卡　西

卡西 (al-Kāshī， Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd) 亦稱卡尚尼 (al-Kāshānī)， 約公元 1380 年生於卡尚 (Kāshān， 今屬伊朗)； 1429 年 6 月 22 日卒於撒馬爾罕 (Samarkand， Самарканд， 今屬烏茲別克)。 天文學 、 數學 。

卡西之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Al-Kashi.html

卡　西

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

卡西 (al-Kāshī，Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd) 亦稱卡尚尼 (al-Kāshānī)，約公元 1380 年生於卡尚 (Kāshān，今屬伊朗)；1429 年 6 月 22 日卒[1]於撒馬爾罕 (Samarkand，Самарканд，今屬烏茲別克)。天文學、數學。

卡西的生年沒有確實的記載，他的活動最早見於文獻的是 1406 年 6 月 2 日，當時他在家鄉觀測一次月蝕。卡西是阿拉伯國家中世紀最後的一位著名天文學家和數學家，人們常以他的卒年爲這個時代的終結。

十四世紀末葉，中亞細亞的跛子帖木兒 (Timur the Lame 或 Tamburlaine，1336 − 1405，成吉思汗的後裔) 建立了帖木兒帝國，定都撒馬爾罕，他孫子烏魯伯格 (Ulegh Bēg，1394 − 1449) 是一個科學家，精通天文，而且是科學、藝術的倡導者與保護人，1417 − 1420 年，他在撒馬爾罕創辦了一所高級的教授科學 (包括天文學) 和神學的學校 —— 馬德拉撒 (madrasa)。大約四年之後，又籌建一座三層樓的天文台，招聘一批科學家在那裡工作，使撒馬爾罕成爲東方最重要的科學中心。1447 年，烏魯伯格繼承王位成爲蘇丹，進一步加強學術活動，可惜兩年後被刺死，他倡導的事業隨之而衰落。

卡西的科學生涯和烏魯伯格息息相關的。他曾是一個醫生，但他渴望從事天文與數學的研究。在長期貧困與徘徊之後，終於在撒馬爾罕找到一個穩定而又榮耀的職位，即在烏魯伯格的官邸協

[1]卒年的另一說法是 1436 年。

助策劃開展科學工作。卡西何時到撒馬爾罕已不可考，只知道在 1424 年他曾和烏魯伯格討論過有關天文台的規劃。參加討論的還有卡迪•扎達•魯米 (Qādī Zāda al-Rumī) 和另一個來自卡尙的穆因丁 (Mu‘in al-Dīn)。有的書將魯米和卡西混淆了，以爲是同一個人 (文獻 [15]，Vol. *l*，p.289)。其實卡西是第一任台長，卡西去世後，魯米繼任第二任台長。

卡西積極參加天文台的修建和儀器的裝備，成爲烏魯伯格的得力助手和合作者。在給父親的一封信中，卡西極力讚揚烏魯伯格的數學才能，說他有淵博的知識，組織活動能力也很強。卡西還強調當時討論科學問題的自由空氣，沒有這種空氣，科學的進步是不可能的。

烏魯伯格對待學者很寬厚，他諒解卡西對宮廷禮儀的疏忽，以及缺乏良好的生活習慣。在《烏魯伯格曆》(*Ulugh Bēg's Zīj*) 的序中，烏魯伯格提到卡西的死，說 “他是一位傑出的科學家，是世界上最出色的學者之一，通曉古代科學，並推動其發展，他能解決最困難的問題”。

在撒馬爾罕期間，卡西的學識已臻成熟，完成了他一生中最有價值的著作。1424 年 7 月寫成《圓周論》(*Risāla al-muḥīṭiyya*，*The treatise on the circumference*)，得到當時世界上最精確的圓周率值。1427 年 3 月 2 日完成《算術之鑰》(*Miftāḥ al-ḥisāb*，*The key of arithmetic*)，這是一本初等數學的百科全書，題獻給烏魯伯格。上述二書已由蘇聯的羅森菲爾德等從阿拉伯文譯成俄文。另一本《論弦與正弦》(*Risāla al-watar wa'l-jaib*，*The treatise on the chord and sine*) 給出 $\sin 1^\circ$ 的精確值，未記日期，但初稿顯然寫在《算術之鑰》之前，因《算術之鑰》的序言中提到它。卡西的另一項任務是參與制定《烏魯伯格曆》，這是一部討論天文、曆法的書，包括星表和數學用表。卡西肯定投入巨大的精力並做出了貢獻。不過在他生前只完成開頭的理論部分。這部曆法在卡西死後

很多年才由他的後繼者完成。

圓周率的計算

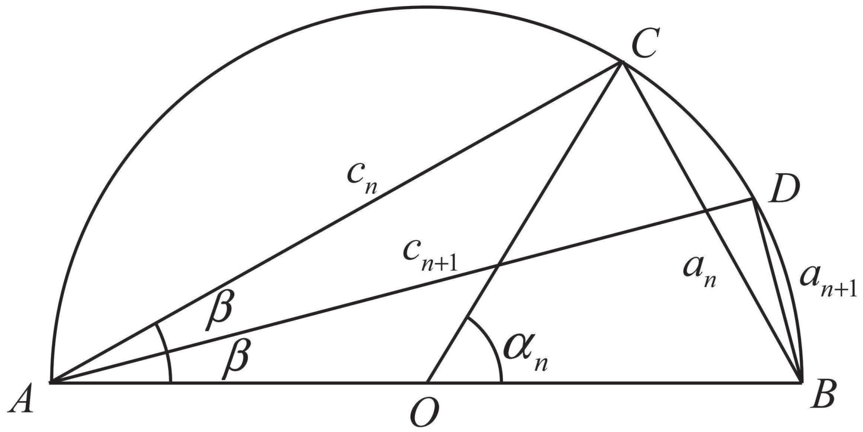
圓周率 π 的研究，在一定程度上反映這個地區或時代的數學水準。我國祖沖之在公元 462 年算出 π 的 8 位可靠數字：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927 。$$

直到 1424 年，卡西才打破這個世界記錄。

他所用的方法仍然是求出圓內接與外切正多邊形的周長。從正六邊形開始，每次邊數加倍，這一點和阿基米德、劉徽相同，但計算過程各有特點。

卡西首先根據歐幾里得幾何證明一個幾何命題，然後導出所需要的計算公式。為簡單起見，下面用現代三角法來說明他所用的公式。



如圖，設 $AB = d = 2r$ 是圓的直徑，r 表半徑。a_n、c_n 是內接於圓的直角 $\triangle ABC$ 的兩個直角邊，取 $\overset{\frown}{BC}$ 弧中點 D，記 $AD = c_{n+1}$、$BD = a_{n+1}$。又 $\angle BAD = \angle DAC = \beta$，則

$$\begin{aligned} c_n &= d\cos 2\beta ，\\ c_{n+1} &= d\cos\beta ，\\ c_{n+1}^2 &= d^2\cos^2\beta = d^2\cdot\frac{1+\cos 2\beta}{2} = r(2r+c_n) ， \end{aligned}$$

即

$$c_{n+1}=\sqrt{r(2r+c_n)} 。 \tag{1}$$

如已知 c_n， 通過此式即可得 c_{n+1}。 a_n 可通過勾股定理， 由 c_n 算出：

$$a_n=\sqrt{(2r)^2-c_n^2} 。$$

設 a_n 是內接正多邊形的一邊， 那麼 a_{n+1} 就是邊數加倍的內接正多邊形的一邊。

正六邊形的邊長爲 r， 記作 $a_1=r$ 而 $c_1=r\sqrt{3}$， 令邊數加倍， 從 (1) 式得到 $c_2=r\sqrt{2+\sqrt{3}}$， 再加倍 (24 邊)，

$$c_3=r\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

這樣算出一系列的 $c_n(n=3\cdot 2^n)$， 一直算到 $n=28$， 即

$$3\cdot 2^{28}=805\,306\,368$$

邊， 得到

$$c_{28}=r\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ (28 \text{ 重根})$$

及

$$a_{28}=r\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ (28 \text{ 重根})$$

的值。 a_{28} 乘以邊數 $3\cdot 2^{28}$， 便是圓內接正 $3\cdot 2^{28}$ 邊形的周長。 類似地， 可以求出外切正 $3\cdot 2^{28}$ 邊形的周長。 最後取二者的算術平均來算圓周長的近似值， 用 60 進分數表示出來 (取 $r=1$)：

$$6^\circ 16' 59'' 28^{\mathrm{III}} 1^{\mathrm{IV}} 34^{\mathrm{V}} 51^{\mathrm{VI}} 46^{\mathrm{VII}} 14^{\mathrm{VIII}} 50^{\mathrm{IX}} ，$$

此處藉用 60 進角度的表示法， 6° 表示 6 是整數， 後面是 60 進分數。

卡西在《 圓周論 》的第 8 節中又將此值改寫成十進分數 (即小數)

$$6.283\,185\,307\,179\,586\,5 。$$

除以直徑 2， 即得圓周率

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,25\text{。}$$

它有 17 位準確數字， 打破了祖沖之保持了 900 多年的世界記錄。

1596 年，L.V. 柯倫 (Ceulen) 用內接及外切正 $60 \cdot 2^{33}$ (=515 396 075 520) 邊形算出小數後 20 位， 才打破了卡西保持一百多年的記錄。

值得注意的是， 這裡出現了十進小數的記數法， 在伊斯蘭國家， 這不是最早的。 五個世紀以前， 烏格利迪西 (al–Uqlīdisī) 已認識到小數的優越性， 並在書中使用。 不過未被後人所接受 (文獻 [14]， p.481)。 最先系統地介紹小數的， 一般認爲還是卡西。 他在另一本重要著作《算術之鑰》中進一步闡述小數的理論， 指出小數與 60 進分數互化的方法。

中國自古以來就用十進制記數法， 所以小數的應用也很早。 劉徽註《九章算術》(公元 263 年)， 在 “少廣” 章開方術下面的註中就提到小數 (雖然未有現代的符號和名稱)， 比西方早千餘年。 有理由猜想阿拉伯國家的十進小數是中國傳過去的 (文獻 [9]， p.268)。

$\sin 1^\circ$ 的計算

卡西在數值計算方面的另一項成果是給出 $\sin 1^\circ$ 的精確值， 記載在他的《弦與正弦論》一書中。 在他之前， 艾布瓦發 (Abu'l-Wafā) 及伊本尤努斯 (Ibn Yūnus) 曾研究過這一問題， 但結果不夠精確。

十一世紀時， 伊斯蘭數學家已知三等分角問題導致一個三次方程

$$ax = b + x^3\text{。}$$

比魯尼 (al-Bīrūnī) 曾利用這一類方程近似地作出正九邊形， 但方法已失傳。 卡西創設一種求方程近似根的迭代法， 設方程

$$x=\frac{b+x^3}{a}$$

有一個很小的根， 忽略其三次冪， 令第 1 近似值爲

$$x_1=\frac{b}{a}\text{，}$$

取第 2 近似值 $x_2=(b+x_1^3)/a$， 第 3 近似值 $x_3=(b+x_2^3)/a$， 一般， $x_n=(b+x_{n-1}^3)/a$。

當 $3x^2/a<r<1$ 時， 該迭代程序是收斂的。

卡西的方法， 用現代三角的術語來說就是先求出 $\sin 72°$、 $\sin 60°$ 足夠精確的值， 再利用 $\sin 12°=\sin(72°-60°)$ 及半角公式算出 $\sin 3°$， 根據三倍角公式有 (文獻 [13]， p.151)

$$\sin 3°=3\sin 1°-4\sin^3 1°\text{，}$$

記 $x=\sin 1°$， 則

$$x=\frac{\sin 3°+4x^3}{3}\text{。}$$

從 $x_1=(\sin 3°)/3$ 開始， 進行迭代

$$x_n=\frac{\sin 3°+4x_{n-1}^3}{3}\quad(n=2\text{、}3\text{、}\cdots)\text{。}$$

卡西定半徑爲 60， 使用 60 進記數法。 在實際計算中並不是逐個求出 x_2、 x_3、 $\cdots$， 而是找到每個的修正值。 最後的結果是

$$1°2'49''43^{\mathrm{III}}11^{\mathrm{IV}}14^{\mathrm{V}}44^{\mathrm{VI}}16^{\mathrm{VII}}26^{\mathrm{VIII}}17^{\mathrm{IV}}\text{，}$$

相當於半徑爲 1 時的 10 進小數

$$0.017\,452\,406\,437\,283\,510$$

前 16 位數字都是準確的， 最後一位數才出現誤差。

後來卡迪・扎達・魯米著《論 $\sin 1°$ 的求法》(*Risāla fi'ljayb*， *Treatise on the determination of* $\sin 1°$)， 闡述卡西的方法， 魯米的孫子米林・切萊比 (Mīrīm Chelebi) 進一步改進其法， 使計算步驟減少， 可更快地求出具有要求精確度的近似值。 這是中世紀代

數方面最突出的成就之一。 數學史家 H. 漢克爾 (Hankel, 1839 – 1873) 評論道："其精巧與優美不亞於西方韋達以後的近似計算。"

《算術之鑰》

《算術之鑰》是卡西著作中篇幅最大的, 它幾乎網羅了當時的全部數學知識, 堪稱一部初等數學大全。 它除了滿足一般學生的需要外, 對於從事實際工作的讀者, 如天文學家、 測量員、 建築師、 商人等也有幫助。 其內容包括算術、 代數與幾何。 書名的本身就表明作者把算術看作解決一切問題的鑰匙, 只要這問題能化作計算。 卡西給算術下的定義是："一種科學, 它可以藉助已知量去尋求未知量的數值"。 此書表達清晰、 結構精良、 方法實用, 故深受讀者歡迎, 被用作手册傳誦數百年之久。

《算術之鑰》共五卷, 內容分別是: 卷 1, 整數的算術; 卷 2, 分數的算術; 卷 3, 天文學家的計算法; 卷 4, 平面與立體圖形的度量; 卷 5, 用代數方法及雙試位法解題。

在第 1 卷中卡西詳細介紹了整數開方的一般方法。 根的整數部分用類似秦九韶法 [西方稱魯菲尼 (Ruffini) – 霍納 (Horner) 法] 來求得。 如果是不盡根,

$$a < \sqrt[n]{a^n + r} < a + 1,$$

分數部分按公式

$$\frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

求出其近似值。

在書中卡西沒有使用符號和公式, 一切計算都是用文字敍述的, 在闡明開方法的同時, 還作出二項式係數的表, 即帕斯卡三角形 (或賈憲三角形), 寫到 $(a+b)^n$ 展開式 $n = 9$ 時的係數。 在卡西之前, 阿拉伯國家已有不止一個人造過這個三角形, 如凱

拉吉 (al-Karajī)、 奧馬海亞姆 (Omar Khayyam)、 納西爾丁 (Nasīr ad-Dīn al-Tūsī) 等。 不過都沒有留傳下來。

這一卷第 5 節還舉出一個開 5 次方的實例： 求

$$N = 44\,240\,899\,506\,197$$

的五次方根。 根的整數部分是 $a = 536$， 以此作第 1 近似值。 第 2 近似值按下式計算：

$$\sqrt[5]{N} = \sqrt[5]{a^5 + r} \approx a + \frac{N - a^5}{(a+1)^5 - a^5}\text{。}$$

分母是用二項展開式來算的。 最後結果是

$$536\frac{21}{414237740281}\text{。}$$

第 2、 3 卷闡述了十進分數 (小數)， 建立了一套和 60 進制並列的運算法則， 兩者可以互換。 不懂天文學 60 進制的人也容易掌握小數方法， 因此很快傳播開來， 對伊斯蘭國家及歐洲都產生了深遠的影響。 卡西詳細敍述了有限小數， 但未涉及循環小數。 他創用特殊的小數記號， 有時用一豎來分隔整數與小數部分， 有時又用不同的顏色來區別。

第 4 卷是幾何學， 討論了各種平面及立體圖形的定義、 性質及量度方法。

第 5 卷很重要， 它給出一次到四次方程的解法。 十一－十二世紀時， 奧馬海亞姆曾用圓錐曲線去解 3 次方程。 4 次方程在卡西之前只是偶然出現過， 而卡西則全面地加以分類研究。 有時他還用 “雙試位法” 來解。

十三－十四世紀， 中亞細亞地區和中國交往頻繁。 成吉思汗之孫旭烈兀 (Hülagü， 1219－1265) 1256 年進攻伊朗高原， 1258 年佔領巴格達， 建立伊兒汗國。 他從中國帶了些學者到伊朗去， 在他的宮廷中和當地的學者一起從事研究工作。 在這之前， 文化已有零星的交流。 因此阿拉伯的天文學家頗知中國的學術。 十進記

數法、整數的開方、高次方程的數值解法以及賈憲三角形等等都是中國數學的精華。卡西《算術之鑰》的許多內容和中國算法如出一轍，受到中國的影響是可以肯定的 (文獻 [12]，p.221；[10]，p.140；[11]，p.290)。當然不排除卡西本人的創造發明。

天文曆法著作

早在 1407 年，卡西就已經寫成《天的階梯》(*The stairway of heaven*)，論述天體的距離與大小。又於 1416 年寫成《觀象儀器》(*Treatise on $\cdots$ observational instruments*)，介紹了包括渾儀 (armillary sphere) 在內的 8 種天文儀器的構造，其中有些是卡西的獨創。他還修訂了納西爾丁領導下制定的《伊兒汗曆》(IIkhānī)，寫成《修正的伊兒汗曆》(*Khāqānī Zīj*)。在緒論中，他詳細描述了平均月球運動及近點月 (anomalistic) 運動，這是以他三次在卡尙的月蝕觀測以及在托勒密《天文學大成》中的三次月蝕記載爲依據的。這本曆法羅列了各種曆法：伊斯蘭教的陰曆、波斯陽曆、希臘－敍利亞曆、奧馬海亞姆改良的陽曆、中國－維吾爾曆，最後是伊兒汗曆。書中載有 60 進每隔 $1'$ 的 4 位正弦和正切表。還有黃道坐標與赤道坐標互化的表，以及有關日、月、行星、恆星的好幾種表。地理方面，給出 516 個點的經緯度。

卡西還發明一種“天象盤”(plate of heavens)，形狀像“星盤”(astrolabe)，可以確定行星的黃經、黃緯、留 (station)、逆行 (retrogradation) 以及到地球的距離等，記在《天象盤構造方法》(*Nuzha al-ḥadāiq $\cdots$*，*On the method of construction of the instrument called plate of heavens*，1416) 中。

文　　獻

原始文獻

[1] Б.А.Роэенфельд 譯， В.С.Сегал и А.П.Юшкевич (校訂)，Джемшид Гиясэддин ал-Каши(al–Kāshī), Ключ арифметики, Трактат об окружновти(《算術之鑰》，《圓周論》阿拉伯原文與俄文對照本， 1956。

[2] al-Kāshī, *Sullam al-samā' fī* ··· (《天的階梯》， 1407)， 阿拉伯文手抄本， 藏倫敦 India Office 755 等地。

[3] al-Kāshī, *Khaqānī Zīj*(《修正的伊兒汗曆》， 1413－1414)， 波斯文手抄本， 藏倫敦 India Office 2232 等地。

[4] al-Kāshī, *Risāla dar sharḥ* ···(*Treatise on the explanation of observational instruments*, 1416)， 波斯文手抄本， 藏萊頓， 德黑蘭等地。

研究文獻

[5] V.V. Bartold, Улугбек и его время, Петроград, Петроград, 1918

[6] Б.А.Роэенфельд и А.П.Юшкевич, О трактате Qāḍi-Zāde arRūmīоб определении синуса одного градса, Исторцко-математцческце цсслебованця, 13 (1960), 533－556。

[7] A. Saidan, *The earliest extant Arabic arithmetic*, Isis, 57(1966), 475－490。

[8] R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre*：*Recherches sur l'histoire des mathématiques Arabes*, Paris, 1984。

[9] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985。

[10] 李儼， 中國算學史， 商務印書館， 1955。

[11] 李儼， 中國數學大綱 (上)， 科學出版社， 1958。

[12] 錢寶琮， 中國數學史， 科學出版社， 1964。

[13] J.L. Berggren, *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986。

[14] A.S. Saidan, *The arithmetic of al–Uqlīdisī*,D. Reidel Publishing Company, 1978。

[15] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, 1923