韋　達

韋達， F. (Viète， François) 1540 年生於法國普瓦圖地區 [Poitou， 今旺代省豐特奈 -勒孔德 (Fontenay-le-Comte)]； 1603 年 12 月 13 日卒於巴黎 。 數學 。

韋達之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Viete.html

韋 達

王 青 建

(遼寧師範大學)

韋達， F. (Viète， François) 1540 年生於法國普瓦圖地區 [Poitou， 今旺代省豐特奈 -勒孔德 (Fontenay-le-Comte)]； 1603 年 12 月 13 日卒於巴黎。 數學。

韋達的名字應譯爲 “維埃特”， 因其著作均用拉丁文發表， 故名字常用拉丁文拼法 Vièta ， 譯音是韋達， 沿用至今。

韋達父親艾蒂安 (Étienne) 是豐特奈的律師。 韋達早年在家鄉接受初等教育， 後來到普瓦捷 (Poitiers) 大學學習法律， 1560 年獲法學學士學位， 成了一名律師。 1546 年放棄這一職位， 做了一段秘書和家庭教師工作。 1573 年 10 月受查爾斯九世委派任雷恩 (Rennes) 布列塔尼 (Brittany) 地方法院律師。 閒暇期間鑽研各種數學問題。 1580 年 3 月在巴黎成爲法國行政法院審查官， 後任皇室私人律師。 1584 年遭政敵陷害被放逐， 5 年後又被亨利三世召回宮中， 充任最高法院律師。 在法蘭西與西班牙的戰爭期間 (1595 − 1598)， 韋達爲亨利四世破譯截獲的西班牙密碼信件， 卓有成效。 後來幾年輾轉於豐特奈和巴黎。 1602 年被亨利四世免職， 次年去世。

韋達是法國 16 世紀最有影響的數學家。 他在畢業以後 (1546 − 1568) 和從政在野期間 (1584 − 1589) 曾潛心探討過數學， 並一直將這一研究作爲業餘愛好。 爲了把研究成果及時發表， 還自籌資金印刷和發行自己的著作。 由於他的論著內容深奧， 言辭艱澀， 故其理論當時並沒有產生很大影響。 直到 1646 年， 由荷蘭數學家 F. van 斯霍滕 (Schooten) 在萊頓出版了韋達全部著作的文集， 才使他

的理論漸漸流傳開來， 得到後人的承認和讚賞。

平面三角學與球面三角學

《應用於三角形的數學定律》(*Cannon mathematicus seu adtri-angula cum appedicibus*， 巴黎， 1579) 是韋達最早的數學專著之一， 也是早期系統論述平面和球面三角學的著作之一。 該書於 1571 年付印， 共有四個部分， 但最後只有前兩部分於 1579 年出版。 書中的第一部分列出 6 種三角函數表， 第一個表和第六個表以分和度爲間隔， 給出 6 條三角函數線精確到 5 位和 10 位小數的值， 其它的表則列出與三角值有關的乘法表、 商表等。 第二部分給出造表的方法， 解釋了三角形中諸三角線量值關係的運算公式， 其中有韋達自己發現或補充的公式， 如正切定律

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)},$$

和差化積公式

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\left(\frac{A\pm B}{2}\right)\cos\left(\frac{A\mp B}{2}\right)$$

等。 他將這些公式彙於一個總表中， 使得給出某些已知量後， 可以從表中得出未知量的值。 該書以直角三角形爲基礎， 對斜三角形， 韋達仿效古人的方法化爲直角三角形來解決， 對球面三角形， 則使用與平面三角形相仿的記號化爲球面直角三角形， 給出計算的完整公式及其記憶法則， 如提出涉及鈍角的餘弦定理

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a\ 。$$

韋達在三角學方面不僅多有創見， 而且運用靈活。 1593 年亨利四世爲解答一個 45 次方程召見韋達。 該方程是由比利時數學家 A. van 羅門 (Roomen) 提出的， 即

$$45y-3795y^3+95634y^5-\cdots+945y^{41}-45y^{43}+y^{45}=C。$$

羅門以此向全世界的數學家提出挑戰，徵求解答。荷蘭駐法大使對亨利四世說，法國人不具備解決這一問題的能力。韋達來到後看出這個方程與單位圓中心角爲 $2\pi/45$ 的弧所對的弦有密切關係。於是運用他的三角學知識，幾分鐘後就用鉛筆寫出了一個解。第二天他已找到該方程的全部 23 個正根，而當時並不承認其負根，認爲正弦値爲負是難以理解的。兩年後韋達發表了"回答"(*Responsum*，1595) 一文，解釋了他的方法。韋達根據 $45=3\cdot3\cdot5$，首先將一個角 5 等分，然後再將每一份 3 等分兩次，使之分別與五次方程和三次方程相對應，則上述問題可如下求解：先用 $3x-x^3=C$ 的根 x 求 t：$3t-t^3=x$；再根據方程 $5y-5y^3+y^5=t$ 得到所求之根。令 $C=2\sin\phi$，則有 $y=2\sin(\phi/45)$。求解過程中遇到了 $\sin n\theta$ 用 $\sin\theta$ 表示的問題。後來，韋達又專門寫了一篇論文"截角術" (*Ad angularium sectionum*)，初步討論了正弦、餘弦、正切弦的一般公式，首次把代數變換應用到三角學中。他考慮含有倍角的方程，具體給出了將 $\cos nx$ 表示成 $\cos x$ 的函數 $(n\le 11)$，並給出一個確定係數的表，就其應用的方法來看，韋達已能給出當 n 等於任意正整數的倍角表達式了。"截角術" 在他生前沒有發表，直到 1615 年才由安德森 (Anderson) 印刷所出版。

符號代數與方程理論

《分析方法入門》(*In artem analyticem isagoge*，Tours，1591) 是韋達最重要的代數著作，也是最早的符號代數專著，書中第 1 章引用了兩種希臘文獻：帕波斯 (Pappus) 的《數學文集》(*Mathematical collection*) 第 7 篇和丟番圖的《算術》(*Arithmetica*)，他將帕波斯提出的幾何定理與問題和丟番圖著作中的解題步驟結合

起來，認爲代數是一種由已知結果求條件的邏輯分析技巧，並自信希臘數學家已經應用了這種分析術 (ars analytice)，他自己只不過將這種分析方法重新組織。韋達不贊成用 algebra(代數) 這個詞，因爲它是一個外來語，在歐洲語言中沒有意義，建議用 analyse(分析) 來代替它。

韋達不滿足於丟番圖對每一問題都用特殊解法的思想，試圖創立一般的符號代數。他引入字母來表示量，用輔音字母 B、C、D 等表示已知量，用元音字母 A (後來用過 N) 等表示未知量 x，而用 A quadratus、A cubus 表示 x^2、x^3，並將這種代數稱爲 “類的運算”(logistice speciosa)，以此區別於用來確定數目的 “數的運算”(logistice numerosa)。對這種 “類”，他在第 2 章中藉用了歐幾里得《原本》中對量所作的規定，如：整體等於部分之和；相等的兩個量分別加上相等的兩個量結果仍相等；以及某些運算性質，例如：若 $a:b=c:d$ 則 $(a+c):(b+d)=a:b=c:d$；若 $ac=b^2$ (或 $ad=bc$) 則 $a:b=b:c$ (或 $a:b=c:d$) 等。從而使類的運算法則符合於通常數的四則運算法則，這樣他的 “分析方法” 對數和幾何量在使用上就沒有差別了，韋達以此爲根據展開了關於代數方程的討論。

書中第 5 章在列舉了方程的構成方法及類型後，給出了解方程的基本步驟。如將方程一邊的某一項移到另一邊；用方程中每一項都有的 “類” 除各項，降低方程的階；消去最高項的係數，將方程變成比例的形式等。第 6 章處理了一些涉及綜合法的問題，第 7 章討論了幾何量與數之間的關係。若事物本身能表示成長度、面積或體積，則在方程中能用一個數表示這個量，韋達拘泥於希臘人的齊性 (homogeneity) 原則，即認爲一個數表示線段，二數之積表示面積，三數之積表示體積，它們之間是不能混合運算的。因此在韋達列舉的方程中，要求每一項的已知量與未知量的乘積次數相等，稱之爲均勻性或齊次性 (homogeneous)，使整個

方程表示同一種幾何意義 (例如將三次方程 $y^3 + py + q = 0$ 記爲 $x^3 + A^2x = B^3$ 等)。 最後一章即第 8 章中韋達討論了各種可能出現的方程的表示方法共有 29 條規則。 其中給出了方程的定義： 一個方程是一個未知量與一個確定量的比較。

在數學中， 代數與算術的區別在於代數引入了未知量， 用字母等符號表示未知量的值進行運算。 韋達之前， 已有不少數學家用字母代替特定的數， 但並不常用， 韋達是第一個使之系統化的人。 雖然他選用的符號並不優良 (相等， 相乘等概念在運算中仍用文詞表示)， 沒有沿用下來， 現在用 a、 b、 c 表示已知量， x、 y、 z 表示未知量的習慣用法是 R. 笛卡兒 (Descartes) 繼韋達之後提出的， 可是當韋達提出類的運算與數的運算的區別時， 就已規定了代數與算術的分界。 這樣， 代數就成爲研究一般的類和方程的學問， 這種革新被認爲是數學史上的重要進步， 它爲代數學的發展開闢了道路， 因此韋達被西方稱爲 “代數學之父”。

1593 年， 韋達又出版了另一部代數學專著《分析五篇》(*Zeteticorum libri quinque*， 亦稱《發現五篇》， 5 卷， 約 1591 年完成)， 用具體實例將類運算與丟番圖的《算術》相比較， 並試圖將後者在幾何形式下的代數恆等式重新推導出來， 如 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ 記爲 [“a cubus+b in a quadr 3+a in b quad. 3+b cubo æ qualia $\overline{a+b}$ cubo”] 等， 還包含有二次和三次不定方程的解， 其中有 34 個問題引自丟番圖的《算術》(包括 13 個有同樣數值的問題)， 而解題方法卻是韋達的分析術。

《論方程的識別與訂正》(*De aequationum recognitione et emendatione*， 1615) 是韋達逝世後由他的朋友 A. 安德森 (Anderson) 在巴黎出版的， 但早在 1591 年業已完成。 其中得到一系列有關方程變換的公式， 給出了 G. 卡爾達諾 (Cardano) 三次方程和 L. 費拉里 (Ferrari) 四次方程解法改進後的求解公式。 例如， 對方程

$x^3 + 3B^2x = 2Z^3$，韋達設 $y^2 + yx = B^2$(B^2 可理解爲一個矩形的面積，該矩形的小邊爲 y，大邊與小邊的差額爲 x)，則有 $(B^2 - y^2)/y = x$，代入原方程，得

$$(B^6 - 3B^4y^2 + 3B^2y^4 - y^6)/y^3 + (3B^4 - 3B^2y^2)/y = 2Z^3$$

將所有項都乘 y^3，並適當合併，得 $y^6 + 2Z^3y^3 = B^6$，這個方程有一個二次正根和一個三次根，因此可得所求結果。由 $x^3 + 3B^2x = 2Z^3$ 和 $\sqrt{B^6 + Z^6} - Z^3 = D^3$ 就得到 $(B^2 - D^2)/D$ 爲所求的 x。在處理四次方程時，韋達同樣使用其化簡原理，首先消去含 x^3 的項，化爲方程 $x^4 + a^2x^2 + b^3x = c^4$，然後將含有 x^2 和 x 的項移到方程的右邊，並在方程兩邊同時加上 $x^2y^2 + y^4/4$，則方程變爲

$$(x^2 + \frac{y^2}{2})^2 = x^2(y^2 - a^2) - b^3x + \frac{y^4}{4} + c^4 。$$

然後選擇適當的 y，使方程右邊變成完全平方數，代換 y 值，求出兩邊的平方根，於是得到關於 x 的兩個二次方程，再解之。他還推出了一般二次方程的求根公式，類似於現在的結果。

在該書第 8 章，韋達給出卡爾達諾三次方程不可約情形的三角解法：若 $x^3 - 3a^2x = a^2b$，其中 $a > b/2$，則利用三角恆等式 $(2\cos\alpha)^3 - 3(2\cos\alpha) = 2\cos 3\alpha$，令 $x = 2a\cos\alpha$，由 $b = 2a\cos 3a$ 確定 3α，可得出方程的三個根

$$2a\cos\alpha 、 2a\cos(\alpha + \frac{2}{3}\pi) 、 2a\cos(\alpha + \frac{4}{3}\pi) 。$$

韋達只給出一個根，其方法爲後人沿用。

《論方程的識別與訂正》的另一成就是記載了著名的根與係數關係，即方程的根與係數的關係式。韋達給出四個定理，論述了在二次方程中如果第二項的係數是兩數和的相反數，第三項的係數是這兩數的乘積，那麼這兩個數就是這個方程的根。此外，韋達在最後一章中試圖將多項式分解成一次因式，如從二次到五次方程中

分解出 $x - x_k$， 但沒有成功， 只是在進行過程中較早得到代數方程 $\varphi(x) = 0$ 的形式。

韋達還探討了代數方程數值解的問題， 在 1591 年已有綱要，1600 年以《冪的數值解法》(*De numerosa potestatum*) 爲題出版。其中給出的求方程的近似根與求一般根方法一致， 其過程與 I. 牛頓 (Newton) 近似方法相仿， 由估值開始， 經過逐次迭代求得結果。 該方法到 1680 年前後才被普遍使用。

幾何學的貢獻

1593 年韋達在《分析五篇》中曾說明怎樣用直尺和圓規作出導致某些二次方程的幾何問題的解。同年他的《幾何補篇》(*Supplementum geometriae*) 在圖爾出版了， 其中給出尺規作圖問題所涉及的一些代數方程知識， 從直線的截距公設開始， 用已給兩線段的比例中項及圓弧和截距間的關係式， 較早地將倍立方和三等分角問題轉化爲解三次方程的問題， 並給出兩個用三角方法解三次方程的命題。後來他又得到用給定線段求解倍立方作圖問題的解答 (發表於 1646 年)。《幾何補篇》中還有六個命題研究了圓內接正七邊形的作圖法， 指出這種作圖亦可導致三次方程， 即 $x^3 = ax + a$。 韋達在同年出版的《各種數學解答》(*Variorum de rebus mathematicis responsorum*) 的前半部分又重述了倍立方體， 三等分角及圓內接正七邊形問題， 並以對偶形式討論了割圓曲線， 平面和球面三角形， 阿基米德螺線等問題， 給出無窮幾何級數的求和公式等結果。 此外， 在第 18 章中韋達最早明確給出有關圓周率 π 值的無窮運算式

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

即 π 的第一個解析表達式。 這是在考慮單位圓內正多邊形時發現圓面積爲

$$2\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

而得到的。 他還利用圓內接正 393216 邊形得到 π 的精確到 10 位小數的近似值， 被認爲是當時西方最好的圓周率值。 韋達強調 10 進分數 (小數) 優於歐洲羅馬時代流傳下來的 60 進分數， 而且創造了一套 10 進分數表示法， 促進了記數法的改革。

1600 年， 韋達又發表一部關於阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 幾何作圖相切問題的專著。 該問題原意是： 任給三個圓形 (可以是點、 直線或圓)， 求作一個圓過給定的點並切於給定的直線或圓。 因爲求作一圓與已給的三個圓相切爲最難， 後人常以此代稱爲阿波羅尼奧斯相切問題。 阿波羅尼奧斯的原著已失傳， 解法也無從知曉。 韋達在此試圖收集已散失的論文， 並親自解了這道相切題。 他通過單獨處理該題 10 種特殊情形的每一種， 嚴格陳述了求解方法， 給出應用兩個圓相似中心的歐幾里得解法， 得到同時代數學家的讚賞。 他還在附錄中列舉解法的幾何構造及其註釋， 爲後人對這一問題的研究提供幫助。 當韋達解決了比利時數學家羅門提出的 45 次方程後， 作爲禮尚往來， 他把阿波羅尼奧斯問題回敬給羅門， 後來還幫助羅門化簡了這一問題的求解方法。 韋達用代數方法解決幾何問題的思想由笛卡兒繼承， 發展成爲解析幾何學。 韋達崇尚古代學者的功績， 認爲自己的工作只是用新的方法， 技巧或新的形式恢復古人的工作， 如使用字母、 方程求解等， 而對一些概念上的革新持冷漠態度。 他在研讀卡爾達諾有關三次方程的著作時借鑑了其中的解法， 卻對卡爾達諾解出的負根置之不理， 而且在自己的論著中自始至終不承認負根。 另外， 韋達對哥白尼的天文學理論抱有成見， 在格雷戈里十三世

(Pope Gregory XIII) 的曆法改革中堅持錯誤觀點， 與其他科學家進行了長期爭論。 但韋達在數學上的巨大成就引導了一大批後繼數學家。 他在《分析方法入門》的結尾寫下這樣一句座右銘 “沒有不能解決的問題”(Nullum non problema solvere)， 這不僅對代數學家是一種鼓舞， 而且對所有從事數學工作的人來說都是一種極大的鞭策。

文　　獻

原始文獻

[1] F. van Schooten, *Opera mathematica (F. Vièta)*, Leiden, 1646； Hildeshein (reprinted), 1970。

[2] F. Viète, *Introduction to the analytic art*, 見 D.J. Struik, *A source book in mathematics*, 1200-1800, Cambridge, Mass. Harvard Univ. Press, 1969, 74－81。

研究文獻

[3] F. Ritter, *François Viète, inventeur de l'algèbre moderne,* 1540－1603*, Essai sur sa vie et son oeuvre*, Revue Occidentale Philosophique Sociale et Politique, 2nd ser., 10(1895), 234－274, 354－415。

[4] H.L.L. Busard, *Viète, François*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 14, 1980, 18－25。

[5] F. Cajori, *A history of mathematics*, The Macmillam Company, 1924, 137－139, 143－144。

[6] M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, II, Leipzig, 1900； Stuttgart(reprinted), 1965, 582－591, 629－641。

[7] J. Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, Cambridge, 1968, 150－185, 253－285, 315－353。

[8] J. Grisard, *François Viète mathematicien de la fin du seizième siècle, Thèse de* 3^e *cycle*, École Pratique des hautes études, Paris, 1968。

[9] K. Reich & H. Gericke, *François Viète Einführung in die Neue*

Algebra Historiae scientiarum elementa, V, Munich, 1973。

[10] B.L. Van der Waerden, *A history of algebra from al–Khwārizmi to Emmy Noether*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985, 63－68。