# 楊　輝

楊輝字謙光。南宋錢塘 ( 今杭州 ) 人。生於約宋理宗嘉熙二年 (1238 年 )，卒於約元成宗大德二年 (1298 年 )。數學。

楊輝之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Yang_Hui.html

# 楊 輝

孔 國 平

(中國科學院科學出版社)

楊輝字謙光。南宋錢塘 ( 今杭州 ) 人。生於約宋理宗嘉熙二年 (1238 年 )，卒於約元成宗大德二年 (1298 年 )。數學。

楊輝曾做過地方官，足跡遍及錢塘、台州 (今浙江臨海)、蘇州等地。與他同時代的陳幾先稱讚他 “以廉飭己，以儒飾吏”。楊輝特別注意社會上有關數學的問題，多年從事數學研究和教學工作，是東南一帶有名的數學家和數學教育家。他走到哪裡都有人請教數學問題。從 1261 年到 1275 年的十五年中，他先後完成數學著作五種二十一卷，即《詳解九章算法》十二卷 (1261)，《日用算法》二卷 (1262)，《乘除通變本末》三卷 (1274)，《田畝比類乘除捷法》二卷 (1275) 和《續古摘奇算法》二卷 (1275) (其中《詳解》和《日用算法》已非完書)。後三種合稱爲《楊輝算法》。

關於這五部書的編著過程，楊輝寫道：“《九章》爲算經之首，輝所以尊尙此書，留意詳解。或者有云：無啓蒙之術，初學病之，又以乘除加減爲法，秤斗尺田爲問，目之曰《日用算法》，而學者粗知加減歸倍之法，而不知變通之用，遂易代乘代除之術，增續新條，目之曰《乘除通變本末》，及見中山劉先生益撰《議古根源》，演段鎖積，有超古入神之妙，其可不爲發揚，以俾後學，遂集爲《田畝算法》。通前共刊四集，自謂斯願滿矣。一日忽有劉碧澗、丘虛谷攜諸家算法奇題及舊刊遺忘之文，求成爲集，願助工板刊行。遂添摭諸家奇題與夫繕本及可以

續古法草總爲一集， 目之曰《 續古摘奇算法 》。” (《 續古摘奇算法 》序)

以上《 乘除通變本末 》三卷， 上卷叫《 算法通變本末 》， 中卷叫《 乘除通變算寶 》， 下卷叫《 法算取用本末 》， 下卷是與史仲榮合撰的。

楊輝數學著作的特點是深入淺出 、 圖文並茂， 很適合於教學， 而且有不少創新。 另外， 楊輝的書中還記錄了一些古代有價值的數學成果， 如賈憲的增乘開方和開方作法本源圖載於《 詳解九章算法 》的《 纂類 》， 劉益的正負開方術載於《 田畝比類乘除捷法 》。 楊輝自己的成就， 主要表現在以下各方面。

## 1. 垛積術

楊輝的垛積術， 是在沈括隙積術的基礎上發展起來的， 置於《 詳解九章算法 》的商功章。 他研究了垛積與各類多面體體積的聯繫， 由多面體體積公式導出相應的垛積術公式。 例如方亭 (正四稜台) 體積爲

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)\text{，}$$

其中 $a$ 爲上底邊長， $b$ 爲下底邊長。

若由大小相等的圓球垛成類似於正四稜台的方垛， 上底由 $a \times a$ 個球組成， 以下各層的長、 寬依次各增加 1 個球， 共有 $n$ 層， 最下層 (即下底) 由 $b \times b$ 個球組成， 楊輝給出求方垛中物體總個數的公式如下 ：

$$S = \frac{n}{3}\left(a^2 + b^2 + ab + \frac{b-a}{2}\right)\text{。}$$

比較一下上面兩式就會發現， 後者與前者的區別在於小括號內多了一項 $\dfrac{(b-a)}{2}$， 故楊輝把這項以外的式子稱爲 “本法”。 後者實際是

一個二階等差級數求和公式，即

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(b-1)^2+b^2$$

$$=\frac{n}{3}\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right)\text{，}\tag{1}$$

楊輝垛積術中屬於級數求和的共有四個，其餘三個是

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\text{，}\tag{2}$$

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n}{6}(n+1)(n+2)\text{，}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&a\cdot b+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots\\&+(c-1)(d-1)+c\cdot d\\&=\frac{n}{6}[(2b+d)\cdot a+(2d+b)\cdot c]+\frac{n}{6}(c-a)\text{。}\end{aligned}\tag{4}$$

除了 (4) 式與沈括隙積術公式相同外，其它公式均爲楊輝獨立推出。

## 2. 捷算法與質數

楊輝致力於捷法算的研究，並取得一些成就。例如，《算法通變本末》中記載著一種叫 “重乘” 的算法，即把乘數分解爲若干因數之積的形式，然後用因數去乘。楊輝說：“乘位繁者，約爲二段，作二次乘之，庶幾位簡而易乘，自可無誤也。” 例如 $38367\times 23121$，楊輝便把 23121 分解爲 $9\times 7\times 367$，然後再乘 38367。

由於捷算法的需要，楊輝注意到一個整數是合數還是質數的問題。他說：“置價錢 (即 23121 文) 爲法，約之。先以九約，又以七約，乃見三百六十七，更不可約也。” 所謂不可約，就是說除了 1 和本身外沒有其它約數。顯然，楊輝的 “不可約” 之數即質

數。 他在這裡首次提出質數概念， 又在《算法取用本末》中列出了從 201 到 300 的質數表， 共 16 個 ：

211、223、227、229、233、239、241、251、

257、263、269、271、277、281、283、293。

這實際是 201 到 300 的全部質數。 雖然楊輝對質數的研究遠在歐幾里得之後， 理論上也不夠完整， 但他在沒有外來影響的情況下注意到這一重要問題， 其思想之深刻是值得稱道的。

"求一乘" 和 "求一除" 也是捷算法， 是用加減代乘除， 通過折、倍等方法來實現的，"求一" 就是變首位爲 1 的意思。 例如 $237\times 56$， 先倍 56， 得 112， 再折 237， 即 $237/2=118.5$， 然後用 112 乘 118.5。

在運算方面， 楊輝特別重視乘法， 他說："無習算者， 以乘法爲主。" (《詳解九章算法》) 認爲 "乘除者， 本勾深致遠之法"，"因法不獨能乘， 而亦能除" (《算法通變本末》)。 例如

$$2746\div 25=27.46\times 4=109.84，$$

這種以乘代除的方法不僅施於精確計算， 也用於近似計算。 例如

$$2746\div 1111=0.2746\times 9=2.4714。$$

《田畝比類乘除捷法》中的一些題列出了不同的方法， 這些方法有繁有簡， 楊輝的意圖就在於比較優劣， 提倡捷法。

## 3. 縱橫圖

縱橫圖是按一定規律排列的數表， 也稱幻方。 一般是 $n$ 行 $n$ 列， 各行各列的數字之和相等， 縱橫圖有幾行， 就稱爲幾階。我國最早的縱橫圖， 當推漢代 "九宮圖" (圖 1)。 宋代理學家們把它與《周易》中的 "河出圖， 洛出書， 聖人則之" 聯繫起來， 認爲九宮圖即天生的神物 —— 洛書， 是伏羲

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

圖 1

畫八卦的依據， 從而爲這些有規律的數字蒙上一層神秘色彩。

就在這種數字神秘主義氣氛籠罩社會的時候， 楊輝卻在孜孜不倦地探索縱橫圖的構成規律。 他以自己的研究成果， 否定了縱橫圖的神秘性。 《續古摘奇算法》上卷的大量縱橫圖表明， 這種圖形是有規律可循的。

楊輝首先給出了三階和四階縱橫圖的構造方法："易換術曰， 以十六子依次第作四行排列， 先以外四角對換 ··· 後以內四角對換。" 這便是構造四階縱橫圖的一種方法 (圖 2)。 在 "總術" 中，

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 9 | 5 | 1 |
| 14 | 10 | 6 | 2 |
| 15 | 11 | 7 | 3 |
| 16 | 12 | 8 | 4 |

$\Longrightarrow$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 5 | 16 |
| 14 | 7 | 11 | 2 |
| 15 | 6 | 10 | 3 |
| 1 | 12 | 8 | 13 |

圖 2

楊輝給出構造四階縱橫圖的一般方法。 第一步是 "求積"， 即求出每行或每列的數字之和應爲多少。 楊輝把前 16 個正整數當作一個等差數列， 用求和公式

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} ,$$

求得 $S = 136$， 進而求得每行之數 34。 第二步是 "求等"， 即設法使每行、 每列的數字之和等於 34。"求等術曰： 以子數分兩行

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 |
| 九 | 十 | 十一 | 十二 | 十三 | 十四 | 十五 | 十六 |

而二子皆等 (十七)， 又分爲四行， 而橫行先等 (三十四)， 乃不易之數。 卻以此編排直行之數， 使皆如元求一行之積 (三十四) 而

止。” 依此術，楊輝構造數字方陣如圖 3，然後再 “編排直行之數”。楊輝說：“繩墨既定，則不患數之不及也。” 意思是掌握了規律，就不難作出縱橫圖。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 5 | 16 | 1 |
| 11 | 6 | 15 | 2 |
| 10 | 7 | 14 | 3 |
| 9 | 8 | 13 | 4 |

圖 3

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 21 | 40 | 41 | 60 | 61 | 80 | 81 | 100 |
| 99 | 82 | 79 | 62 | 59 | 42 | 39 | 22 | 19 | 2 |
| 3 | 18 | 23 | 38 | 43 | 58 | 63 | 78 | 83 | 98 |
| 97 | 84 | 77 | 64 | 57 | 44 | 37 | 24 | 17 | 4 |
| 5 | 16 | 25 | 36 | 45 | 56 | 65 | 76 | 85 | 96 |
| 95 | 86 | 75 | 66 | 55 | 46 | 35 | 26 | 15 | 6 |
| 14 | 7 | 34 | 27 | 54 | 47 | 74 | 67 | 94 | 87 |
| 88 | 93 | 68 | 73 | 48 | 53 | 28 | 33 | 8 | 13 |
| 12 | 9 | 32 | 29 | 52 | 49 | 72 | 69 | 92 | 89 |
| 91 | 90 | 71 | 70 | 51 | 50 | 31 | 30 | 11 | 10 |

圖 4　百子圖

四階以上縱橫圖，楊輝只畫出圖形而未留下作法。但他所畫的五階、六階至十階縱橫圖全都準確無誤，可見他已經掌握了高階縱橫圖的構成規律。他的十階縱橫圖叫百子圖 (圖 4)，各行各列的數字之和均爲 505。

楊輝的縱橫圖對後世深有影響，明代程大位、清代方中通、張潮、保其壽等，都曾在此基礎上進一步研究縱橫圖。

## 4. 一條重要的面積定理

在《詳解九章算法》及《續古摘奇算法》中，楊輝討論了勾股容方問題，並在後書中給出如下定理：

“直田之長名股，其闊名勾，於兩隅角斜界一線，其名弦。弦之內外分二勾股，其一勾中容橫，其一股中容直，二積之數皆

同。”

圖 5 中，橫指 $\square IEFB$，直指 $\square HDGE$，推測其證明思路如下 ：

因爲

$$\triangle ABC = \triangle CDA$$

(指面積相等， 下同)，

又因爲

$$\triangle AIE = \triangle EHA，$$

$$\triangle EFC = \triangle CGE，$$

所以

$$\triangle ABC - \triangle AIE - \triangle EFC$$

$$= \triangle CDA - \triangle EHA - \triangle CGE，$$

即 $\square IEFB = \square HDGE$。

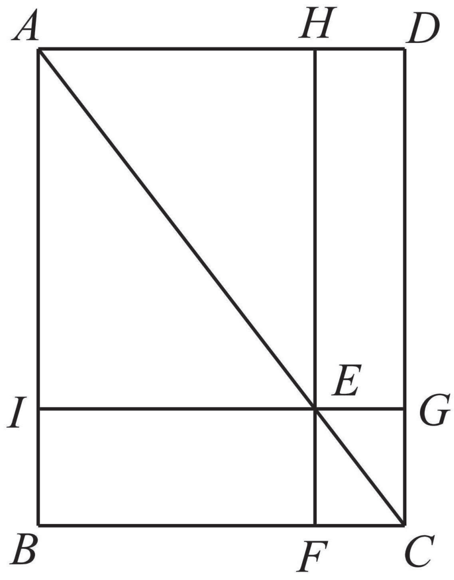


圖 5

此定理反映了我國傳統幾何的一條重要原理 —— 出入相補。 實際上， $\triangle AIE$ 可以移置 $\triangle EHA$ 處， $\triangle EFC$ 也可以移置 $\triangle CGE$ 處， 所以等積。 這種思想在劉徽《 海島算經 》及趙爽 “日高術” 中已反映出來。 但首次表述成定理形式的是楊輝。 該定理在平面幾何中有廣泛的應用。 實際上， 《 海島算經 》中的各種測量公式都可由它推出。

## 5. 因法推類

在《 詳解九章算法 》的《 纂類 》中， 楊輝提出 “因法推類” 的原則。 正如郁松年所說， 《 纂類 》以 “算法爲綱”， “以類相從”。 這種思想與《 九章算術 》相比是一個進步， 因爲《 九章算術 》的分類標準並不一致， 有的按用途分， 有的按算法分。 楊輝則突破了原書的分類格局， 按算法的不同， 將書中所有題目分爲乘除、 互換、 合率、 分率、 衰分、 疊積、 盈不足、 方程、 勾股

九類。 每一大類中， 由總的算法演繹出不同的具體方法， 並給出相應的習題。 例如，“方程” 類便依次給出方程、 損益、 分子、 正負四法，“方程法曰： 所求率互乘鄰行， 以少減多，再求減損， 錢爲實， 物爲法， 實如法而一。” 這是解線性方程組的基本方法。 此法後的 11 題全是基本類型， 可直接列出最簡方程組。“損益” 指的是移項及合併同類項， 分子術指去分母的方法， 正負術指方程變換時所用的正負數運算法則， 各法後分別列有相應的具體題目。 這種作法體現了由幹生枝的演繹思想， 方程法是幹， 損益、 分子、 正負三法是枝。 再如 “勾股類”， 共設 38 問， 分別置於 21 種方法之後， 而第一種方法 —— 勾股求弦法 (即“勾股各自乘， 並而開方除之”) 是後面各法的基礎。 這種順序也體現了演繹思想。

## 6. 數學教育和普及工作

楊輝十分重視數學普及工作， 他的數學書一般都是由淺入深的。 《詳解九章算法》便是爲普及《九章算術》中的數學知識而作。 他從原書 246 題中選擇了 80 道有代表性的題目， 進行詳解。 由於初學者感到《九章算術》“題問頗隱， 法理難明， 不得其門而入”， 楊輝便 “恐問隱而添題解， 見法隱而續釋註， 刊大小字以明法草， 僭比類題以通俗務， 凡題法解白不明者別圖而驗之。” 題解即提示算法要點或解釋數學名詞； 比類是原有方法的類推， 例如 “商功” 章， 在圓亭 (圓台) 解法之後便給出一道圓窖題：“圓窖上周三丈， 下周二丈， 深一丈， 問積。” 書中的圖形很多， 不僅有數學圖， 還有寫生圖， 如 “勾股章” 的葭出水圖、 圓材埋壁圖、 方邑圖等， 都很精美， 爲《詳解》增色不少。 這些圖在幫助讀者理解題意的同時， 也有利於引起讀者興趣。

爲普及日常所用的數學知識，楊輝專門寫了《日用算法》一書，並提出“用法必載源流”和“命題須責實有”兩條原則。書中的題目全部取自生活，多爲簡單的商業問題，也有土地丈量、建築和手工業問題。這種應用數學是便於普通讀者接受，也便於發揮社會效益的。楊輝還在該書的序言中提到“編詩括十三首”，這些詩歌顯然是爲讀者自學數學而編的，可惜都已失傳。但在《乘除通變算寶》中存有“求一乘”和“求一除”詩各一首，前者

五六七八九，倍之數不走，
二三須當半，遇四兩折扭。
倍折本從法，實即反其有，
用加以代乘，斯數足可守。

這種詩歌簡練生動，朗朗上口，便於讀者記誦。另外，楊輝書中還有許多乘除法歌訣，也是有助於讀者熟記有關算法的。

楊輝不僅總結了當時的各種數學知識，還批評了以往數學著作中的一些錯誤，這種作法在楊輝以前的算書中很少見。例如。他在《田畝比類乘除捷法》一書中便批評了《五曹算經》中的三個錯誤，一是在田畝計算中用方五斜七之法 (即把正方形邊長與對角線之比取作 5 : 7)，二是題問概念不清，三是四不等田求法之誤。

在數學教育方面，楊輝總結了自己多年的經驗，寫一份相當完整的教學計劃 — “習算綱目” (《算法通變本末》)，具體給出各部分知識的學習方法、時間及參考書。他主張循序漸進，精講多練，特別強調要明算理，要“討論用法之源”。例如，他講減法時不只講算法，而且指明：“加法乃生數也，減法乃去數也，有加則有減。凡學減，必以加法題考之，庶知其源。”針對教師和學生兩種不同的對象，楊輝又提出“法將題問”和“隨題用法”兩條不同原則。教師編書或講課時，應“法將題問”，“凡欲見明一法，必設一題” (《法算取用本末》)，就是以算法統帥習題，每種算法都設有相應的題目。而對學生來說，則應“隨題用法”，即

根據具體題目來選擇相應的算法。他說："隨題用法者捷，以法就題者拙。"(《乘除通變算寶》)

## 文　　獻

### 原始文獻


[1] (宋) 楊輝，詳解九章算法，《宜稼堂叢書》本，1842。

[2] (宋) 楊輝，日用算法，見《諸家算法》，抄本，自然科學史研究所藏。

[3] (宋) 楊輝，乘除通變本末，《宜稼堂叢書》本，1842。

[4] (宋) 楊輝，田畝比類乘除捷法，《宜稼堂叢書》本，1842。

[5] (宋) 楊輝，續古摘奇算法 (缺上卷)；《宜稼堂叢書》本，1842

[6] (宋) 楊輝，續古摘奇算法，抄本，自然科學史研究所藏。


### 研究文獻


[7] 錢寶琮主編，中國數學史，科學出版社，1964。

[8] 嚴敦傑，(宋) 楊輝算書考，見錢寶琮等《宋元數學史論文集》，科學出版社，1966。