沃　利　斯

沃利斯，J. (Wallis，John) 1616 年 11 月 23 日生於英國肯特郡 (Kent) 阿西福特村 (Ashford)；1703 年 10 月 28 日卒於牛津。數學。

沃利斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Wallis.html`

沃　利　斯

侯　德　潤

(徐州師範學院)

沃利斯，J. (Wallis，John) 1616 年 12 月 3 日生於英國肯特郡 (Kent) 阿西福特村 (Ashford)；1703 年 11 月 8 日卒於牛津。數學。

沃利斯的父親是一位牧師，1603 年前後擔任阿西福特村的聖餐禮執行者。沃利斯是他第二個妻子 J. 查普曼 (Chapman) 的第三個孩子。

沃利斯年僅六歲時，父親就因病去世。在母親的照顧之下，他在 1625 年進入肯特郡坦特登 (Tenterden) 村的一所文法學校，接受了拉丁文的完善的訓練。1631－1632 年間，他又就讀於埃塞克斯 (Essex) 郡菲斯台德 (Felsted) 村的馬丁·霍爾拜克學校。除了進一步學習拉丁文和希臘文以外，還學過一點希伯來語以及邏輯學原理。1632 年聖誕節前後，作爲一個自費生進入劍橋的伊曼紐爾 (Emanuel) 學院攻讀傳統的大學課程，1637 年獲得文學學士學位。他在劍橋期間，鑽研過神學、物理學、解剖學、天文學及地理學。1640 年獲得文學碩士學位，然後擔任溫徹斯特 (Winchester) 的主教職務。爲了謀生，他還曾在倫敦當過幾年私人牧師和聖餐禮執行者。1644 年當過威斯敏斯特牧師協會的秘書，並擔任劍橋大學女王學院評議員約一年。1645 年與蘇珊娜·格利得 (Susanna Glyde) 結婚，婚後放棄了評議員職位。

1649 年 6 月 14 日，沃利斯出人意料地被委任爲牛津的薩維爾 (Savilian) 幾何教授，他保持這一職位直到去世。1654 年，他被授予神學博士學位。在當時，幾乎沒有什麼人能預見在以後的不

多幾年內，一個年輕的神學家能成爲他那個時代的領頭數學家之一。

擔任薩維爾教授的前二十年是沃利斯一生中最富有創造力的一個時期。以後他就逐漸轉向編輯校訂其他科學家的著作和他自己的早期著作，以及準備歷史的和神學的講演。按照他所擔任的講座主席一職的規定，沃利斯必須對歐幾里得 (Euclid) 的《原本》(*Elements*)，阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 的《圓錐曲線論》(*Conics*) 以及阿基米德 (Archimedes) 的所有著作作公開講演。他以一種罕見的精力和堅韌性對於在牛津的薩維爾和波得蘭圖書館中可以得到的一切重要數學文獻都進行了系統的研究。他的講演的成果之一是他的《一般數學，或算術》(*Mathesis unversalis*，*seu opus arithmeticum*，1657) 一書，該書強調有一種建設性的、統一的符號體系的巨大優越性。

沃利斯一生著述頗豐。1648 年，他在 W. 烏特勒 (Oughtred)《數學入門》(*Clavis mathemticae*) 一書的基礎上，整理出《角截線論》(*Treatise of angular sections*)，於 1685 年出版。1655 年，他出版了《圓錐曲線》(*De sectionibus conicis*) 一書，在該書中，他拋棄了傳統的綜合法，用 R. 笛卡兒 (Descartes) 引進的解析方法來處理這一經典主題，這在當時屬於一種新的方法。1656 年，他發表了他的代表作《無窮算術》(*Arithmetica infinitorum*)，因而作爲一個數學家享譽四方。該書來自對 E. 托里切利 (Torricelli) 的《幾何運算》(*Opera geometrica*，1644) 的深入研究。1659 年，他寫了《論擺線及蔓葉線》(*Tractatus duo $\cdots$ de cycloide et $\cdots$ de cissoide*)，將他所熟悉的解析法又往前推進了一步。1669 − 1671 年，他發表了長篇巨著《力學，或關於運動的幾何學》(*Mechanica sive de motu tractatus geometricus*，下簡稱《力學》)。該書第一部分用嚴格的幾何方法，即歐幾里得的方法討論了各種不同形式的運動，一開始先下定義，繼之以許多命題。第二部分是該書的

主要部分，討論了有關計算重心的問題。第三部分中，他不僅根據古代的傳統討論了簡單機械，更重要的是詳細探討了振動中的幾個問題，研究了彈性與非彈性物體的特性。該書在力學問題的數學化方面，取得重大進展。1685 年，他發表了《論組合、交錯與整除部分》(*Discourse of combinations*，*alternations*，*and aliquot parts*) 一書，討論了數論中的一些問題。這是他在《無窮算術》發表後，爲了回答 P. de 費馬 (Fermat) 等法國數學家的挑戰而寫的，其解決問題的程序和他在《無窮算術》中所用的有相似之處。

沃利斯的最後一部數學著作是《歷史的和實用的代數學》(*Treatise on algebra*，*both historical and practical*，1685)。這本書寫於 1673 年，但一直到 1685 年才用英文出版。它是第一本嚴格地敍述英國數學史的著作，首次把有關代數學的的詳盡評論和它的歷史聯繫起來。全書分 100 章。開始 14 章追溯了直至 F. 韋達 (Viète) 爲止的代數的歷史，重點討論數字記數法的發展。第 15 – 63 章是實用代數學。幾乎全是基於烏特勒的《數學入門》、T. 哈里奧特 (Harriot) 的《實用分析藝術》(*Artis analyticae praxis*) 和《代數學引論》(*An introduction to algebra*) 等書。第 64 – 72 章是代數問題的幾何表示法，包括虛數的一種幾何表示法。在最後 28 章，他專門研究了窮竭法和不可分量法的問題，同樣和《無窮算術》有關。這本書還包括無窮級數方法的解釋，以及 I. 牛頓 (Newton) 的一些開拓性成果。

沃利斯的創造性精神表現在很多方面。他在《無窮算術》中，根據一個大膽而聰明的插入程序，得出了他的著名結論

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots$$

儘管這個方法不爲諸如費馬和 C. 惠更斯 (Huygens) 等大數學家所接受，但結果還是被數字計算證實是正確的。沃利斯的主要興趣不在於演示算法，而在於深入研究其思想。他實際上是在求如下積

分的值：

$$\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}dx = \frac{\pi}{4}，$$

他考察廣義積分

$$I(k,\ n) = \int_0^1 (1-x^{1/k})^n dx，$$

它的倒數是 $1：I(k,\ n)$。沃利斯首先把 k 和 n 的整數值列成表 (依照對稱的二項式係數排列)，然後對分數 $k = \frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、$\cdots$ 列表，因爲當 $k = n = \frac{1}{2}$ 時，這個積分值應該爲 $1：I(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi}$，他用符號 □ 表示。於是在 □ 處相交的每行或列的第二個值是 □ 的某一分數倍。假設在他的表裡，所有的行數和列數不斷增加，沃利斯就能分別推導出 □ 的上限和下限的兩個數列。當這兩個數列無限增加時，就可得出著名的無限積。

沃利斯的揷值法是以連續性的設想爲依據的。這似乎和他過去所熟悉的破譯密碼的程序有關。爲了保持這種連續性和由此得出的表格中的數學基本規則，沃利斯走向了極限。他承認

$$A \cdot \frac{0}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

型的分數倍數，認爲 A 在此處必須是無窮大，這樣得出來的乘積值才可能是個有限數。

在《無窮算術》及《力學》等書裡，還記錄了其它有關這一方面的更傑出的成果。例如，可通過代換 $x \to y^k$，把積分 $I(k,\ n)$ 轉換成 β 積分的標準形式。沃利斯不久後就用解析法得出了橢圓弧長的積分，並將其化作橢圓積分。更重要的是，他掌握了與傳統的幾何觀點形成對比的分析觀點。

牛頓於 1664 – 1665 年冬研究《無窮算術》時，深受該書的影響。牛頓將積分 $I(k, n)$ 的上限定為可變的，於是用沃利斯的插值程序得出了二項式定理。在一些例子中，二項展開式可以由代數除法和開方求根法進行檢驗。但是，如同沃利斯乘積的情形一樣，只有待數學方法進一步發展後，才能得到嚴格的證明。

沃利斯是第一個用幾何方法解釋虛數的數學家。他在《歷史的和實用的代數學》一書第 66 – 68 章中詳細闡述過這個問題。他認為，雖然要使任何一個實數的平方成為負數是不可能的，但正如人們曾一度認為負數是不可能的一樣，只要正確理解新數，並賦予其合理的解釋，那麼，新的數就既不是無用的，也不是荒謬的。他仿照對負數的解釋方法，提出既然從一條直線上的某一定點出發，規定一個方向為正，另一個方向為負，那麼也可以把同樣的情況推廣到平面。他舉例說，如果圍墾海灘以獲得土地，在一個地方獲得 30 英畝，另一個地方損失 40 英畝，則整個獲得了 -10 英畝，即 -1600 平方杆。如果這塊地是正方形的，則其邊長為 $\sqrt{-1600}$ 杆，這樣就得出了虛數。為了用幾何方法表示虛數，他先解釋說當 b、c 是正數時，$\sqrt{bc}$ 表示 b、c 的比例中項，因此 $\sqrt{-bc}$ 可表為 $+b$ 和 $-c$ 或 $-b$ 和 $+c$ 之間的比例中項。既然可以用有向線段來表示正負數，就可以用作圖表示比例中項的辦法來表示虛數。雖然沃利斯提出的方法是繁瑣的，遠不如以後由 C. 韋塞爾 (Wessel) 和 J.R. 阿爾岡 (Argand) 提出的方法更易於為人們所接受，但是沃利斯的思想是積極的。

關於負指數和分指數的概念，N. 奧雷姆 (Oresme，1360)、N. 許凱 (Chuquet，1484)、M. 史蒂費爾 (Stifel，1544) 和 A. 吉拉爾 (Girard，1629) 已有不同程度的認識，但真正把這一主題推廣到有理數指數的，還是沃利斯。他在《無窮算術》命題 106 中，所舉的例子便給出指數運算規則：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}。$$

這裡的 m 、 n 包括正整數和負整數。 在《歷史的和實用的代數學》中， 他把牛頓在 1665 年和 1671 年兩次研究過的將二項式定理推廣到分數和負數的情形加以詳細闡述。 他指出， 在 $(a+b)^m$ 中， 如果 m 是正整數， 其展開式的係數呈對稱形式並終止於 1；但如 m 是分數或負數， 則其展開式將是一個無窮級數， 展開式的項數越多， 它的值就越接近於所要求的值。

1645 年前後， 沃利斯參與創建了皇家學會這一重要學術團體， 當時他住在倫敦， 結識了一群熱衷於 “新哲學” 或 “實驗哲學” 的科學家。 這對沃利斯後來從事的許多科學工作具有極重要的意義。 他們當中的一些人約定， 每週聚會一次， 討論哲學問題和物理、 解剖、 幾何、 天文、 航海、 統計、 磁學、 化學、 力學等自然科學問題， 以及血液循環、 彗星的實質、 木星的衛星、 太陽斑、 月的盈虧、 空氣的比重、 生理慾望及其機能、 重物下落及其加速度等大自然中的現象。 1648 − 1649 年， 這些人中的一部分包括沃利斯轉移到牛津， 並繼續這樣的聚會， 把這些研究變成那兒的熱門主題。 隨若干博學多才、 德高望重的新成員的加入， 隊伍逐漸龐大， 並以皇家學會爲名組成團體。 十七世紀八十年代， 沃利斯當選爲該學會的主席， 努力使它與蘇格蘭的一些類似團體之間建立密切的聯繫。 倫敦皇家學會的秘書 H. 奧爾登伯格 (Oldenburg) 首先創辦了《哲學會會報》(*Philosophical Transactions*)， 從而提供了一種較個人聯繫和每週討論一次這種形式長遠得多的科學交流手段。 沃利斯充分利用了《會報》， 並於 1666 年至 1702 年間發表了近 60 篇論文和書評。 評論所涉及的是數學書籍， 而論文的內容遠爲廣泛。 作爲皇家學會早期成員中一個重要科學家， 沃利斯還爲推動學會發展作出了積極的努力。 在多數學者對所進行的科學實驗及其背後的複雜理論並未眞正理解的情況下， 沃利斯實屬鳳毛麟角。

在數學以外的許多其它領域中， 沃利斯也展示過聰慧才華。 早

在青年時代，他就爲議會黨人破譯被捕獲的密碼字母提供過有價值的服務。以後許多年，他都繼續爲政府做這項工作，並在進入老年時把這門技術傳授給他的孫子 W. 布萊恩柯威 (Blencowe)。但是當 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 爲了自已的政府，要求他提供這方面的信息時，他卻嚴守秘密，拒絕作答。他還是一位優秀的檔案資料保管員，1657－1658 年在牛津大學被選舉擔任這一職務，並保持終身。他把歸他保管的、屬於大學的文獻及其它資料安排得井井有條，以至像 R.L. 普爾 (Poole) 這樣成功的保管員也稱讚他說："他在檔案宗卷上以無數副本的形式留下了他的痕跡，更重要的是在 1664 年，他根據吐恩 (Twyne) 先生列的表制定了全部藏書的標準目錄，一直沿用至今。" 實際上，沃利斯所制定的編目分類法一直用到二十世紀。

在語言學方面，他的最成功的著作是《英國語言文法》(*Grammatica linguae anglicanae*)，附以一篇論文 "實用語法"(*Paraxis grammatica*) 及另一篇關於語言發聲成因的論文。"論語言"(*De loguela*)。該書初版於 1652 年，第六版於 1765 年在英國出版，在歐洲大陸上也出版過這部著作。他在語言學方面的研究爲他教聾啞人說話的先驅性嘗試奠定了一套有用的理論基礎。

雖然他不是職業音樂家，但也寫出了一些關於音樂理論的論文，刊登在《哲學會會報》上，例如，他寫過一篇報告他對和弦顫動的觀察的論文，還作過關於音階間隔及由此而產生的在調整風琴或其它鍵盤樂器時所需要的平均律的數學討論。在爲托勒密 (Ptolemy) 的《和聲》(*Harmonics*) 作的一篇附錄裡，沃利斯試圖解釋古代音樂 (他用現代音符把它們翻譯過來) 所具有的那種驚人的效果，並在另一篇單獨發表的論文裡討論過這些效果。他還爲 T. 塞蒙 (Salmon) 的《關於用完美的、數學的比例方法演奏音樂的建議》(*Proposal to perform musick，in perfect and mathematical proportions*，1688) 一書撰寫過長篇評論。

從 1690 年到 1692 年期間，沃利斯接連發表了八封信和三篇關於聖三位一體的教義的佈道，矛頭直接指向唯一神教派的教徒們。爲了解釋這個教義，他從數學中引用了一個類比：一個有著長、寬和高三維的立方體類似於這個神秘的三位一體。他說："長、寬、高統一在一個體裡面，一個立方體具有這三維，實爲一體。同樣，聖父、聖子、聖靈，雖爲三者，實爲一個上帝。" 沃利斯關於三位一體的論證獲得了神學領域贊同。他的佈道及其它神學著作常因其通俗明朗的語言而倍受稱道。

沃利斯的一生都是精力旺盛的。他才力超群，以善於公開辯論而著稱。他具有一種非常好爭論的性格，多次捲入狂烈的爭辯。他總是津津樂道地鼓吹自己的成就，並喜歡借用別人的思想，使之進一步發展，但卻總是不承認前輩給他的好處。更糟的是，他經常發脾氣，以對批評容忍不了的態度來還擊別人的批評。和他爭論最厲害的是 T. 霍布斯 (Hobbes)，他們的爭吵持續了近四分之一個世紀之久。這一方面固然是由於霍布斯數學知識的淺薄，聲稱已解決了數學史上的重大難題 "倍立方" 問題和 "化圓爲方" 問題，更重要的是他竟敢批評沃利斯的《無窮算術》。這場爭吵逐漸惡化成惡意的敵視，最後以 1679 年霍布斯的去世而告終。儘管如此，沃利斯還是有不少忠實的朋友，例如 T. 史密斯 (Smith)、牛津的瑪格達萊 (Magdalem) 學院副院長和倫敦科頓圖書館的管理員以及 S. 佩皮斯 (Pepys)，後者曾請人給沃利斯繪過一幅肖像置於牛津大學。

沃利斯是他那個時代的最有才能和最有獨創精神的數學家之一，也是牛頓在英國的直接前輩之一。他推動英國數學界的發展長達半個多世紀。在這段時間中，他爲了促使數學在英國能享有與在歐洲大陸相同的顯赫地位而作出了極大努力。正因爲有了沃利斯的準備工作和牛頓的天才，才使數學研究的中心從法國和荷蘭轉移到英國，並保持了一段時間。後來通過萊布尼茨、伯努利家族

和 L. 歐拉 (Euler) 的努力， 這個中心才又移回歐洲大陸。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Wallis, *Opera mathematica*, 3 vols, Oxford, 1693－1699。

[2] J. Wallis, *Operum mathematicorum pars prima and pars secunda*, 1657。

[3] J. Wallis, *A defence of the royal society, and the philosophical transaction, particularly those of July* 1670*, in answer to the Cavils of Dr. William Holder*, London, 1678。

[4] J. Wallis, *Treatise of algebra, both historical and practical*, London, 1685。

研究文獻

[5] J.F. Scott, *The mathematical work of John Wallis, D.D., F.R.S., (*1616－1703*)*, London, 1938。

[6] G.J. Scriba, *Studien zur Mathematik des John Wallis (*1616－1703*)*, Winkelteilungen, Kombinationslehre und zahlentheoretische Probleme, Wiesbaden, 1966。

[7] L. Morel, *De Johannis Wallisii grammatica linguae anglicancae et tractatu de oguela thesis*, Paris, 1895。

[8] M. Lehrert, *Die Grammatik des englischen Sprachmeisters John Wallis (*1616－1703*)*, Wroclaw, 1936。