數學沒有質數概念，所以將模數化爲兩兩互質是相當困難的問題。秦九韶所設計的將模數化爲兩兩互質的算法，儘管還不完善，但仍比較成功地解決了這一難題，有人稱之爲 “沒有質數的質數論”。綜觀他在求解一次同餘組問題的各項成

就， 正如李文林、 袁向東所說：“所有這些系統的理論， 周密的考慮， 即使以今天的眼光看來也很不簡單， 充分顯示了秦九韶高超的數學水準和計算技巧。” 在西方， 最早接觸一次同餘式的是義大利數學家 L. 斐波那契 (Fibonacci， 約 1170－1250)。 他在《算盤書》中給出了兩個一次同餘問題， 但沒有一般算法。 直到十八－十九世紀， L. 歐拉 (Euler， 1743)、 G. F. 高斯 (Gauss， 1801) 才對一次同餘組進行深入研究， 重新獲得與中國剩餘定理相同的定理， 並對模數兩兩互質的情形給出了嚴格證明。 1852 年， 英國傳教士、 漢學家偉烈亞力 (A. Wylie， 1815－1887) 發表《中國數學科學札記》(*Jottings on the science of Chinese arithmetic*)， 其中談到了大衍求一術。 從 1856 年到 1876 年， 德國人 L. 馬蒂生 (Matthiessen， 1830－1906) 等西方學者又多次指出大衍求一術原理與高斯方法的一致性， 從而更加引起了歐洲學者的矚目。 德國著名數學史學 M. 康托爾 (Cantor， 1829－1920) 高度評價了大衍求一術， 他稱讚發現這一算法的中國數學家是 “最幸運的天才”。 印度學者對一次同餘式問題也有過重要貢獻。 在六世紀至十二世紀間， 印度數學家提出了一種類似於 “求一術” 的 “庫塔卡” 算法， 應用於解決與一次同餘組等價的不定方程問題。 但在時間上晚於《孫子算經》， 而在一般性和完整性上又不如大衍求一術。

秦九韶所著《數書九章》， 是他勤奮學習、 苦心鑽研和多年積累的數學成就的結晶， 是一部堪與《九章算術》相媲美的數學名著。 這部著作， 南宋時稱爲《數學大略》或《數術大略》， 明清時還曾題稱《數學九章》， 明萬曆時趙琦美爲此書撰寫跋文始稱《數書九章》。 後來道光時按趙抄本校刻的《宜稼堂叢書》本流傳較廣， 《數書九章》遂成爲現今的通稱。 該書共十八卷 81 題， 分爲九類， 每類 9 題。 這些問題是秦九韶從他收集的大量資料中精選出來的較有代表性的問題。 主要內容是：

(1) 大衍類， 一次同餘組的解法， 大衍求一術；

(2) 天時類， 曆法推算， 雨雪量的計算；

(3) 田域類， 土地面積；

(4) 測望類， 勾股、 重差等測量問題；

(5) 賦役類， 田賦、 戶稅；

(6) 錢穀類， 徵購米糧及倉儲容積；

(7) 營建類， 建築工程；

(8) 軍旅類， 兵營佈置和軍需供應；

(9) 市易類， 商品交易和利息計算。

從其著作體例來看，《數書九章》受到《九章算術》等經典著作的傳統影響， 仍然採用問題集的形式， 但在各題術文 (解題方法) 之後， 多附有 "草"， 即表明演算步驟的算草圖式。 在《數書九章》中， 除了前面提到的大衍求一術和正負開方術兩項重要成就外， 還記載了不少其它方面的成就。 例如， 他改進了線性方程組的解法， 普遍應用互乘相消法代替傳統的直除法， 已同今天所用的方法完全一致； 在開方中， 他發展了劉徽開方不盡求微數的思想， 最早使用十進小數來表示無理根的近似值； 他對於《九章算術》和《海島算經》的勾股測量術也多所闡發； 他在幾何方面的另一項傑出成果是 "三斜求積術"， 即已知三角形三邊之長求其面積的公式。 設三角形面積爲 A， 三邊長分別爲 a、 b、 c， 則秦九韶的公式相當於：

$$A=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]},$$

這個公式與古希臘著名的海倫公式

$$\left(A=\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\right)\text{，其中 } s=\frac{a+b+c}{2}$$

是等價的。《數書九章》的內容非常豐富， 我們不僅可以找到數學和天文曆法乃至雨雪量等方面的珍貴資料， 而且還可以從中了解

到南宋時期戶口增長、耕地擴展、賦稅、利貸、度量衡以及貨幣流通、海外貿易等等社會經濟領域的眞實情況。

關於秦九韶的哲學思想和數學思想，顯然與宋代儒學中的道學學派一致。他明確指出“數與道非二本也”，再加上數學實踐的切身體會，使他對於數學的重要性產生了較爲淸楚的認識。他說，數學研究“大則可以通神明，順性命；小則可以經世務，類萬物，詎容以淺近窺哉！”但他又承認自己對於“通神明，順性命”沒有太深的體會，於是注意搜求天文曆法、生產、生活、商業貿易以及軍事活動中的數學問題，“設爲問答，以擬於用”，盡力滿足社會實踐的需要，並告誡人們要學好數學，精於計算，以避免由於計算錯誤而引起的“財蠹力傷”等等不良後果。爲此，他付出了辛勤勞動，撰寫出二十餘萬言的數學巨著。他的這種思想和作法是難能可貴的，應該給予充分的肯定。

秦九韶是一位旣重視理論又重視實踐，旣善於繼承又勇於創新的數學家。他所提出的大衍求一術和正負開方術及其名著《數書九章》，是中國數學史上光彩奪目的一頁，對後世數學發展產生了廣泛的影響。美國著名科學史家 G. 薩頓 (Sarton，1884－1956) 說過，秦九韶是“他那個民族，他那個時代，並且確實也是所有時代最偉大的數學家之一。”

文　　獻

原始文獻

[1] (宋) 秦九韶，數書九章，《宜稼堂叢書》本，1841。

[2] (宋) 劉克莊，繳秦九韶知臨江軍奏狀，見《後村先生大全集》卷八十一，上海商務印書館影印賜硯堂鈔本，1929。

研究文獻

[3] (淸) 阮元，疇人傳・卷二十二，商務印書館重印本，1955。

[4] (淸) 焦循，開方通釋，《木犀軒叢書》本，光緒年間。

[5] (清) 焦循， 大衍求一術， 天津德化李木齋藏稿本。

[6] (清) 張敦仁， 求一算術， 自刊本， 1831。

[7] (清) 張敦仁， 開方補記， 1834。

[8] (清) 時曰淳， 求一術指， 長沙刊本， 1873。

[9] (清) 黃宗憲， 求一術通解， 《古今算學叢書》本， 1898。

[10] 李儼， 大衍求一術之過去與未來， 見《中算史論叢》第 1 集， 科學出版社， 1954。

[11] 李儼、 杜石然， 中國古代數學簡史， 中華書局， 1963-1964

[12] 錢寶琮， 求一術源流考， 見《錢寶琮科學史論文選集》， 科學出版社， 1983。

[13] 錢寶琮， 增乘開方法的歷史發展， 見錢寶琮等《宋元數學史論文集》， 科學出版社， 1966。

[14] 錢寶琮， 秦九韶《數書九章》研究， 見錢寶琮等《宋元數學史論文集》， 科學出版社， 1966。

[15] 錢寶琮主編， 中國數學史， 科學出版社， 1964。

[16] 吳文俊主編， 秦九韶與《數書九章》， 北京師範大學出版社， 1987。

[17] 李文林、 袁向東， 中國剩餘定理， 見自然科學史研究所主編《中國古代科技成就》， 中國青年出版社， 1978。

[18] 何紹庚， 秦九韶， 見闕勛吾主編《中國古代科學家傳記選註》， 岳麓書社， 1983。

[19] Ho Peng-Yoke, *Ch'in Chiu-shao*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. III, Charles Scribner's Sons, New York, 1971。

[20] U. Libbrecht, *Chinese mathematics in the thirteenth century*, MIT, 1973。