朱 世 傑

朱世傑字漢卿，號松庭。北京附近人。生於約元世祖中統元年 (1260 年)，卒於約元仁宗延祐七年 (1320 年)，生活於 13 − 14 世紀。數學。

朱 世 傑

杜 石 然

(中國科學院自然科學史研究所)

朱世傑字漢卿，號松庭。北京附近人。生於約元世祖中統元年 (1260 年)，卒於約元仁宗延祐七年 (1320 年)，生活於 13－14 世紀。數學。

關於朱世傑的生平，流傳下來的資料甚少，僅能從趙城、莫若、祖頤等人爲他的著作《算學啓蒙》和《四元玉鑑》所寫的序言中找到一些線索。這些序言均稱“燕山松庭朱君”、“燕山朱漢卿先生”。在《四元玉鑑》每卷之首也均署名爲“寓燕松庭朱世傑漢卿編述”可見他的籍貫當在現在的北京或其附近。莫若序中有“燕山松庭朱先生以數學名家周遊湖海二十餘年矣。四方之來學者日衆，先生遂發明《九章》之妙，以淑後學，爲書三卷……名曰《四元玉鑑》”，祖頤後序中亦有“漢卿，名世傑，松庭其自號也。周流四方，復遊廣陵，踵門而學者雲集……。”這兩篇序均寫於元大德七年 (1303)，以莫若序中所說的“以數學名家周遊湖海二十餘年矣”來推算，朱世傑從事數學教學和數學研究的年代當在十三世紀末和十四世紀初。

1234 年蒙古聯宋滅金之後，又經過四十餘年，至 1276 年才攻佔了南宋的都城臨安，1279 年南宋滅亡。

朱世傑的青少年時代，大約相當於蒙古滅金之後。但早在滅金之前。蒙古軍隊便已攻佔了金的中都 (今北京，是 1215 年攻佔的)。元世祖忽必烈繼位之後，爲便於對中原地區的攻略，便遷都於此，改稱燕京，後又改稱爲大都。到十三世紀六十年代，燕京不只是重要的政治中心，同時也是重要的文化中心。

忽必烈爲了鞏固元朝的統治， 網羅一大批漢族的知識分子作爲智囊團。 其中有以編制《授時曆》聞名的王恂 (1235 − 1281)、 郭守敬 (1231 − 1361) 以及編制曆法的倡導者和主持者劉秉忠 (1216 − 1274)、 張文謙 (1216 − 1283)、 許衡 (1209 − 1281) 等人。 這個集團中的人物， 對數學和曆法都很精通。 他們未入朝之前， 曾隱居於河北南部的武安紫金山中。 受到忽必烈禮聘的， 還有李冶 (1192 − 1279)， 他也是一位著名的數學家。

就當時的數學發展情況而論， 在十三世紀中葉， 在河北南部和山西南部地區， 出現了一個以 "天元術" (一種帶有中國古代數學特點的代數學) 爲代表的數學研究中心。 按祖頤在 "《四元玉鑑》後序" 中敍述天元術發展情況時所說： "平陽 (今山西臨汾) 蔣周撰《益古》、 博陸 (今河北蠡縣) 李文一撰《照膽》， 鹿泉 (今河北獲鹿) 石信道撰《鈐經》， 平水 (今山西新絳) 劉汝諧撰《如積釋鎖》， 絳人 (今山西新絳) 元裕細草之， 後人始知有天元也。 平陽李德載因撰《兩儀群英集臻》兼有地元， 霍山 (今山西臨汾) 刑先生頌不高弟劉大鑒潤夫撰《乾坤括囊》末僅有人元二問。 吾友燕山朱漢卿先生演數有年， 探三才之賾， 索《九章》之隱， 按天地人物成立四元 · · · · · · 。" 這段序文敍述出朱世傑學術上的師承關係。 毫無疑問， 他較好地繼承了當時北方數學的主要成就。 當時的北方， 正處於天元術逐漸發展成爲二元、 三元術的重要時期， 正是朱世傑把這一成就拓展爲四元術的。

朱世傑除繼承和發展了北方的數學成就之外， 還吸收了當時南方的數學成就 —— 各種日用、 商用數學和口訣、 歌訣等。 本來， 在元滅南宋之前， 南北之間的數學交流是比較少的。 朱世傑 "周流四方， 復遊廣陵 (今揚州)" 應是在 1276 年元軍對南宋的大規模軍事行動結束之後。 朱世傑經過長期遊學、 講學之後， 終於在 1299 年和 1303 年在揚州刊刻了他的兩部數學著作 ——《算學啓蒙》和《四元玉鑑》。

隨唐以來， 中原地區經濟中心和文化中心逐漸南移。 長江中下游一帶， 五代十國時期就比較穩定， 北宋時期也有較大發展。 隨著金兵入侵和宋王朝的南遷， 江南地區的農業、 手工業、 商業和城市建設等都有較大發展。 在這樣的社會條件下， 中國數學中自晚唐以來不斷發展的簡化籌算的趨勢有了進一步的發展， 日用數學和商用數學更加普及。 南宋時楊輝的著作可以作爲這一傾向的代表， 而朱世傑所著的《算學啓蒙》， 則是這一傾向的繼承和發展。

當然， 以所取得的成就而論， 《四元玉鑑》是遠超《算學啓蒙》的。 清代羅士琳在評論朱世傑的數學成就時說： “漢卿在宋元間， 與秦道古 (九韶) 、 李仁卿 (冶) 可稱鼎足而三。 道古正負開方， 仁卿天元如積， 皆足上下千古， 漢卿又兼包衆有， 充類盡量， 神而明之， 尤超乎秦李之上” (羅士琳編《疇人傳 • 續編 • 朱世傑條》)。 清代另一位數學家王鑒也說： “朱松庭先生兼秦李之所長， 成一家之著作” (王鑒《算學啓蒙述義 • 自序》)。 此外， 朱世傑還繼承發展了日用、 商用數學。 由此可見， 朱世傑可以被看作是中國宋元時期數學發展的總結性人物， 是宋元數學的代表， 是中國以籌算爲主要計算工具的古代數學發展的頂峰。

朱世傑的數學著作， 如前所述， 有《算學啓蒙》、 《四元玉鑑》二種， 下面略加評介。

1. 《算學啓蒙》

《算學啓蒙》全書共三卷， 分爲 20 門， 收入了 259 個數學問題。 全書由淺入深， 從整數的四則運算直到開高次方、 天元術等， 包括了當時已有的數學各方面內容， 形成了一個較完備的體系， 可用作教材， 它確實是一部較好的啓蒙數學書。

在全書之首。 朱世傑首先給出了 18 條常用的數學歌訣和各種

常用的數學常數。其中包括：乘法九九歌訣、除法九歸歌訣 (與後來的珠算歸除口訣完全相同)、斤兩化零歌訣 (“一退六二五” 之類)、籌算記數法則、大小數名稱、度量衡換算、面積單位、正負數的四則運算法測、開方法等等。值得指出的是，朱世傑在這裡，也是在中國數學史上首次記述了正負數的乘除運算法則。朱世傑把上述這些歌訣和數學常數等，作爲 “總括” 而列在全書之首，這種寫作的方式，在中國古算書中並不多見。

《算學啓蒙》正文分上、中、下三卷。

卷上：共分爲 8 門，收有數學問題 113 個，其內容爲：乘數爲一位數的乘法、乘數首位數爲一的乘法、多位數乘法、首位除數爲一的除法、多位除數的除法、各種比例問題 (包括計算利息，稅收等等)。

其中 “庫司解稅門” 第 7 問題記有 “今有稅務法則三十貫納稅一貫”，同門第 10、11 兩問中均載有 “兩務稅” 等，都是當時實際施行的稅制。朱世傑在書中的自註中也常寫有 “而今有之”、“而今市舶司有之” 等等，可見書中的各種數據大都來自當時的社會實際。因此，書中提到的物價 (包括地價)、水稻單位面積產量等，對了解元代社會的經濟情況也是有用的。

卷中：共 7 門，71 問。內容有各種田畝面積、倉窖容積、工程土方、複雜的比例計算等等。

卷下：共 5 門，75 問。內容包括各種分數計算、垛積問題、盈不足算法、一次方程解法、天元術等等。

這樣，《算學啓蒙》全書從簡單的四則運算入手，一直講述到當時數學的重要成就 —— 天元術 (高次方程的數值解法)，爲閱讀《四元玉鑑》作了必要的準備，給出了各種預備知識。清代羅士琳說《算學啓蒙》“似淺實深”，又說《算學啓蒙》、《四元玉鑑》二書 “相爲表裡”，這些話都是不錯的。

《算學啓蒙》出版後不久即流傳至朝鮮和日本。在朝鮮的李朝

時期，《算學啓蒙》和《詳明算法》、《楊輝算法》一道被作爲李朝選仕 (算官) 的基本書籍。在日本收藏有一部首尾殘缺、未註明年代的《算學啓蒙》，與此書一起，同時也藏有一部宣德八年(即李朝世宗十五年，1433) 朝鮮慶州府刻版的《楊輝算法》。從版刻形式等方面來辨識，兩部書是相同的，從而有人推斷這部《算學啓蒙》也是 1433 年朝鮮慶州府刻本。這可能要算是當今世界上最早的傳世刻本。在《李朝實錄》中也記有世宗本人曾向當時的副提學鄭麟趾學習《算學啓蒙》的史料。

《算學啓蒙》傳入日本的時間也已不可考，是久田玄哲在京都的一個寺院中發現了這部書，之後他的學生土師道雲進行了翻刻(日本萬治元年，1658，京都)。寬文十二年 (1672) 又在江戶 (今東京) 出版了星野實宣註解的《新編算學啓蒙註解》三卷，元祿三年 (1690) 還出版了著名的和算家建部賢弘註釋的《算學啓蒙諺解大成》七卷。《算學啓蒙》對日本和算的發展有較大的影響。

《算學啓蒙》一書在朝鮮和日本雖屢有翻刻，但明末以來，在中國國內卻失傳了。清末道光年間羅士琳重新翻刻《四元玉鑑》時，《算學啓蒙》尚無著落。後來羅士琳“聞朝鮮以是書爲算科取士”，請人在北京找到順治十七年 (1660) 朝鮮全州府尹金始振所刻的翻刻本，1839 年在揚州重新刊印出版。這個本子，後來成爲中國現存各種版本的母本。清代對《算學啓蒙》進行註釋的有王鑒所著《算學啓蒙述義》(1884) 和徐鳳誥所著《算學啓蒙通釋》(1887)。

2. 《四元玉鑑》

與《算學啓蒙》相比，《四元玉鑑》則可以說是朱世傑闡述自己多年研究成果的一部力著。全書一共分三卷，24 門，288 問。書中所有問題都與求解方程或求解方程組有關，其中

四元的問題 (需設立四個未知數者) 有 7 問 (“四象朝元” 6 問，“假令四草” 1 問)；

三元者 13 問 (“三才變通” 11 問，“或問歌彖” 和 “假令四草” 各 1 問)；

二元者 36 問 (“兩儀合轍” 12 問，“左右逢元” 21 問，“或問歌彖” 2 問，“假令四草” 1 問)；

一元者 232 問 (其餘各問皆爲一元)。

可見，四元術 — 多元高次方程組的解法是《四元玉鑑》的主要內容，也是全書的主要成就。

《四元玉鑑》中的另一項突出的成就是關於高階等差級數的求和問題。在此基礎上，朱世傑進一步解決高次差的招差法問題。

《四元玉鑑》一書的流傳和《算學啓蒙》一樣，也曾幾經波折。這部 1303 年初版的著作，在十五和十六兩個世紀都還可以找到它流傳的線索。吳敬所著《九章算法比類大全》(1450) 中的一些算題，和《四元玉鑑》中的算題完全相同或部分相同。顧應祥在其所著《孤矢算術》序言 (1552) 中寫道：“孤矢一術，古今算法載者絕少，……《四元玉鑑》所載數條。” 周述學所著《神道大編歷宗算會》卷三之首曾引用了《四元玉鑑》書首的各種圖式，書中有些算題也與《四元玉鑑》相同，卷十四作爲 “算會聖賢” 列有 “松庭《四元玉鑑》”。可見顧周二人都曾讀到過《四元玉鑑》。淸初黃虞稷 (1618 − 1683)《千頃堂書目》記有 “《四元玉鑑》二卷”，卷數不符。梅瑴成《赤水遺珍》(1761) 中曾引用過《四元玉鑑》中的兩個題目，可見淸初時此書尙未失傳。

乾隆三十七年 (1772) 開《四庫全書》館時，雖然挖掘出不少古代數學典籍，但朱世傑的著作並未被收入。阮元、李鋭等人編纂《疇人傳》時 (1799) 也尙未發現《四元玉鑑》。但不久之後阮元即在浙江訪得此書，呈入《四庫全書》，並把抄本交李鋭校算 (未校完)，後由何元錫按此抄本刻印。這是 (1303) 年《四元玉鑑》

初版以來的第一個重刻本。《四元玉鑑》被重新 “發現” 之後，引起了當時許多學者的注意，如李銳 (1768 − 1817)、沈欽裴 (1829 年寫有《四元玉鑑》序)、徐有壬 (1800 − 1860)、羅士琳 (1789 − 1853)、戴煦 (1805 − 1860) 等人，都進行過研究。其中，以沈欽裴和羅士琳二人的工作最爲突出。

1839 年羅士琳經多年研究之後，出版了他所著的《四元玉鑑細草》一書，影響廣泛。羅氏對《四元玉鑑》進行了校改並對書中每一問題都作了細草。但是他對此書關鍵問題 (四元消法和級數求和) 的理解，尚有需進一步研究者。與羅士琳同時，沈欽裴也對《四元玉鑑》作了精心的研究，每題也作了細草，經對比，沈氏《細草》比羅氏《細草》要更符合朱世傑原意。沈氏《細草》僅有兩種抄本傳世 (其中一種是全本)，現均收藏於北京圖書館。

清代數學家李善蘭曾著有《四元解》(1845)，但此書是作者以己意解四元方程組，對了解朱世傑原意幫助不大。其後陳棠著《四元消法簡易草》(1899)，卷末附有 “假令四草” 的 “補正草”，對理解朱世傑四元術是有幫助的。

日本數學史家三上義夫在其所著《中國及日本數學之發展》(*The development of mathematics in China and Japan*，1913) 一書中將《四元玉鑑》介紹至國外。其後康南茲 (E. L. Konantz) 和赫師慎 (L. Van Heé) 分別把《四元玉鑑》中的 “假令四草” 譯爲英法兩種文字。1977 年華裔紐西蘭人謝元祚 (J. Hoe) 將《四元玉鑑》全文譯成法文，並寫了關於《四元玉鑑》的論文。

朱世傑的數學成就可簡述如下：

1. 四元術

四元術是在天元術基礎上逐漸發展而成的。天元術是一元高次方程列方程的方法。天元術開頭處總要有 “立天元一爲 ××” 之類的

話， 這相當於現代初等代數學中的 “設未知數 x 爲 ××”。 四元術是多元高次方程列方程和解方程的方法， 未知數最多時可至四個。 四元術開頭處總要有 “立天元一爲 ××， 地元一爲 ○○， 人元一爲 △△， 物元一爲 ∗∗”， 即相當於現代的 “設 x、 y、 z、 u 爲 ××、 ○○、 △△、 ∗∗”。 天元術是用一個豎列的籌式依次表示未知數 (x) 的各次冪的係數的， 而四元術則是天元術的推廣。 按莫若爲《 四元玉鑑 》所寫的序言所記述， 四元式則是 “其法以元氣居中， 立天元一於下， 地元一於左， 人元一於右， 物元一於上， 陰陽昇降， 進退左右， 互通變化， 錯綜無窮”。 此即在中間擺入常數項 (元氣居中)， 常數項下依次列入 x 各次冪的係數， 左邊列 y、 y^2、 y^3、 $\cdots$ 各項係數， 右邊爲 z、 z^2、 z^3、 $\cdots$ 各項係數， 上邊爲 u、 u^2、 u^3、 $\cdots$ 各項係數， 而把 xy、 yz、 zu、 $\cdots$、 x^2y、 y^2z、 z^2u、 $\cdots$ 各項係數依次置入相應位置中 (如圖 1)。 例如： $x+y+z+u=0$， 即可以下列籌式表示 (如圖 2)。 而 $(x+y+z+u)^2=A$， 即可以圖 3 所示之籌式表示之， 即將

$$
\begin{aligned}
& (x+y+z+u)^2 \\
= \;& x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu+2yz+2yu+2zu
\end{aligned}
$$

中的 $2xy$、 $2yu$、 $\cdots$ 等記入相應的格子中， 而將不相鄰的兩個未知數的乘積如 $2xu$、 $2yz$ 的係數記入夾縫處， 以示區別。 圖 3 即是《 四元玉鑑 》書首給出的 “四元自乘演段之圖” (爲了方便， 我們用現代通用的阿拉伯數碼代替了原圖中的算籌)。 如此記寫的四元式， 既可表示一個多項式， 也可以表示一個方程。

四元式的四則運算如下進行。

(1) 加、 減： 使兩個四元式的常數對準常數項， 之後再將相應位置上的兩個係數相加、 減即可。

(2) 乘：

1) 以未知數的整次冪乘另一四元式， 如以 x、 x^2、 x^3、 $\cdots$

y^4u^4	y^3u^4	y^2u^4	yu^4	u^4	zu^4	z^2u^4	z^3u^4	z^4u^4
y^4u^3	y^3u^3	y^2u^3	yu^3	u^3	zu^3	z^2u^3	z^3u^3	z^4u^3
y^4u^2	y^3u^2	y^2u^2	yu^2	u^2	zu^2	z^2u^2	z^3u^2	z^4u^2
y^4u	y^3u	y^2u	yu	u	zu	z^2u	z^3u	z^4u
y^4	y^4	y^2	y	元	z	z^2	z^3	z^4
xy^4	xy^3	xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3	xz^4
x^2y^4	x^2y^3	x^2y^2	x^2y	x^2	zx^2	x^2z^2	x^2z^3	x^2z^4
x^3y^4	x^3y^3	x^3y^2	x^3y	x^3	zx^3	x^3z^2	x^3z^3	x^3z^4
x^4y^4	x^4y^3	x^4y^2	x^4y	x^4	zx^4	x^4z^2	x^4z^3	x^4z^4

圖 1

	1	
1	0	1
	1	

圖 2

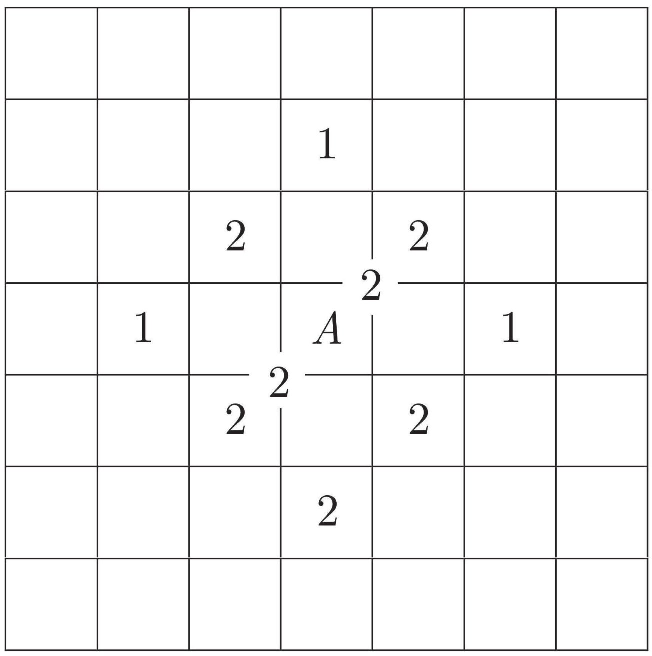

圖 3

乘四元式，則等於以該係數乘整個四元式各項再將整個四元式下降，以 x 乘則下降一格，x^2 乘則下降二格。以 y 的各次冪乘則向左移，以 z 乘則右移，以 u 乘則上升。

2) 二個四元式相乘：以甲式中每項乘乙式各項，再將乘得之各式相加。

(3) 除 (僅限於用未知數的整次冪來除)：等於以該項係數除四元式各項係數之後，整個四元式再上、下、左、右移動。

上述四則運算也就是莫若《四元玉鑑》序言中所說的 “陰陽升降，進退左右，互通變化，錯綜無窮”。在漢時中國數學尚缺少數學符號的情況下，朱世傑利用中國古代的算籌能夠進行如此複雜的運算，實屬難能可貴。

朱世傑四元術精彩之處還在於消去法，即將多元高次方程組依次消元，最後只餘下一個未知數，從而解決了整個方程組的求解問題。其步驟可簡述如下；

1) 二元二行式的消法

例如 “假令四草” 中 “三才運元” 一問，最後得出如下圖的兩個二元二行式，這相當於求解

7	-6 太
3	-7
-1	-3
	1

13	-14 太
11	-13
5	-15
-2	-5
	2

$$\begin{cases} (7+3z-z^2)x+(-6-7z-3z^2+z^3)=0\text{，} \\ (13+11z+5z^2-2z^3)x+(-14-13z-15z^2 \\ \qquad -5z^3+2z^4)=0\text{；} \end{cases}$$

或將其寫成更一般的形式

$$\begin{cases} A_1x+A_0=0 \\ B_1x+B_0=0\text{，} \end{cases}$$

其中 A_0 、 B_1 和 A_1 、 B_0 分別等於算籌圖式中的 “內二行” 和 “外二行”， 都是只含 z 而不含 x 的多項式。 朱世傑解決這些二元二行式的消去法即是 “內二行相乘 、 外二行相乘， 相消”。 也就是

$$F(z) = A_0B_1 - A_1B_0 = 0 \text{。}$$

此時 $F(z)$ 只含 z， 不含其它未知數。 解之， 即可得出 z 之值， 代入上式任何一式中， 再解一次只含 x 的方程即可求出 x。

2) 二元多行式的消法

不論行數多少， 例如 3 行， 則可歸結爲

$$\begin{cases} A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 & (1) \\ B_2x^2 + B_1x + B_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

以 A_2 乘 (2) 式中 B_2x^2 以外各項， 再以 B_2 乘 (1) 式中 A_2x^2 以外各項， 相消得

$$C_1x + C_0 = 0 \text{。} \qquad (3)$$

以 x 乘 (3) 式各項再與 (1) 或 (2) 聯立， 消去 x^2 項， 可得

$$D_1x + D_0 = 0 \text{。} \qquad (4)$$

(3)、(4) 兩式已是二元二行式， 依前所述即可求解。

3) 三元式和四元式消法

如在三元方程組中 (如下列二式) 欲消去 y：

$$\begin{cases} A_2y^2 + A_1y + A_0 = 0 & (5) \\ B_2y^2 + B_1y + B_0 = 0 & (6) \end{cases}$$

式中諸 A_i 、 B_i 均只含 x 、 z 不含 y。 (5)、(6) 式稍作變化即有

$$\begin{cases} (A_2y + A_1)y + A_0 = 0 & (7) \\ (B_2y + B_1)y + B_0 = 0 & (8) \end{cases}$$

以 A_0 、 B_0 與二式括號中多項式交互相乘， 相消得

$$C_1y + C_0 = 0 \text{。} \qquad (9)$$

(9) 式再與 (7)、(8) 式中任何一式聯立， 相消之後可得

$$D_1y + D_0 = 0 \text{。} \tag{10}$$

(9)、(10) 聯立再消去 y，最後得

$$E = 0 \text{，} \tag{11}$$

E 中即只含 x、z。再另取一組三元式，依法相消得

$$F = 0 \tag{12}$$

(11)、(12) 只含兩個未知數，可依前法聯立，再消去一個未知數，即可得出一個只含一個未知數的方程，消去法步驟即告完成。

以上乃是利用現代數學符號化簡之後進行介紹的，實際上整個運算步驟都是用中國古代所特有的計算工具算籌列成籌式進行的，雖然繁複，但條理明晰，步驟井然。它不但是中國古代籌算代數學的最高成就，而且在全世界，在十三－十四世紀，也是最高的成就。顯而易見，在一個平面上擺列籌式，未知數不能超過四元，這也是朱世傑四元術的局限所在。

在歐洲，直到十八世紀，繼法國的 É. 貝祖 (Bézout，1779) 之後又有英國的 J. J. 西爾維斯特 (Sylvester，1840) 和 A. 凱萊 (Cayley，1852) 等人應用近代方法對消去法進行了較全面的研究。

2. 高階等差級數求和

在中國古代，自宋代起便有了關於高階等差級數求和問題的研究。在沈括 (1031－1095) 和楊輝的著作 (1261－1275) 中，都有各種垛積問題，這些垛積問題有一些就是高階等差級數問題。另外，在曆法計算過程中，特別是在計算太陽在黃道上的精確位置時，要用到內插法。在宋代曆法中，已經考慮並用到三次差的內插法。這也是一種高階等差級數的求和問題。

朱世傑在《四元玉鑑》中又把這一問題的研究進一步深化。

據研究，朱世傑已經掌握了如下一串三角垛的公式，即茭草垛

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{r=1}^{n} r=\frac{1}{2!}n\,(n+1)\,,$$

三角垛

$$\begin{aligned}1+3+6+10+\cdots &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2!}r(r+1)\\ &=\frac{1}{3!}n\,(n+1)\,(n+2)\,,\end{aligned}$$

(又稱 “落一形垛”)

撒星形垛

$$\begin{aligned}1+4+6+10+20+\cdots &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{3!}r(r+1)(r+2)\\ &=\frac{1}{4!}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\end{aligned}$$

(又稱 “三角落一形垛”)

三角撒星形垛

$$\begin{aligned}1+5+15+\cdots &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{4!}r\,(r+1)\,(r+2)\,(r+3)\\ &=\frac{1}{5!}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,,\end{aligned}$$

(又稱 “撒星更落一形垛”)

三角撒星更落一形垛

$$\begin{aligned}1+6+21+\cdots &=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{5!}r\,(r+1)\,(r+2)\,(r+3)\,(r+4)\\ &=\frac{1}{6!}n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)\,(n+5)\end{aligned}$$

從中不難看出前垛的求和結果恰好是後垛的一般項，即前垛的各層累計的和剛好是後垛中的一層，因此朱世傑常把後一種垛積稱爲前一垛積的 "落一形垛"。這串公式可用一個公式來表達，即

$$\sum_{r+1}^{n} \frac{1}{p!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} n(n+1)(n+2)\cdots(n+p) \qquad (A)$$

當 $p = 1$、2、3、4、5 時，(A) 式就是上述五個公式。

除 (A) 式之外，朱世傑還已掌握了

$$\sum_{r+1}^{n} \frac{1}{p!} r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)\cdot r$$

$$= \frac{1}{(p+2)!} n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)[(p+1)n+1] \quad (B)$$

當 $p = 1$ 時稱爲四角垛，即

$$\sum r\cdot r = \frac{1}{3!} n(n+1)(2n+1)\text{；}$$

當 $p = 2$ 時稱爲嵐峰形垛，即

$$\sum \frac{1}{2!} r(r+1)\cdot r = \frac{1}{4!} n(n+1)(n+2)(3n+1)\text{；}$$

當 $p = 3$ 時稱爲三角嵐峰形垛，即

$$\sum \frac{1}{3!} r(r+1)(r+2)\cdot r$$

$$= \frac{1}{5!} n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)$$

當然，《四元玉鑑》中也還有一些其它類型的垛積問題。

由於朱世傑已經掌握了公式 (A)，掌握了一串三角垛公式，這使他有可能超越前人，提出高次招揷法公式，從而有可能解決任

何一類高階等差級數的求和問題。《四元玉鑑》“如象招數” 門最後一問中提出了一個需要四次差 (即四次差相等，五次差等於 0) 的招差問題。如以現代符號記述，以 Δ^1、Δ^2、Δ^3、Δ^4 表示一差、二差、三差和四差，朱世傑相當於給出了招揷公式：

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n\Delta^1 + \frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2 + \frac{1}{3!}n\,(n-1)\,(n-2)\Delta^3 \\
&\quad + \frac{1}{4!}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\Delta^4
\end{aligned}
$$

這是一個有關計算招兵人數的問題。朱世傑的解法是 “求兵者：今招爲上積，又今招減一爲茭草底子積爲二積，又今招減二爲三角底子積爲三積，又今招減三爲三角落一積爲下積，以各差乘各積，四位併之，即招兵數也”，所描述的剛好就是上述公式。

因爲朱世傑指出了上述公式各項的係數，剛好依次是一串三角垜的 “積”，從這一點出發不難推斷朱世傑是可以將其推廣至任意高次的高階等差級數和招差問題上去的。

在西方，是 J. 格雷戈里 (Gregory，1638－1675) 最先對招揷法進行了研究，直到牛頓的著作 (1676、1678) 中出現了關於招揷術的一般公式。當然牛頓的公式採取了近代數學的形式，而且用途廣泛，但朱世傑的首創之功也是不可泯滅的。

朱世傑在數學方面的貢獻並不局限於上述兩點，例如《算學啓蒙》中所列各種歌訣、口訣 (包括除法口訣) 均已十分齊備，這爲計算工具由籌算到珠算的過渡創造了條件。但四元術和高階等差級數求和問題兩方面的成就，仍顯得十分突出，由於這兩方面成就的出現，使得高度發展了的宋元時期的中國數學，更放異彩。

清代數學家王鑒說，朱世傑 “兼秦 (九韶)、李 (冶) 之所長”，羅士琳也說他是 “尤超越乎秦、李之上”。清代末年還有人評論說 “中法以《四元玉鑑》之詣極之書”。二十世紀美國著名的科學史家 G. 薩頓 (Sarton，1884－1956) 評價朱世傑是 “漢民族的，他所生存的時代的，同時也是貫穿古今的一位最傑出的數學家”，說《四

元玉鑑》“是中國數學著作中最重要的一部， 同時也是中世紀最傑出的數學著作之一”。 如此之高的評價， 朱世傑和他的著作都是當之無愧的。

文　　獻

原始文獻

[1] (元) 朱世傑， 算學啓蒙， 朝鮮翻刻本， 見羅士琳《觀我生室彙稿》， 1843。

[2] (元) 朱世傑撰、 (淸) 沈欽裴細草， 四元玉鑑， 淸末抄本。

[3] (元) 朱世傑撰、 (淸) 羅士琳細草， 四元玉鑑細草， 見羅士琳《觀我生室彙稿》， 1843。

研究文獻

[4] 杜石然， 朱世傑研究， 見錢寶琮等《宋元數學史論文集》， 科學出版社， 1966。

[5] 錢寶琮主編， 中國數學史， 科學出版社， 1964。

[6] 李儼、 杜石然， 中國古代數學簡史·下册， 中華書局， 1964