

卡 爾 達 諾

卡爾達諾，G. (Cardano，Girolamo) 1501 年 9 月 24 日生於義大利帕維亞 (Pavia)；1576 年 9 月 21 日卒於羅馬。數學、醫學、物理學、哲學、星占學。

卡爾達諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cardan.html>

卡 爾 達 諾

王 青 建

(遼寧師範大學)

卡爾達諾，G. (Cardano，Girolamo) 1501 年 9 月 24 日生於義大利帕維亞 (Pavia)；1576 年 9 月 21 日卒於羅馬。數學、醫學、物理學、哲學、星占學。

卡爾達諾姓名的英文拼法是 Cardan，Jerome，譯為“卡當”，常以此通用。例如解一般三次方程的“卡當公式”等。

卡爾達諾是一個法官和一個寡婦的私生子。自幼體弱多病，備受歧視和虐待，性格冷漠倔強。父親法齊奧 (Fazio Cardano，1444–1524) 博聞飽學，在米蘭講授過法學和醫學，曾與義大利文藝復興時期的著名畫家、科學家達文西為友。受父親的鼓勵，卡爾達諾開始學習古典文學、數學和星占學。1520 年在帕維亞大學時又學習醫學。後轉學於帕多瓦，1526 年畢業，取得醫學博士學位，繼而在帕多瓦附近的一個小鎮薩科隆戈 (Saccolongo) 行醫近 6 年。1531 年與 L. 班達雷妮 (Bandarini) 結婚，生有二子一女。

婚後不久，卡爾達諾收入微薄，難以支撐不斷擴大的家庭，被迫搬到米蘭居住以謀公職。但由於他是私生子，米蘭醫學協會認為這是出身卑賤，拒絕他加入該協會。卡爾達諾只好獨自開業行診，生活十分拮据。1534 年由父親的一個貴族朋友舉薦，卡爾達諾成為米蘭專科學校的一名數學教師，在那裡講授幾何學。同時任貧民院的醫生，生活略有好轉。他除了教學和診病外，還潛心醫學研究，自 1536 年起在威尼斯等地出版了幾部專著，闡述一些理論問題，總結行醫經驗，還揭露過醫學界的某些劣行。由於他的醫術高超，逐漸在米蘭取得聲望。1539 年米蘭醫學協會重新

決定接納他爲該協會正式會員。同年卡爾達諾轉到米蘭的醫學院任教，不久成爲該院的負責人。1543年又到帕維亞大學任醫學教授。幾年之內，成爲聞名全歐的醫生。1552年還專程到英國愛丁堡爲大主教J. 哈密頓(Hamilton)及其他達官顯貴治病。

1560年，卡爾達諾寵愛的大兒子因犯“毒死妻子罪”被處決，對他的精神打擊很大。當時，卡爾達諾的小兒子也生活放蕩，桀驁不馴。爲擺脫煩惱，卡爾達諾謀到波倫亞(Bologna)大學醫學教授的職位，1562年正式赴任。

卡爾達諾的坎坷經歷使他的性格頗爲奇特，因而常常被描述爲科學史上的怪人。他在數學、哲學、物理學和醫學中都有一定成就，同時也一直醉心於占星術和賭博的研究。1570年因給耶穌算命(說耶穌的一生都是受天上星宿的支配)而受到宗教法庭監禁，被起訴爲異教徒(另一說是因爲債務問題被捕入獄，還有的說兼而有之)。幾個月後，宣誓放棄異端學說獲釋出獄但失去了教學職位和學術出版權。1571年移居羅馬，另謀生計。後因星占學研究得到教皇皮烏斯五世的賞識，付給他終身年薪，留在皇宮供職。在生命的最後一年(1576)，卡爾達諾寫下了自傳體著作《我的生平》(*De propria vita liber*…，1643年在巴黎出版)。該書以自我批評的口吻剖析了他自己的一生，是研究卡爾達諾的主要材料之一。

卡爾達諾被譽爲百科全書式的學者，一生共寫了各種類型的文章，書籍200多種。現存的材料就有約7000頁。他智力超群，性情孤僻，職業動盪多變，著述魚龍混雜。除了作爲正式職業的著名醫生、醫學教授、占星術士引起注意外，就他的貢獻而言，人們也常把他稱爲數學家、哲學家、物理學家，或者籠統地稱之爲科學家。

卡爾達諾的數學貢獻表現在他對算術和代數的研究。1539年他首次出版了兩本算術演講書，其中較重要的一部是在米蘭刊行的《算術實踐與個體測量》(*Practica arithmeticæ et mensurandi*

singularis)。書中主要用數值計算來解決實際問題，在一些計算方法，代數變換中顯示出較高技巧。當時的代數沒有符號，僅靠文字敘述來表示解題過程，稱之為“文詞代數”。對於高於二次的代數方程，一般是沒有解決辦法的。卡爾達諾在書中列專題論述了多種方程的解法，甚至求得一些特殊三次方程的解。例如：對方程(用現代符號表示) $6x^3 - 4x^2 = 34x + 24$ ，兩邊同時加上 $6x^3 + 20x^2$ ，合併後得：

$$4x^2(3x + 4) = (2x^2 + 4x + 6)(3x + 4) ,$$

兩邊同除以 $3x + 4$ ，則由二次方程解得原方程的一個正根 $x = 3$ 。(按當時的習慣，一般不承認方程有負根，解出一個正根就認為是解完了方程。)

卡爾達諾最重要的數學著作是 1545 年在紐倫堡出版的《大術》(*Ars magna*)。全名為《大術，或論代數法則》(*Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus*)。該書系統給出代數學中的許多新概念和新方法，例如：三、四次代數方程的一般解法；確認高於一次的代數方程多於一個根；已知方程的一個根將原方程降階；方程的根與係數間的某些關係；利用反覆實施代換的方法求得數值方程的近似解；解方程中虛根的使用等等。其中在數學史上較為重要而又頗有爭論的是三次代數方程的一般解法。

早在 1510 年左右，波倫亞大學的教授 S. del 費羅 (Ferro) 就發現了缺少二次項的三次方程 $x^3 + px = q$ (p 、 q 均為正數) 的解法，並在逝世之前透露給他的學生 A.M. 菲奧爾 (Fior，威尼斯人)。後來，出生於義大利北部布雷西亞 (Brescia) 的數學教師 N. 塔爾塔利亞 (Tartaglia) 於 1530 年得到另一類缺少一次項的三次方程 $x^3 + px^2 = q$ (p 、 q 為正數) 的解法。1535 年，菲奧爾得知塔爾塔利亞會解三次方程後並不相信，就向他提出挑戰，要求進行公開競賽。塔爾塔利亞為此潛心鑽研，終於在比賽前得到 $x^3 + px = q$ 和 $x^3 = px + q$ (p 、 q 為正數) 兩類方程的解法，從而在比賽時解出

了菲奧爾提出的全部三十個問題。反之，塔爾塔利亞提出的問題多數導致對方不會解的 $x^3 + px^2 = q$ 類型的方程，因而塔爾塔利亞大獲全勝。受此鼓舞，塔爾塔利亞繼續研究三次方程的解法，到 1541 年已發現 $x^3 \pm px^2 = \pm q$ (p 、 q 為正數) 和由此變換而得到的 $x^3 \pm mx = \pm n$ (m 、 n 為正數) 等多種類型的方程的一般解法，他準備寫一本包含這些解法的代數書傳於世，但這一設想被卡爾達諾打亂了。

卡爾達諾當時也在研究方程問題，準備寫一部關於代數問題的專著。當他得知塔爾塔利亞與菲奧爾競賽獲勝的消息後，便託人打聽塔爾塔利亞的方法。1539 年又親自寫信討教，並邀請塔爾塔利亞到米蘭。這年 3 月塔爾塔利亞來到後，卡爾達諾經過當面再三懇求並發誓對此保密，塔爾塔利亞才把他關於方程 $x^3 + px = q$ 和 $x^3 + q = px$ 的解法寫成一首 25 行詩告訴卡爾達諾。此後，卡爾達諾從各方面詳細研究了塔爾塔利亞的解法，並以此為線索，得出各種類型三次方程的解法。他將這些解法收在《大術》中發表出去，同時補充了各種方法的證明。在《大術》第 11 章“關於一個立方和未知量等於一個數”(De cubo & rebus aequalibus numero，相當於方程 $x^3 + px = q$) 中，卡爾達諾一開始就申明：“費羅約在三十年前發現了這一法則並傳授給菲奧爾，後者曾與也宣稱發現該法則的塔爾塔利亞競賽。塔爾塔利亞在我的懇求下將方法告訴了我，但沒有證明。在這種幫助下，我克服了很大困難找到了證明，現陳述如下……。”由此可以看出，卡爾達諾知道費羅早已發現這類方程的解法，或許覺得沒有保密的必要，才將它發表出來。雖然卡爾達諾寫明了方法的來源，但失信行為仍然激怒了塔爾塔利亞。塔爾塔利亞在第二年寫成的《問題》(Quesiti，1546) 一書中強烈譴責了卡爾達諾。1547 年卡爾達諾的僕人和學生 L. 費拉里 (Ferrari) 代替主人向塔爾塔利亞進行論戰，在近兩年的時間裡先後通信 12 封，各自向對方提出

31 個問題，後又相互指責對方的解法有誤。塔爾塔利亞原想與卡爾達諾本人進行直接辯論，但卡爾達諾卻始終沒有再與他通信或見面。1548 年 8 月 10 日，塔爾塔利亞與費拉里在米蘭大教堂附近進行了公開交鋒。塔爾塔利亞批駁費拉里解答中的錯誤，而費拉里則強調塔爾塔利亞有一個不能解決的問題，辯論從上午 10 點持續到晚飯時間，結果不了了之。最後由於《大術》的影響，三次方程的解法還是冠以“卡當公式”或“卡爾達諾公式”流傳開來。

卡爾達諾在《大術》中藉助於幾何圖形的證明並以方程 $x^3 + 6x = 20$ 為例闡述了解三次方程的方法。對於方程 $x^3 + px = q$ ，卡爾達諾在“法則”(Regula) 中得出的求解公式為(用現代符號表示)

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{2}q)^2} + \frac{1}{2}q} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3 + (\frac{1}{2}q)^2} - \frac{1}{2}q}.$$

他的證明實質上是引入 u 、 v 兩個量，並令 $u^3 - v^3 = q$ 以及 $(uv)^3 = (p/3)^3$ ，然後推出 $x = u - v$ 。他將 u^3 、 v^3 看成是立方體的體積，其邊長分別為 u 和 v ，而乘積 $u \cdot v$ 是兩個邊長所形成的矩形，其面積為 $p/3$ 。這樣， $u^3 - v^3 = q$ 意味著兩個體積之差等於 q ， x 就等於兩個立方體邊長之差，即 $x = u - v$ 。藉助幾何方法可推得

$$x^3 = (u - v)^3 = u^3 - v^3 - 3(u - v) \cdot u \cdot v = q - px,$$

即為原方程。此外，卡爾達諾還解出 $x^3 = px + q$ 、 $x^3 + px + q = 0$ 、 $x^3 + q = px$ 三種類型的三次方程，對含有二次項的方程，卡爾達諾給出具體消去二次項的方法。例如對 $x^3 + 6x^2 = 100$ ，令 $x = y - 2$ ，代入後化為 $y^3 = 12y + 84$ 。這已是目前解三次方程的重要步驟之一。卡爾達諾在《大術》第 17–23 章中專門講述了處理一般三次方程(四項俱全的方程)的方法，使之對任意三次方程均可求解。

《大術》的另一重要成果是在第 39 章中記載了費拉里發現的四次代數方程的解法。“求三個成連續比例的數，其和為 10，前兩

個數的積爲 6。”該題導致方程 $\frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 10$ 或 $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ (卡爾達諾習慣於把他的方程寫成各項係數都是正數的形式)。書中以此爲例闡述了費拉里的方法，並給出主要步驟的幾何證明。這是一般四次代數方程解法的最早記載。

卡爾達諾在《大術》第 37 章中專門討論了解方程中遇到的虛根問題。通俗的例子是“將 10 分成兩部分，使其乘積爲 40”。他將解答 $(5 + \sqrt{-15}) \cdot (5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$ 寫成式子

5p:Rm:15

5m:Rm:15

25m:m:15qd. est40。

用 R 表示平方根，p 表示加，m 表示減。對於求解中產生的負數的平方根，卡爾達諾首次把它當作一般的數進行運算。他還認識到如果一個方程有一個虛根，則應該有與這共軛的另一個虛根。

卡爾達諾在《大術》中觀察到方程的根與係數的關係以及係數符號的連續性與根的符號間的關係。他還在 1539 年 8 月的一封信中討論了方程的不可約情形，即根是不同的實數，而根的表達式中卻出現虛數的情形。後來又在 1570 年《大術》的一個新版本中加了一節，專門論述三次方程的不可約情形。但他並沒有解決這一問題。卡爾達諾在歐洲還是第一個允許二次方程和三次方程負根存在的人，並首次發現三次方程有三個(實)根。這些工作被認爲是代數方程理論的早期成果。

卡爾達諾長期醉心於遊戲和賭博，擲骰、弈棋、打牌無所不從。他早在 1539 年的著作中就論及賭金分配問題，另外又寫成經驗之談式的專著《遊戲機遇的學說》(*Liber de ludo aleae*)。這部著作直到 1663 年才收入在萊頓出版的 10 卷本卡爾達諾《全集》(*Opera omnia*) 中第一次發表。書中給出一些概率論的基本概念和定理，得到所謂“冪定理”(某事件重複 n 次發生的概率) 和大數定

律。但這些理論發表得較晚，對後世影響不大。

卡爾達諾被譽為 16 世紀文藝復興時期人文主義的代表人物。他試圖將現實中的一切統一在一種體系中，因此除了發表過多學科的文章、專著外，還出版了兩部百科全書式的綜合性著作《事物之精妙》(*De subtilitate libri*，21 卷，1550) 及其補充《世間萬物》(*De rerum varietate libri*，17 卷，1557)。書中包括大量力學、機械學、天文學、化學、生物學等自然科學與技術的知識，還有密碼術、煉金術以及占星術等內容。其中的一些科學觀點與達文西的論述頗為相似，或許卡爾達諾曾受到這位科學和藝術大師手稿的啟迪。這兩部著作僅在 16 世紀就有十幾個版本流傳，後來又被譯為多種文字，影響深遠。

1570 年卡爾達諾在《論運動、重量等的數字比例》(*Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, ponderum, ...*) 中提出，斜面上支持一個物體所需要的力與斜面的傾角成正比，並以新的方式論述了天平平衡的條件。他設計了許多機械裝置，其中著名的有“卡爾達諾懸置”，“卡爾達諾軸”和“卡爾達諾接合”等。他還仔細觀測了拋射體的運動，指出這種運動的軌跡類似於拋物線。並由此斷言：除天體外，物體不可能有永恆的運動。卡爾達諾是實驗物理學的先驅者之一，曾嘗試用定量的方法研究物理學。他假設槍彈在空氣和水中通過的距離反比於它們的密度，然後通過實際測量來確定兩者的密度比值。他還在流體動力學中用觀察實驗的方法得出與當時流行觀點相反的結論：流體中高水位比低水位運動的速度快。

卡爾達諾還被稱為自然哲學家。當時歐洲解釋自然界仍採用古希臘的四元說，即世間萬物都是由火、水、土和空氣生成的，這四種物質被稱為“要素”或“基本元素”。卡爾達諾將四元減為三元，去掉了“火”，又將四元素所產生的“四種基性”——“熱”、“乾”、“冷”，“溼”減為兩種，只留下“熱”和“溼”，並試圖用

“贊同”和“厭惡”說明自然現象。不過他的“三元”學說和“兩種基性”學說影響不大。

在地質學方面，卡爾達諾指出山岳的形成是由於流水的腐蝕造成的。他還指出：在陸地上發現的海生物化石表明，該地域是由海底逐漸上升而形成的。他最早提出水的循環理論，即下落的雨水匯成小溪流入河中，河水又流入海中，海水受陽光照射蒸發，化為水蒸氣形成雲，再成為雨水落到地面，如此構成永恆的循環。這些理論對地質學的發展有重要影響。

作為著名醫生，卡爾達諾不僅精於診斷和開方用藥，而且外科手術技藝高超。他還在理論上第一個記載了斑疹傷寒病的治療方法，並對生理學和心理學的一些問題提出自己的見解。雖然作為賭徒和星術士留下的名聲不太好（甚至傳說卡爾達諾為了證實他自己死期占卜的正確而在預言的那天自殺身亡），但他的著作在 16 世紀下半葉及後來被許多學者引用。由此可見，卡爾達諾作為一個科學家的影響是很大的。

文 獻

原始文獻

- [1] G. Cardano, *Opera omnia*, Charles Sponi, ed., 10 vols., Leiden, 1663 。
- [2] G. Cardano, *De propria vita liber* …, Gabriel Naudé, Paris, 1643 ; 義大利文, Milan, 1821, Turin, 1945 ; 英文, New York, 1930 。

研究文獻

- [3] A. Bellini, *Girolamo Cardano e il suo tempo*, Milan, 1947 。
- [4] M. Fierz, *Girolamo Cardano*, Birkhäuser Boston, 1983 。
- [5] M. Gliozzi, *Cardano*, Girolamo, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 1971, 64 – 67 。

- [6] H. Morley, *The life of Girolamo Cardano of Milan*, Physician, 2 vols., London, 1854 °
- [7] E. Bortolotti, *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari e della scuola mathematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche*, no. 9 in the series *Studi e Memorie per la Storia dell' Universita di Bologna*, Bologna, 1926, 55 – 108 °
- [8] P. Cossali, *Origine e trasporto in Italia dell'algebra*, II, Parma, 1797, 159 – 166, 337 – 384 °
- [9] P.L. Rese, *The Italian Renaissance of mathematics*, Librairie Droz, 1975, 143 – 150 °
- [10] O. Ore, *Cardano the gambling scholar*, Princeton, 1953 °
- [11] M.A. Nordgaard, *Sidelights on the Cardan–Tartaglia controversy*, National Mathematics Magazine, 12(1937), 327 – 346 °