卡 瓦 列 里

卡瓦列里，B. (Cavalieri，Bonaventura) 約 1598 年生於義大利米蘭；1647 年 11 月 30 日卒於義大利波倫亞。數學。

卡瓦列里之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cavalieri.html

卡 瓦 列 里

孫 宏 安

(遼寧師範大學)

卡瓦列里， B. (Cavalieri， Bonaventura) 約 1598 年生於義大利米蘭； 1647 年 11 月 30 日卒於義大利波倫亞。 數學。

卡瓦列里的出生年代是他的一個門生和傳記作者 U. 達維索 (d’Aviso) 提供的。 卡瓦列里很小的時候， 就加入了信奉聖奧古斯都教規的耶穌會宗教團。 1615 年， 他在米蘭獲得一個小教階的職務， 從此成爲一個虔誠的耶穌會士。 1616 年， 他在轉到比薩的耶穌會修道院任職。 在那裡， 他有幸結識了本篤會修士 B. 卡斯泰利 (Castelli)， 此人曾在帕多瓦師事 G. 伽利略 (Galileo)， 當時是比薩大學的數學講座主講人。 由於卡斯泰利的引導， 卡瓦列里開始研究幾何學， 並且很快就被歐幾里得 (Euclid)、 阿基米德 (Achimedes)、 阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 等人的經典著作所吸引。 在數學上， 他表現出非凡的才能， 受到卡斯泰利的重視。 1617 年， 卡斯泰利把卡瓦列里介紹給自己的教師伽利略， 此後卡瓦列里一直把自己看作伽利略的學生。 1618 年， 卡瓦列里曾臨時性地代替卡斯泰利在比薩大學主講數學， 說明他當時已具備了很高的數學水準。

1620 年， 卡瓦列里奉命到羅馬述職。 接著被委派到米蘭的聖吉羅拉莫 (Girolamo) 修道院教授神學， 一直到 1623 年。 在此期間， 他發展了關於不可分量方法的初步思想， 這是他的主要數學成果， 同時， 他進一步受到教會的倚重。 1621 年， 他被任命爲紅衣主教 F. 博羅梅奥 (Borromeo) 的樞機輔祭人， 這位主教非常敬

重卡瓦列里，經常與他探討數學問題，後來還寫信給伽利略，盛讚卡瓦列里。

1623 年，卡瓦列里被任命爲洛迪的聖彼得修道院的副院長，並成爲羅馬大主教錢伯利 (Ciampoli) 的朋友，後來，他的主要著作之一《用新方法促進的連續量的不可分量的幾何學》(*Geometria indivisibilis continuorum nova quadam ratione promota*，1635。以下簡稱《幾何學》) 就題獻給此人。1626 年，他被任命爲帕馬的耶穌會修道院的院長，他希望能同時擔任當地大學的數學主講人，但未能實現。1626 年秋，卡瓦列里在由帕馬去米蘭的旅途中患了痛風病，這種病使他備受痛苦並折磨了他一生。他在帕馬修道院工作到 1629 年。在這個期間，他始終堅持數學研究工作。1627 年 12 月 16 日，他興奮地寫信給伽利略和博羅梅奧，告訴他們他已經完成了《幾何學》一書。1628 年，卡瓦列里得知波倫亞大學的數學教授位置因擔任此職的天文學家 G. 馬古尼 (Magini) 去世而出缺，便寫信給伽利略，請他幫助自己得到委任。1629 年，伽利略寫信給受命爲波倫亞大學選擇一位新數學教授的 C. 馬爾西利 (Marsili)，說卡瓦列里 “是阿基米德之後在鑽研幾何學的深度和廣度方面絕無僅有的人才”。同時，卡瓦列里給馬爾西利寄去了《幾何學》一書的手稿和一篇關於圓錐曲線及其在透鏡中的應用的論文。1629 年，卡瓦列里得到波倫亞大學的首席數學教職，並在這個崗位上一直工作到去世。同時，他還被委任爲波倫亞女修道院的院長。

1635 年，他的《幾何學》一本書正式出版，立刻獲得了廣大的讀者，除了阿基米德的著作外，成爲研究幾何學中無窮小問題的數學家們引用最多的書籍。這是卡瓦列里主要學術著作之一，它的主要內容就是不可分量方法。全書共分爲 7 卷。第 1 卷闡述卡瓦列里關於平面和立體圖形的一些假設。第 2 卷引入了不可分量方法，並且證明了一些關於不可分量總體的一般定理，其

中包括有深遠影響的關於平行四邊形中的線段和組成它的三角形內線段關係的兩個定理， 它們對應著後來的 $a^2 = 2\int_0^a x\mathrm{d}x$ 和 $a^3 = 3\int_0^a x^2\mathrm{d}x$ 型的積分。 第 3、 4、 5 卷中主要是第 2 卷定理的應用 — 求與圓錐曲線有關的面積和體積。 第 6 卷主要探討與螺線有關的面積， 但也涉及到關於柱面、 球面、 拋物面和球體的一些結果。 第 7 卷中， 進一步闡述了不可分量方法的依據， 提出並證明了卡瓦列里原理。

1647 年， 卡瓦列里出版了他最後一部著作《六道幾何練習題》(*Exercitationes geometricae sex*)。 這是一部關於不可分量方法的重要著作。 在這部書裡， 他改進了《幾何學》中提出的不可分量方法， 並用這一方法處理了高於二次的代數曲線圍成的面積和旋轉成的體積問題， 證明了相當於

$$a^4 = 4\int_0^a x^3\mathrm{d}x \text{ 和 } a^5 = 5\int_0^a x^4\mathrm{d}x$$

的求積問題。

在波倫亞期間， 卡瓦列里共出版了 11 部著作。

卡瓦列里的主要學術成就是他的不可分量方法。 這一方法是微積分發展史上的一個重要環節。 雖然由現代微積學的定義來看， 是從有序的角度， 而不是從連續性或不變性的角度來規定微積分的， 但歷史地看， 它們又恰恰是由對連續性或不變性的直觀認識系統發展的結果。 因而， 微積分在其發展中始終與幾何或運動的觀點以及不可分量和無窮小量的解釋密切相關， 它們都是對連續性或不變性的直觀把握的產物。 實際上， 我們現在定義導數和積分的無窮序列， 是在思維中無限地縮小自變量的取值區間而後得到的。 這對應著歷史上人們對於物理學中導致原子論的種種設想加以數學的引證。 可以說， 恰如從事物的眞實分割 (看起來是連續的) 得到最小質點即原子一樣， 不妨認爲從連續的數學量 (通過思維中的連續分割) 就可以得到最小的可能區間即微分。 導數定義爲兩

個這種微分的商， 而積分則定義爲許多 (有限的或者無限的) 這種微分的和。 它們可以說是緣起於利用 “無窮小” 方法計算面積和體積的工作。

1. 歷史回顧

利用 “無窮小” 方法求積的思想可以追溯到古希臘的德謨克利特 (Democritus)， 他把自己的原子論思想引入數學， 認爲一個立體是由無數個平行於底的截面組成的。 柏拉圖 (Plato) 進一步闡述了 “無窮小量”， 歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus) 和阿基米德實際上還利用 “無窮小” 方法求出了若干幾何圖形的面積或體積。 不過古希臘人把符合直觀作爲數學證明的基礎之一， 他們沒有實無窮的觀念。 歐多克索斯和阿基米德採用的 “無窮小” 方法是一種不涉及無窮分割的方法。 其作法是： 爲證明一個幾何量 S (面積、 體積等) 等於一個給定的量 C， 利用圖形的幾何性質， 以分割法構造出兩個序列 $\{L_n\}$ 和 $\{U_n\}$， 使得對於所有的 n 都有

$$L_n < S < U_n \text{ 且 } L_n < C < U_n \text{。}$$

然後證明， 當給定 $\epsilon > 0$， 對足夠大的 n， 有

$$U_n - L_n < \epsilon \text{，}$$

或證明， 當給定 $\alpha > 1$， 對足夠大的 n， 有

$$\frac{U_n}{L_n} < \alpha \text{。}$$

無論哪一種情況， 最後都用歸謬法證明

$$S = C \text{。}$$

此即所謂窮竭法。 阿基米德用窮竭法求出了圓的面積、 球的體積和表面積、 橢圓和拋物弓形的面積、 一些旋轉體的體積等。

歐洲文藝復興後， 阿基米德的包括上述成果的著作被譯成拉丁文， 得到廣泛的流傳。 當 17 世紀的數學家們深入研究了阿基米德的著作， 充分領會窮竭法的思想之後， 他們深信， 阿基米德等古

希臘數學家必定還了解另一種更有效的研究方法， 用以具體求出前述那個給定的量 C ， 只用窮竭法是求不出 C 的。 卡瓦列里提出不可分量方法後， 有人 (如 E. 托里切利 (Torricelli)) 甚至指出， 阿基米德採用的似乎正是這種方法。

17 世紀數學家們的分析是相當正確的， 阿基米德的確發明並使用了另一種方法， 只是寫有這一方法的著作散佚， 使人們沒有見到他關於這一方法的論述。 1906 年 J. 海伯格 (Heiberg) 在土耳其的君士坦丁堡 (現名伊斯坦布爾) 的一家圖書館裡發現一古代手稿， 其中包括一封被認爲公元初就已散佚的阿基米德給埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 的信， 即著名的《 方法 》一書。 在這本書中阿基米德闡述了他的另一種方法： 按德謨克利特的思想， 認爲圖形是由許多微小量組成的， 如平面圖形是由平行於一條給定直線的許多截線段組成的， 立體圖形是由許多彼此平行的截面組成的； 把含未知量的圖形分解爲組成它的微小量， 然後再用另一組微小量 (線段或平面片， 其組成的總體的面積和體積爲已知或易於求出的) 來與它們作比較； 比較時應用了力學原理， 賦予所有的微小量以理想的重量， 於是幾何圖形就可看作是具有理想重量的重物， 再建立一個槓桿， 找一個合適的支點， 使前後兩組微小量取得平衡； 然後通過後一組微小量的總體， 通過比較求出未知量。 阿基米德把這種方法看作發現的方法 (找到定量 C) 而不是證明的方法， 由此得出的結論仍要用窮竭法加以證明 (證明 $S = C$)。 可以說阿基米德所求面積、 體積都是由這種方法開始的。 他的這些 “線元” 和 “面元” 是 “不可分量” 的前身。 但他的方法， 就事論事， 沒有建立一般的計算法則， 對每一問題都要從頭開始。

阿基米德對這一方法抱有很大希望。 不過他的方法並沒有被同時代人所理解， 並且被人們遺忘了許多世紀。 但對於 “不可分量”， 歷史上還時時有人研究。 例如十一世紀薩瓦蘇達 (Savasorda) 在其著作中就探討過不可分量； 在中世紀經院哲學家的論爭 — 更

多的是哲學論爭而非數學論爭中，不可分量也是一個經常論及的概念；L. 達文西 (da Vinci) 曾考慮過用無窮小量來求四面體的重心，他設想四面體是由無窮個平面片組成。J. 刻卜勒 (Kepler) 比較系統地用無窮小方法求面積和體積。在他的《測定酒桶容積的新方法》(*Nova stereometria doliorum vinariorum*，1615) 一書中，他求出 90 多種旋轉體的體積。刻卜勒的方法是把要求體積的立體劃分成無窮多個無窮小的部分，即立體的 “不可分量”，其大小和形狀都便於求解給定的問題。例如，他把球看成是由無窮多個小稜錐組成的，每個無窮小稜錐的頂點都在球心，底面在球的表面上，高等於球的半徑，從而得出球的體積是半徑與球表面積乘三分之一。

2. 卡瓦列里原理

卡瓦列里全面發展了求積的不可分量方法。他的方法依據於這樣一個原理：

如果兩個平面圖形夾在同一對平行線之間，並且爲任何平行於這兩條平行線的直線所截時截得的線段都相等，那麼這兩個圖形的面積相等；如果每條直線 (平行於上述兩條平行線的) 爲兩個圖形所截得的線段的長度都有相同的比，則兩個圖形的面積也成相同的比。

類似地，在空間，如果兩個立體圖形夾在兩個平行平面之間，並且爲任何平行於這兩個平行平面的平面所截時截得的平面片的面積都相等，那麼這兩個立體圖形的體積相等；如果截兩個立體所得的兩組截面中，每個給定平面所截得的兩個不同組的截面的面積都有相同的比例，則這兩個立體的體積也成相同的比。

從現代分析學的觀點看，就個原理所斷定的實際上是：如果被積函數相等，而且積分限也相等，那麼這兩個積分相等；被積函

數中的常數作爲一個因子可以提到積分號外面而不改變積分的值。

這一原理在西方是由卡瓦列里提出的，此後在數學中得到相當廣泛的應用。西方便稱之爲卡瓦列里原理。在中國古代，三國時的劉徽和南北朝時的祖沖之父子曾考慮過相同的原理，公元五－六世紀的的祖暅明確指出“緣冪勢既同，則積不容異。”其中冪指面積，勢指關係，積指體積。這句話的意思是“若兩立體的截面面積之間的關係處處相等，則兩立體的體積之間也必有同樣的關係”，顯然，這一原理包含卡瓦列里原理的基本內容，我們稱之爲“祖暅原理”或“劉祖原理”。

卡瓦列里採用多種方法來證明這一原理，這些證明都收入他的《幾何學》第 7 卷。其中的一個證明如下：

設夾在兩平行線 PQ、RS 之間的兩個任意平面圖形 ABC 和 XYZ 如圖 1 所示，DN 和 OU 是平行於 PQ、RS 的直線，且它們在兩圖形上的截線相等。即在 DN 上，$JK = LM$，在 OU 上，$EF + GH = TV$；進而在任何與 PQ 等距的直線上，在 ABC 和 XYZ 中截得的線段都相等。下面證明 ABC 和 XYZ 的面積相等。

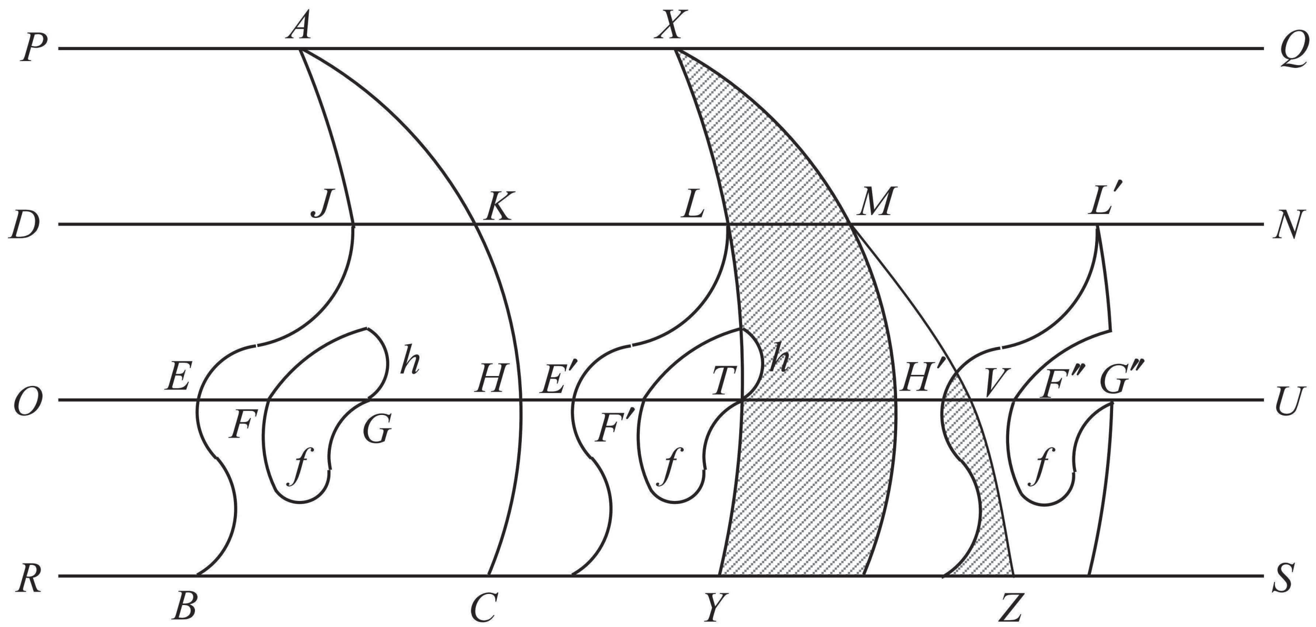

圖 1

任取兩圖形之一，不妨取 ABC，順平行線 PQ 、RS 平移到

另一個圖形 XYZ 上。 這時， 或者 ABC 與 XYZ 重合， 因而它們的面積相等， 則原理已證； 或者它們只有部分重合， 如圖中的 $XMC'YThL$。

現考察平移後兩圖形不完全重合的情況。 由於平移保持一直線在兩圖形上的截線的共線關係， 並且它們在平移前是相等的， 平移後， 它們仍然相等， 例如 $E'F' + TH' = TV$。 因而， 如果 $E'F' + TH'$ 不完全與 TV 重合， 則它們的一部分重合， 如 TH' 與 TH' 重合， 於是 $E'F' = H'V$ ， $E'F'$ 是平移後 ABC 未蓋住 XYZ 的部分， $H'V$ 是平移後未被 ABC 覆蓋的 XYZ 的部分。 同理可證， 對每條平行於 PQ 的直線在兩個圖形上的截線， 其未重合的部分 (如果有的話) 都是相等的。 即這一平移有如下性質： 若平移的圖形有一部分未覆蓋在另一圖形上， 那麼後者也一定有一部分未被覆蓋; 而且， 在平移之後， 兩圖形的未重合部分仍滿足原理的條件。

現在作第二次平移： 平移 ABC 未重合的部分， 使得 KL、 CY 落在 LN 、 YS 上， 則又有 $VB''Z$ 重合。 如前證可知， 二次平移後一個圖形仍未重合部分一定對應著另一圖形的仍然未重合的部分； 它們仍滿足原理的條件， 可以再順 RS 、 DN 平移， 又有新的重合部分和未重合部分， 就一過程可以一直進行下去， 一直進行到 ABC 與 XYZ 完全重合。 否則， 如某一圖形有一部分未與另一圖形重合， 則另一圖形也必有未重合的部分剩下。 如果 ABC 與 XYZ 重合， 則它們的面積相等 。 對立體的情況可仿此證明。

這一證明是巧妙而直觀的。 但也有一些弱點： 沒有證明按所採用的操作方法， 兩個圖形未重合部分一定是可窮竭的； 也沒有證明每次平移後圖形的未重合部分一定小於原來的圖形。 而且， 卡瓦列里在答復 P. 古爾丁 (Guldin) 的反對意見時聲稱， 在一個圖形中 (從而在另一個圖形中)“消除” 未重合部分的工作可以用無窮步運

算完成。

卡瓦列里的另一個證明是用古典的窮竭法作出的。 對滿足一定條件的圖形 (如兩圖形都是 “廣義的平行四邊形” 或能分解爲這種四邊形的圖形) 來說， 這一證明是嚴格的。

3. 不可分量方法

卡瓦列里把平面圖形看作是由平行的等距線段組成的， 把立體圖形看作是由彼此平行的、 等距離的平面片組成的。 這些線段就是平面圖形的不可分量而這些平面片就是立體圖形的不可分量。 卡瓦列里的具體方法是先建立兩個給定的幾何圖形的不可分量之間一一對應關係， 並且設法使對應的不可分量具有某種不變的比例， 當其中一個圖形的面積或體積已求出時， 就可用卡瓦列里原理求出另一個圖形的面積或體積。

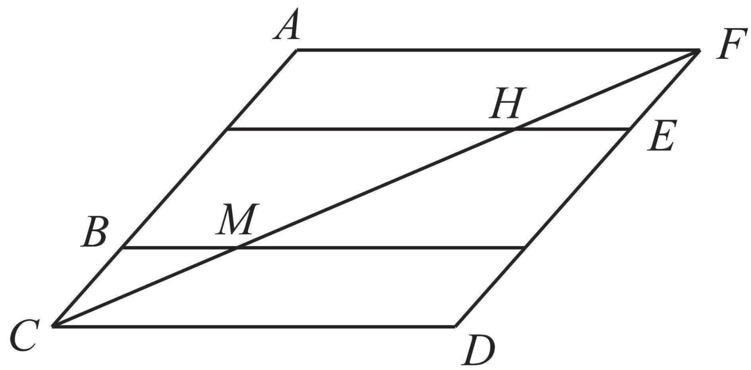

圖 2

利用不可分量方法， 卡瓦列里解決的典型問題是有關平行四邊形中線段和組成它的三角形中的線段關係的一些定理。 它們對後來的數學發展產生了深遠的影響。 一個基本命題是： 設平行四邊形 $ACDF$ (如圖 2) 被對角線 CF 分成兩個三角形 ACF 和 DCF， 則平行四邊形 (面積) 是每個三角形 (面積) 的兩倍。 卡瓦列里就樣證明： 先作 $EF = CB$， 再作 $HE//CD$、 $BM//CD$，則 $HE = BM$， 則 $\triangle ACF$ 中所有線段與 $\triangle DCF$ 中所有線段對應相等， 從

而兩個三角形相等，因而平行四邊形 $ACDF$ 中所有線段之和等於每個三角形中的和的兩倍。用類似的但有更大難度的方法，卡瓦列里進一步證明了平行四邊形內線段平方的和等於每個三角形內線段平方和的三倍。利用這一命題，易證圓錐的體積是其外接圓柱體積的三分之一，拋物線弓形是其外接矩形面積的三分之二等。這些都是阿基米德已得出的結果，但卡瓦列里採用統一的方法來處理，不僅使許多窮竭法勉強解決的問題，現在可以很方便地求解，如橢圓面積和球體積等，而且使認識深化，得出了更深刻的結果。卡瓦列里沿處理構成平行四邊形的線段的冪和組成平行四邊形的三角形內相應線段的冪的比，不斷前進：他已求出兩組線段之和的比爲 2：1；線段平方和之比爲 3：1；接著又求出兩組線段立方和之比爲 4 : 1；四次冪和之比爲 5：1 (在此基礎上他求出拋物線弓形繞其弦旋轉而成的立體的體積)；線段的五次冪和之比爲 6：1；六次冪和之比爲 7：1 等等；最後，兩組線段的 n 次冪和之比爲 $(n+1)$：1，即得出

$$\sum x^n = \frac{1}{n+1}\sum a^n \text{。}$$

按他的平面圖形由線段構成的思想，$\sum a$ 表示一個以 a 爲邊長的正方形的面積；類似地，$\sum a^2$ 表示一個以 $\sum a$ 爲截面 (以 a 爲邊長) 的正方體的體積，因而有

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}a^3\text{、}\sum x = \frac{1}{2}a^2\text{。}$$

類比於此，有 $\sum x^n = a^{n+1}/(n+1)$，其中 n 爲正整數，在此意義下，與現在用 $\int_0^a x^n \mathrm{d}x = a^{n+1}/(n+1)$ 表示的公式等價。卡瓦列里證明了 $n=3$ 和 $n=4$ 的情況，並驗證了 $n=5$、6、$\cdots$、9 的情況，$n=1$、2 的情況已爲阿基米德所證明，阿拉伯人已知 $n=4$ 的情況。卡瓦列里的工作是前人工作的推廣和統一化。雖然在卡瓦列里之前，P. 費馬 (Fermat) 和 G. 羅貝瓦爾 (Roberval) 用

別的方法也得到了這一結果，但 1639 年他第一個公開發表了這一公式，對 17 世紀無窮小分析的發展起了重要的推動作用。可以說這是在無窮小分析中指出更一般的代數運算法則的可能性的第一個定理。後來由牛頓和萊布尼茨提出而成爲積分學的基礎。

由此公式出發，卡瓦列里立即證明了在單位區間上，曲線 $y=x^n$ (n 爲正整數) 下的圖形面積爲

$$A=\sum_0^1 x^n=\frac{1}{n+1}\ ,$$

這個圖形圍繞 "弦" 旋轉而成的立體體積爲

$$V=\pi\sum_0^1 x^{2n}=\frac{\pi}{2n+1}\ 。$$

卡瓦列里極大地推進了不可分量方法，不僅把它視爲發現的方法，也試圖使它成爲證明的方法。這樣一來，就必須按數學證明的基本要求，使概念嚴格化，即產生了這樣一個問題：不可分量究竟是什麼？

卡瓦列里了解這一問題的複雜性，因而想建立一種獨立於數學基本要求的方法使得無窮概念是怎樣形成的，這種方法都是有效的。他甚至認爲，嚴格性是哲學的事，而不是幾何學的事。卡瓦列里沒有肯定連續量可以分解爲他並沒有給出明確定義的不可分的元素，他也沒有講請楚它們究竟是實在的還是潛在的無窮小量。

卡瓦列里從未解釋過沒有厚薄的不可分量是怎樣構成面積和體積的，但在許多場合，他曾把不可分量方法和運動的觀點聯繫起來，認爲面積和體積可以看作是由不可分量的運動產生出來的。不過他並沒有將這種有啓發性的觀點發展成爲幾何方法，這一點爲他的後繼者 E. 托里切利 (Torricelli) 所實現，結果產生了 I. 牛頓 (Newton) 的流數法。卡瓦列里的不可分量在 J. 沃利

斯 (Wallis) 的《無窮算術》(*Arithmetica infinitorum*， 1655) 中有所應用， 在牛頓和 G. 萊布尼茨 (Leibniz) 的數學思想中也有所反映， 如前者的 "瞬" 概念和後者的 "微分" 概念中就有不可分量的影子。 卡瓦列里的思想， 對微積分的發展起了巨大的啓發作用。

當然卡瓦列里的不可分量方法與微積分尚有較大的距離， 主要表現在： (1) 沒有極限概念； (2) 沒有採用代數或算術方法， 而它們是定義微積分的前提之一； (3) 過於強調面積和體積的比而不是直接求積。 與阿基米德相比， 卡瓦列里在求積方法的統一性上邁出了決定性的一步； 與牛頓、 萊布尼茨相比， 卡瓦列里可以說是他們的直接前驅之一。 因而， 卡瓦列里的工作是由古希臘人的方法向現代微積法過渡的一個不可缺少的環節。 正如萊布尼茨在給 G. 曼弗雷迪 (Manfredi) 的一封信中所說："幾何學中的卓越人物、 完成了這一領域中義勇軍任務的開拓者和倡導者是卡瓦列里和托里切利， 後來別人的進一步發展都得益於他們的工作。"

4. 其它成就

卡瓦列里在《幾何學》第 1 卷中給出了一個用幾何形式表示的微分平均值定理， 後來就稱爲卡瓦列里定理。

卡瓦列里將 J. 納皮爾 (Napier) 創建的對數方法引入義大利並在三角學、 應用數學中作了有價值的發展。 如在《一百個不同的問題》(*Centuria di varii problemi*， 1639) 一書中討論了由兩數的對數求其和、 差的對數的方法， 這是後來許多數學家包括 C. 高斯 (Gauss) 都進行過研究的問題。

卡瓦列里還探討了古希臘人二次曲線理論的起源及其在透鏡和聲學中的應用， 進而產生構造反射望遠鏡的思想， 按 G. 皮奧拉 (Piola) 與 A. 法瓦羅 (Favaro) 的說法， 他的這種思想早於 D. 格雷戈里 (Gregory) 和牛頓。 卡瓦列里還給出了非平坦球面透鏡焦距

的計算方法； 解釋了關於阿基米德以鏡子聚焦致燃的傳說。 在聲學領域中， 卡瓦列里嘗試進行了 P. 維特魯維厄斯 (Vitruvius) 共鳴瓶考古重建工作， 並用在大劇院裡以放大聲音。 在《幾何學》和《六道幾何練習題》中卡瓦列里還給出了採用射影線束來畫二次曲線的方法， 可以認爲是 J. 施泰納 (Steiner) 的工作的先驅。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Cavalieri, *Directorium generale uranometricum*, Bologna, 1632。

[2] B. Cavalieri, *Lo specchio vstorio ouero Trattato delle settioni coniche*, Bologna, 1632； 2nd ed., 1650。

[3] B. Cavalieri, *Geomtria indivsibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna, 1635； 2nd ed., 1653 (英文節譯, 見 D. Struik, *A Source book in mathematics*, Harvard University Press, 1969, 209－213)。

[4] B. Cavalieri, *Compendio delle regole dei triangoli con le dimostrationi*, Bologna, 1638。

[5] B. Cavalieri, *Centuria di carii problemi*, Bologna, 1639。

[6] B. Cavalieri, *Nuova pratica astrologica*, Bologna, 1639。

[7] B. Cavalieri, *Tavola prima logaritmica, Tavola seconda logaritmica, annotationi nell'opera, e correttioni de gli errori piu notabili*, Bologna, n.d.。

[8] B. Cavalieri, *Appendice della nuova pratica astrologica*, Bologna, 1640。

[9] B. Cavalieri, *Trigonomertia plana, et sphaerica, linearis et logarithmica*, Bologna 1643。

[10] B. Cavalieri, *Trattato della ruota planetaria perpetua*, Bologna, 1646。

[11] B. Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, Bologna, 1647 (英文節譯, 見 D. Struik, *A source book in mathematics*, Harvard University Press, 1969, 214－218)。

[12] U. d'Aviso, *Vita del P. Buonaventura [sic] Cavalieri, in the book Tratto della sfera*, Rome, 1682。

[13] G. Piola, *La vie di Bonaventura Cavalieri*, Milan, 1844。

[14] A. Favaro, *Bonaventura Cavalieri nello studio de Bologna*, Bologna, 1885。

[15] C.B. Boyer, *The concepts of the caculus*, Hafuer Publishing Company, 1949 (中譯文： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。

[16] G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, milan, 1962, 43－53。

[17] G. Cellini, *Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bon- aventura Cavalieri, Periodico di Matematiche*, 44(1966), 4, 1－21。

[18] C.H. Edward, *The historical development of the calculus*, Springer Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

[19] K. Andersen, *Cavalieri's method of indivisibles, The Archive for History of Exact Sciences*, 31 (1985), 292－367。