關 孝 和

關孝和 (Seki， Takakazu Shinsuke) 1642 年 3 月生於日本江戶 (今東京) 小石川， 另一說法是 1637 年生於日本上野國 (今日本群馬縣) 藤岡；1708 年 12 月 5 日卒於江戶 。 數學 、 天文曆法 、 數學教育 。

關孝和之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Seki.html`

關 孝 和

吳 培

(北京電子科技學院)

關孝和 (Seki， Takakazu Shinsuke) 1642 年 3 月生於日本江戶 (今東京) 小石川， 另一說法是 1637 年生於日本上野國 (今日本群馬縣) 藤岡； 1708 年 12 月 5 日卒於江戶。 數學、 天文曆法、 數學教育。

關孝和， 姓關名孝和， 又名新助， 字子豹， 號自由亭 (另說號自由)。 其父內山永明， 本姓安間， 後來做了自己外祖父的養子而改姓內山， 並且與養父一起在大納言 (官名， 相當於副首相) 駿河忠長處供職。 1632 年大納言被幽禁在上野國高崎， 永明也到上野國藤岡隱居， 1639 年又被召到江戶供職， 全家移居江戶。 因此對孝和生於上野國還是生於江戶的問題， 和算史家有爭議。

孝和有一兄二弟。 兄名永貞， 繼承父職， 後又成爲 “支配勘定”(主管測量的官)。 弟永行以醫爲業， 小弟永章在德川綱重處任職。

孝和後來做了一位姓關的武士的養子而改姓關並繼承關氏家業。 他曾做過甲府宰相德川綱重及其子德川綱豐家的勘定吟味役 (相當於會計檢查官)。 1704 年 12 月， 綱豐成爲五代將軍德川綱吉的養子而進江戶城的西之丸， 孝和也隨之成爲幕府直屬的武士， 官至御納戶組頭 (御納戶是日本江戶時代管理衣服、 用具的官職)， 直到 1706 年 11 月退職。 1708 年 12 月 5 日病逝， 葬於江戶的牛込七軒寺町 (今東京新宿區弁天町) 淨輪寺。 謚號法行院宗達日心居士。

孝和一生無子， 收其兄永貞的兒子新七爲養子。 新七繼承關家

的家業在甲府任職。但由於他品行不端又得罪官府，很快就被沒收家祿，斷絕關家功名而衣食無著，後寄食於孝和的高徒建部賢弘家中，直到去世。關家由此斷後。

關孝和自幼聰明異常，尤其擅長計算。據說六歲時就能指出大人計算中的錯誤，人稱“神童”。他曾拜日本數學家高原吉種爲師，也有資料說他是自學成才。他一生勤於鑽研又知人善教，創立了和算的一個最大的流派 — 關流。他的研究成果奠定了和算的基礎，被日本人尊稱爲“算聖”。

學術研究

關孝和著作很多，近二十部，但生前只出版過一部《發微算法》(1674)，死後又由其弟子對他的遺稿作了整理，出版了《括要算法》，其餘均爲未出版的稿本。從這些著作的寫作時間來看，孝和的數學研究工作可分爲兩個階段，他的數學著作基本上是在 1685 年以前完成的，以後因體弱多病而較少進行新的數學研究，只寫了一些天文曆法方面的註釋書。下面介紹他的主要貢獻。

1. 引入“傍書法”和代數記號而創立了“演段術”

這即是關孝和的最大貢獻。主要集錄於他的著作《發微算法》(1674) 以及《三部抄》中的《解見題之法》和《解伏題之法》(1683)。在《發微算法》中，孝和運用演段術對日本數學家澤口一之 (有資料說澤田一之是孝和的弟子) 的《古今算法記》(1671) 的十五道“遺題”作了分析和解答。但書中只有結果而把有關演段術的記述略去了，所以當時的日本人對他的解答一般都看不懂，於是就有人指責說《發微算法》可能是關孝和胡編亂造的。1680 年，日本數學家佐治一平竟寫成《算法入門》指出《發微算法》中

解法的 “錯誤” 並給予 “訂正”。 作爲對此類問題的答復， 孝和的弟子建部賢弘寫成《發微算法演段諺解》(1685) 公諸於世， 對孝和的演段術作了詳細解說， 使之傳播開來。

孝和又在《三部抄》中闡述了 “傍書法” 和演段術 。《三部抄》是《解見題之法》、《解隱題之法》(1685) 和《解伏題之法》(1683) 三部著作的總稱。 見題是只用加減乘除即可以解答的問題， 隱題是只用一個方程就可以解答的問題， 伏題是必須用兩個以上方程組成的方程組才能解答的問題， 這也是三部著作各自名稱的來歷 。《解見題之法》中首次出現傍書法表示的式子。 所謂傍書法即在一條短豎線旁邊寫上文字作爲記號來表示數量關係的一種方法。 例如 “甲加乙”、“甲減乙”、“甲乘乙” 分別寫成 “$|\text{甲}\,|\text{乙}$”、“$|\text{甲}\nmid\text{乙}$”、“$|\text{甲乙}$”； 甲^2、甲^3、甲^4、... 依次寫成 “$\left|\begin{array}{c}\text{甲}\\\text{巾}\end{array}\right.$”、“$\left|\begin{array}{c}\text{甲}\\\text{再}\\\text{巾}\end{array}\right.$”、“$\left|\begin{array}{c}\text{甲}\\\text{三}\end{array}\right.$”， ... ， 巾是冪的簡略寫法；“甲開平方” 寫成 “$\left|\begin{array}{c}\text{甲}\\\text{商}\end{array}\right.$”。 數字係數多使用籌式數字， 如 “3 甲” 寫成 “$|||\,\text{甲}$”，“-12 乙” 寫成 “$-\,\nmid\!\!\parallel$ 乙”， 後來也變爲直接寫 “$\left|\begin{array}{c}\text{甲}\\\text{三}\end{array}\right.$”、“$\nmid\text{乙}\ \begin{array}{c}\text{十}\\\text{二}\end{array}$” 等。 除法在孝和的著作中沒有出現， 後來的 “點竄術” 中將 “甲 ÷ 乙” 記爲 “乙 | 甲”。

孝和就用上述一套符號來處理文字方程， 比如方程

$$\text{甲} - \text{乙} \times x + \text{丙} \times x^2 + \text{丁} \times x^3 = 0$$

表示爲

$$|\text{甲}\quad \nmid\text{乙}\quad |\text{丙}\quad |\text{丁}\text{。}$$

如果一個方程有兩個未知數， 如

$$3y^3 + 5xy^2 + 8x^2y + 4x^3 = 0\text{，}$$

就用 “甲” 代替 y， 整個方程表示爲

甲 再三 巾	甲 五 巾	甲 八	四。

由於 “傍書法” 可以表示含有兩個或者多個未知數的方程， 因而 “消元” 就有了可能， 這使得孝和能夠用消元法解方程組， 從而得出了他的行列式理論。 這些內容集中在《 解伏題之法 》中。 書中介紹了一系列以傍書法爲基礎的算法， 他稱之爲 “天元演段術”， 後來又擴展爲 “歸源整法”。 這一系列的算法傳到孝和的第二代弟子松永良弼時， 良弼又受其主君內藤政樹 (1703 − 1766， “關流” 和算家) 之命將 “歸源整法” 更名爲 “點竄術”。 點竄術就是用上述的傍書法系統地研究公式變形、 解方程 (組) 、 行列式等問題， 內容相當於現在的初等代數學。 但由於這種代數學不同於西方代數中用 a 、 b 、 c 、 ... 作爲記號而採用漢字加短豎線作爲記號， 因而不僅是日本的而且是整個漢字文化圈內的文化財富， 是具有東方風格的符號代數。

2. 提出代數方程變換理論和行列式理論

這一研究集中在《 解伏題之法 》中。 書中介紹的方程變換的方法有： 略 、 省 、 縮 、 疊 、 括等。 把一個方程乘以某一式後從另一方程中減去， 稱之爲 “略”； 一個方程各項有公因式的就將此公因式約去， 稱之爲 “省”； 各項有共同的數字係數 (他稱之爲 “段數”) 時就約去這個公因數， 他稱之爲 “約”， 兩個方程中都不含未知數 x 的奇次冪時， 就用換元法把 x^2 作爲一個未知數從而簡化方程， 稱之爲 “縮”； “疊” 是兩個方程分別乘以適當的式子再相減以消去某些項； “括” 是把相同次冪的係數合起來， 即合併同類項。 孝和的演段術在這些方法中得到了明確表示。

他用這些方法解方程組的基本思想是，將兩個二元方程經過上述變換消去一個未知數，得到一個一元方程，再解這個一元方程。對於二元高次方程組 (設兩個方程關於 x 的次數分別是 m 和 n、$m \geq n$，這時方程中每一項中 x 的冪的係數都是另一個未知數 y 的多項式)，爲達到一次消元的目的，他先用疊、括方法從原來的兩個方程中導出 n 個關於 x 的 $n-1$ 的次方程，這些方程都寫成標準形式，即方程右邊爲 0，左邊按 x 的升冪排列，他稱這 n 個方程爲 “換式”。於是求解原方程組的問題就轉化爲求解由換式構成的方程組了。將這個方程組的各項中 x 的冪去掉，得到各項係數 (y 的多項式或單項式) 按原來的位置次序構成的行列式，令這個行列式等於 0，得到的這個行列式表示出的關於 y 的方程即是原方程組消去 x 後得到的一元方程。這樣，解原方程組的問題就轉化爲解這個一元方程的問題。

爲了對這個含有行列式的方程化簡、求解，他接著對行列式進行變換。他的行列式理論就是由此引出的，他在書中介紹了兩種計算行列式值的方法：逐式交乘法和交式斜乘法。

逐式交乘法的基本思想是，對行列式的各行分別乘以適當的式子，再將各列元素相加，直到除第一列 (即 x^0 的係數對應的那一列) 外，其餘各列元素的和均爲零，這時第一列元素的和即爲行列式的值。

當行列式階數較高時，要看出上述各行要乘的因式顯然不容易，於是，他在書中又介紹了另一種計算行列式的方法即交式斜乘法。不過他沒有說明這種方法的根據，只是對 $2-5$ 階行列式的展開給出了規則並用圖加以說明。從這些說明看出，他的交式斜乘法大致相當於今天中學裡介紹的對角線法或其擴展。

西方對於行列式的研究首次出現在 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 1693 年寫給 G.F.A. 洛比達 (L'Hospital) 的信中，而孝和的《解伏題之法》是 1683 年完成的，所以孝和的研究比西方的此類研究至

少要早十年。西方最早發表的關於行列式研究的著作是 G. 克萊姆 (Cramer) 的《代數曲線的分析引論》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*，1750)，這比《解伏題之法》要晚七十年。在行列式方面，關孝和的研究是世界領先的。

3. 研究了數字係數高次方程，發現了負根、虛根並提出了判別式概念和相當於多項式函數導函數的多項式

關孝和的這一些成就主要包含在《解隱題之法》、《開方算式》及著作集《七部書》中。《七部書》是《開方翻變之法》(1685)、《題術辨議之法》(1685)，《病題明致之法》(1685)、《方陣圓攢之法》(1683)、《算脱驗符之法》、《求積》、《毬闕變形草解》這七部著作的總稱。

《解隱題之法》、《開方翻變之法》和《開方算式》中記述了解數字係數高次方程的兩種近似方法，分別相當於 “霍納法” 和 “牛頓迭代法”。孝和又將這些解法用在字母係數方程 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ 上，從形式上求出了 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$，即從形式上求出了多項式函數 $f(x)$ 的導函數。另外，他考察了只有虛根的方程 (他稱其爲 “無商式”)、只有負根的方程 (他稱其爲 “負商式”) 和方程正、負根的個數問題，給出了判別式的概念，研究了方程正、負根存在的條件。在《解題術辨議之法》和《病題明致之法》中，他將導出方程是 “無商式” 和 “負商式” 的問題歸入 “病題” 之列，利用他對數字係數方程的研究介紹了變換 “預量” 而糾正 “病題” 的方法。

對於無商式 $f(x) = 0$，他主要是變更方程的係數使其判別式取一定的數值，從而使得方程有正根或負根。這樣的變換中又得出了 $f(x)$ 取極大值 (或極小值) 的條件 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} = 0$，由此式求出極值點 x_0，再代入 $f(x)$ 可以求出極大

值 (或極小值)。 這是今天通用的求極值方法的雛形， 孝和稱其爲 “適盡方級法”。 這種求極值方法是關孝和獨立發現的。

4. 將中國的 “三差之法” 推廣為一般的招差法，研究了數論問題並發明 “零約術”

這些成果都集中在《括要算法》中。 孝和去世之後， 其遺稿全部傳給了弟子荒木村英 (1640 – 1718)。 據說， 村英與孝和本來同學於高原吉種門下， 後來他又拜孝和爲師， 由於其在同門弟子中學德俱高， 所以得到了孝和的全部遺稿。 可是當時村英已年高體弱， 就把整理孝和遺稿的工作交給自己的弟子大高由昌。 大高由昌從遺稿中抽出數篇編輯成《括要算法》， 村英爲此作序， 並於 1712 年出版。 孝和的有關單行本至今尚存， 與此比較看出， 大高由昌在編輯時並沒有作多大改動。 只是孝和原稿中的 “諸約之法” 不包括 “翦管術”， 而《括要算法》中將 “翦管術” 列於 “諸約之法” 中。

(1) *招差法*　這是由 $x = x_1$、x_2、$\cdots$、x_n 以及和相應的 $y = y_1$、y_2、$\cdots$、y_n 兩組數據確定函數 $y = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 的係數的方法， 相當於西方數學中的有限差分法。 孝和的方法如下：

計算 $z_i = \dfrac{y_i}{x_i}$，$\delta z_i = \dfrac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}$，$\delta^2 z_i = \dfrac{\delta z_{i+1} - \delta z_i}{x_{i+2} - x_i}$，$\delta^3 z_i = \dfrac{\delta^2 z_{i+1} - \delta^2 z_i}{x_{i+3} - x_i}$ 等 $(1 \le i \le n)$，並依次稱其爲定積、平積、立積、三乘積。

若所有平積相等， 就有 $a_3 = a_4 = \cdots = 0$， 這時可取 $a_2 = \delta z_1$、$a_1 = z_1 - a_2x_1$， 這時的招差法稱爲 “一次相乘之法”。 若所有的立積都相等， 則 $a_4 = a_5 = \cdots = 0$， 可取 $a_3 = \delta^2 z_1$， 再計

算 $z_i - a_3x_i^2 = u_i\ (1 \le i \le n)$， 它是 $u = a_1 + a_2x$ 在 $x = x_i$ 處的值， 再對此施行 "一次相乘之法" 可得 a_2 、 a_1 的值。 依此類推。

關孝和稱 a_1 、 a_2 、 $\cdots$ 、 a_n 這些係數爲 "差"， 求這些差爲 "招差"。 上述求差的方法就是他的招差法。

對於 $n = 2$ 、 3 、 4 情況， 求 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 係數的問題早在中國數學中已得到解決， 孝和的貢獻主要在於將這種 "三差之法" 推廣到了 n 爲任意正整數的一般招差法。

(2) 約術及垛術　他敍述的 "約術" 有互約、 逐約、 齊約、 遍約、 增約、 損約、 零約、 遍通等。 其中 "逐約術" 是給出 n 個整數 a_1 、 a_2 、 $\cdots$ 、 a_n， 確定各自的一個約數 $a_1{}'$ 、 $a_2{}'$ 、 $\cdots$ 、 $a_n{}'$， 使這 n 個約數兩兩互質且其和等於 a_1 、 a_2 、 $\cdots$ 、 a_n 的最小公倍數。 $n = 2$ 時， 他把 "逐約術" 又稱爲 "互約術"。"齊約" 是求整數的最小公倍數。"遍約" 是用整數的最大公約數分別去除 n 個整數。"遍通" 是分數通分。"增約" 是求級數 $a + ar + ar^2 + \cdots$ 的和，"損約" 是求級數 $a - ar - ar^2 - \cdots$ 的和。"剩一術" 是解一次不定方程 $ax - by = 1$ 的方法。 除 "增約" 和 "損約" 之外， 這些都是數論的內容。

"零約術" 是孝和的發明。 它是一種確定無限不循環小數的近似分數的方法。 在書中他用例子對零約術作了說明。 比如邊長爲 1 尺的正方形的對角線長 $\sqrt{2} = 1.414\cdots$， 設這個小數的近似分數列爲 $\dfrac{P_1}{q_1}$ 、 $\dfrac{P_2}{q_2}$ 、 $\ldots$ 、 $\dfrac{P_n}{q_n}$， 用如下方法構造它們：

取 $P_1 = 1$、$q_1 = 1$，按下述規則確定後面的 P_n、q_n：若 $\dfrac{P_{n-1}}{q_{n-1}} > \sqrt{2}$，則取 $P_n = P_{n-1} + 1$、$q_n = q_{n-1} + 1$；若 $\dfrac{P_{n-1}}{q_{n-1}} < \sqrt{2}$，則取 $P_n = P_{n-1} + 2$、$q_n = q_{n-1} + 1$。這樣就有 $q_n = n$，而相應的 P_n 依次是 1、3、4、6、7、9、10、

11、13、14、16、17、18、20、21、23、24、26、27、28、30、31、33、34、35、37、38、40、41、43、44、45、47、48、50、51、52、54、55、57、58。於是有

$$\frac{P_5}{q_5}=\frac{7}{5}，\frac{P_7}{q_7}=\frac{10}{7}，\frac{P_{29}}{q_{29}}=\frac{41}{29}，\frac{P_{41}}{q_{41}}=\frac{58}{41}，$$

它們都出現在上述的近似分數列中。

在《括要算法》最後一卷 (貞卷) 中，他用自己發明的這種零約術證明了圓周率 π 的近似值可取 $\frac{355}{113}$。這一結果早已由中國的祖沖之給出，但他是怎樣得到的呢? 這一點卻沒有流傳下來。孝和的這一工作給出了一種推導方法。

《括要算法》的第一卷 (元卷) 中還記述了 "垛術" 問題，即求和 $S_P = 1^P + 2^P + 3^P + \cdots + n^P$ (他稱其爲 "方垛積") 與求和 $1+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n+k-1}{k}$ (他稱其爲 "衰垛積") 的問題。對於方垛積，他用招差法計算出了 $P=1$、2、3、$\cdots$、11 的情況，然後歸納得出了方垛積一般公式：

$$S_P=\frac{1}{P+1}\left\{n^{P+1}+\frac{1}{2}\binom{P+1}{1}\cdot n^P+B_1\binom{P+1}{2}\right.$$
$$\left.\cdot n^{P-1}-B_2\binom{P+1}{4}\cdot n^{P-3}+\cdots\right\}。$$

對於衰垛積，他也給出了一般公式：

$$1+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k}{k+1}。$$

值得注意的是，方垛積公式中的 B_1、B_2、$\cdots$、B_n、$\cdots$ 與伯努利數一樣。而西方第一部導入伯努利數並給出上述公式的書是數學家雅格布・伯努利 (Jacob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars conjectandi*，1713)。可見關孝和與伯努利幾乎同時發現了伯努利數。

(3) 翦管術　數論方面，他還研究了翦管術，即解同餘式組 $b_1x \equiv a_1 \pmod{m_1}$、$b_2x \equiv a_2 \pmod{m_2}$、$\cdots$、$b_nx \equiv a_n \pmod{m_n}$ 的方法。《括要算法》第二卷 (亨卷) 的“翦管術解” 部分舉出九個問題說明這種方法，前五個是 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$ 的情況，根據 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 是否兩兩互質而分爲兩種情況給出了解法；後四個問題都是 b_1、b_2、$\cdots$、b_n 不全爲 1 的情況，利用逐約術和剩一術給出了解法。

翦管術的名稱和問題形式在中國宋代楊輝的著作集《楊輝算法》中就有記述，但楊輝解決的同餘式組只限於 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$，且 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 兩兩互質的情況，而且由於所舉的例子涉及的數據都比較簡單，往往是只靠心算就可以解決，而不用剩一術。可以說，孝和是從《楊輝算法》中得到了翦管術的名稱和問題形式，但他由於發明了剩一術，又引入了逐約、互約概念，因而對 m_1、m_2、$\cdots$、m_n 不全兩兩互質的情況和 b_1、b_2、$\cdots$、b_n 不全爲 1 的同餘式組問題也完滿地解決了。因此可以說是關孝和發展完善了翦管術。

5. 給出了一些曲線求長和立體求積的近似方法

這些研究主要集中在《解見題之法》、《求積》及《毬闕變形草解》中。其中創新性的成果在於他給出了橢圓周長、阿基米德螺線長的近似算法，解決了圓環體、弧環體和十字環的近似求積問題。

(1) 橢圓周長與阿基米德螺線長　《解隱題之法》中第一次出現橢圓周長的近似算法。他將橢圓看成是從不同角度看圓時得到的圖形，得出橢圓周長的近似計算公式：

$$L^2 = \pi^2\,(長徑 \times 短徑) + 4 \times (長徑 - 短徑)^2。$$

此書中還解決了“畹背” 問題，即求所謂“畹形” 長度的問題。

如圖 1，將扇形 OAB 用半徑 OC_1、OC_2、 $\cdots$ 、$OC_{n-1}n$ 等分，再將半徑 OA 用 $C_1{}'$、$C_2{}'$、 $\cdots$ 、$C_{n-1}{}'n$ 等分，經過 OA 的各分點以 O 為圓心分別畫弧，得到過 $C_k{}'$ 點的弧與半徑 OC_k 的交點 D_k ($0 \leq k \leq n$，記 O 點為 D_0、 A 點為 D_n)， D_k 點的軌跡即是“畹形”。可見，畹形就是阿基米德螺線。他給出畹形長 (背) 的計算公式：

$$背^2 = \frac{1}{3}[3(半徑)^2 + 灣^2]。$$

至於他是如何得到這個公式的，書中沒有說明。

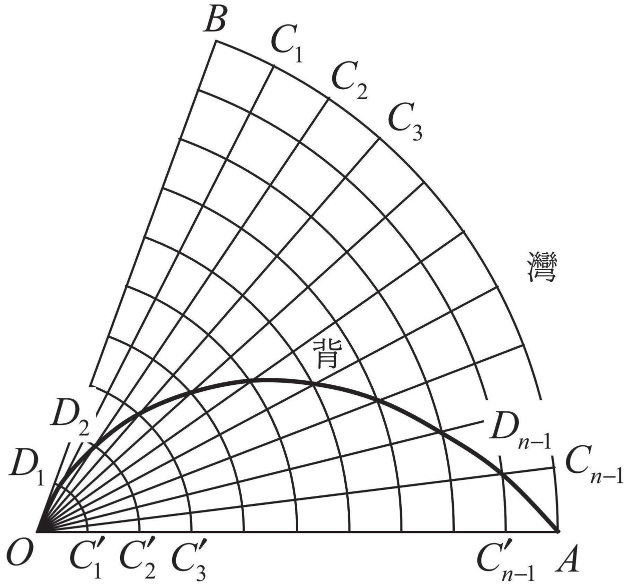

圖 1

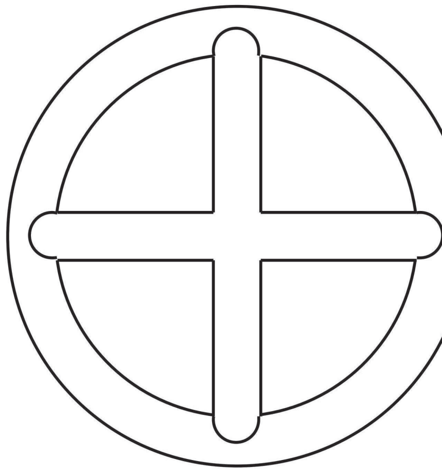

圖 2

(2) 圓環體、弧環體和十字環的體積　所謂圓環體是圓繞其所在平面上與圓沒有公共點的一條直線旋轉一周所得到的立體；弧環體則由弓形繞其所在平面上與弓形沒有公共點的一條直線旋轉一周所得的立體。關孝和設想，把圓環體截斷伸直，圓環體就變成圓柱，因此圓環體的體積就等於這個截面 (圓面) 的面積乘以這個“圓柱”的高 (即圓環體的“中心圓”周長)。他這樣計算是假定了“圓環體經截斷伸直成圓柱後體積不變”，以此假定為基礎，他用弓形的面積乘以弧環體的中心圓周長作為弧環體的體積。這裡所說的中心圓是指在圓 (或弓形) 旋轉過程中，圓 (或弓形) 面上一個特定點所形成的圓，這個特定點就是圓 (或弓形) 的重心。可見，孝和已經

有了 “重心” 這一概念。 他這樣計算圓環體、 弧環體的體積和方法相當於帕波斯 − 古爾丁 (Pappus–Guldin) 定理所述的方法。

所謂 “十字環” 是指兩個圓柱體與一個圓環體互相截取組成的立體， 如圖 2 所示， 兩個圓柱的軸互相垂直且都通過圓環體的重心， 圓柱被圓環體的表面所截， 並且兩圓柱的底半徑與圓環體的截面半徑相等。 這一問題最早出現在榎幷和澄的《參兩錄》(1653) 中， 孝和首次用近似方法求出十字環的體積。

另外， 《毬闕變形草解》也是主要研究求積問題的著作。 不過此書所涉及的多是闕球 (用平面去截球體所得)、 闕圓柱 (用平面去截圓柱所得)、 弧錐 (底是弓形的錐體) 和弧台 (兩底都是弓形的台體) 等複雜的立體。 他通過將這些立體變形而給出這些立體的近似求積方法。 他把此書命名爲《草解》， 可見還有未盡之意， 這說明上述一類立體的求積是當時最難的求積問題。

6. 創立圓理、 角術， 解決了有關圓弧長、 球體積及正多邊形的一些問題

“圓理” 一詞在後來的和算家中常用來總稱求解曲線長、 圖形 (平面圖形或曲面圖形) 的面積及立體的體積的方法。 但孝和創立的圓理只限於圓、 球的有關計算。 他關於圓理的研究主要集中在《括要算法》第四卷 (貞卷) 中， 由 “求圓周率術”、 “求弧矢弦率術” 和 “求立圓積率術”(立圓即球) 三部分組成。 他求圓的正 2^{15}、 2^{16}、 2^{17} 邊形的周長 a、 b、 c， 並對此施以增約術， 用 a、 b、 c 的一種平均值

$$b+\frac{(b-a)\cdot(c-b)}{(b-a)-(c-b)}$$

作爲圓周長的近似值， 由此求得圓周率的小數點後 11 位數字、 接

著又用零約術求出其近似分數爲 $\dfrac{355}{113}$ 。

他的 "求弧術" 是用弦 a 、 矢 c 、 徑 d 來求弧長 s 的方法。 他給出公式：

$$\begin{aligned} s^2 \;=\; & a_0^2 + c^2 \left\{ A_0 + A_1 \frac{c-c_0}{d-c} + A_2 \frac{(c-c_0)(c-c_1)}{(d-c)^2} \right. \\ & \left. + \cdots + A_5 \frac{(c-c_0)\cdots(c-c_4)}{(d-c)^5} \right\} , \end{aligned}$$

其中 A_0 、 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 是由 $c = c_0$ 、 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 、 c_5 和相應的 $s = s_0$ 、 s_1 、 s_2 、 s_3 、 s_4 、 s_5 來確定的。

如果上述插值公式中沒有分母 $(d-c)^i$ $(i = 1$ 、 2 、 $\cdots$ 、 $5)$ ，則與牛頓插值公式完全一樣。 這個公式與牛頓插值公式的原理相同。 牛頓插值公式是 I. 牛頓 (Newton) 發現的， W. 瓊斯 (Jones) 得到牛頓允許後著成《 微分法 》(*Methodus differentilis* ， 1711) 將其分佈於世， 而《 括要算法 》是 1709 年寫成序、 跋， 1712 年出版的， 因此可以說關孝和與牛頓幾乎同時各自獨立地發現了這個公式。

對於球的體積， 他提出了 "求立圓積率術"， 首先用平行平面把球截成 50 個薄片， 將各薄片先看成以各自的接近球心一側的底面爲底的圓柱， 求這 50 個 "圓柱" 的體積之和； 再將各薄片看成是以各自的另一底面爲底的圓柱， 求出這 50 個 "圓柱" 的體積之和， 再求出這兩個體積和的平均值 a 作爲這 50 個薄片的總體積。 同樣將球截成 100 個 、 200 個薄片， 分別如上求出這 100 個 、 200 個薄片的總體積 b 和 c， 用增約術求出

$$b + \frac{(b-a)\cdot(c-b)}{(b-a)-(c-b)} ,$$

將其作爲球體積。 雖然這一過程中用增無的條件並不充足， 但他

如此計算卻得到了 $\frac{\pi}{6}d^3$ (π 爲圓周率， d 爲球直徑) 的正確值。 在這種分割 — 轉換 — 求和的求積方法中， 積分思想已開始萌芽。

“角術” 是建立正多邊形的邊長與外接圓半徑 、 邊長與內切圓半徑之間關係式的方法。 他對正三 − 二十邊形分別給出了這種關係式， 而以前的和算家只是求出了邊數不大於 15 的正多邊形的上述關係式。 另外， 孝和在推導過程中所用的幾何學上的定理， 有一些是僅憑直覺得到的。

7. 研究了幻方問題， 又用同餘式解決了日本流傳的古老的 “繼子立” 即 “立後嗣” 的問題

《 七部書 》中的《 方陣之法 • 圓攢之法 》給出了幻方 (他稱爲 “方陣”) 和圓攢的一般構造方法， 即按一定規律變化 $n-2$ 階幻方的每一個數， 將其相應地作爲 “內核”， 再在外圈上按一定規則塡上 $4n-4$ 個數就可以得到 n 階幻方。 這種方法與十六世紀德國數學家 M. 史蒂費爾 (Stifel) 首次在其著作《 整數算術 》(*Arithmetica Integra*， 1544) 中嘗試證明幻方的思想是一致的。

“繼子立” 是在日本廣泛流傳的一個古老問題， 它說的是， 某貴族家的 30 個孩子， 其中 15 人是前妻所生， 15 人爲後妻所生。 要從這 30 個孩子中選出一個來繼承家業， 就讓這 30 個孩子排成一圈， 從某一個小孩開始往下數， 讓第 10 個孩子從圈中退出， 再從下一個繼續數， 數到 20 時就讓對應 20 的那個孩子從圈中出去， 直到最後剩下一個孩子， 就由這個孩子來繼承家業。 如果現在只剩下一個前妻之子和 14 個後妻之子了， 那麼只要從這個前妻之子開始數， 就可以使這個孩子成爲 “繼子”。

孝和在《 算脫驗符之法 》中將這個問題理論並用同餘式進行了推導證明。

除上述著作之外，孝和在數學方面還寫下了《角法並演段圖》、《闕疑抄一百問答術》、《勿憚改答術》等書。在天文曆法方面他也有許多著作，如《授時曆經立成》四卷、《授時曆經立成之法》(1681)、《授時發明》、《四餘算法》(1697)、《星曜算法》、《數學雜著》(又名《天文數學雜著》) 等。

先前數學對關孝和的影響

從上面的介紹可以看出，關孝和的數學研究有的起源於在他之前的和算著作中的“遺題”。他最初的數學著作《發微算法》是對澤口一之的《古今算法記》(1671) 中遺題的解答。他還解答了礒村吉德的《算法闕疑抄》(1659) 的 100 道遺題和村瀨義益的《算法勿憚記》(1673) 遺題，至今尚存有關的抄本。有些遺題成爲關孝和研究的起點。例如《算法闕疑抄》第 45 個問題 (“圓台斜截口”) 引出了他對橢圓的研究；第 41 個問題 (“俱利加羅卷”，即在圓錐形棒上纏繩，求繩長) 引出了他對畹背問題的研究。他的一些重要的思想方法也是從這些著作中得到的。例如，澤口一之在《古今算法記》中通過變換方程係數避開了有兩個正根的情況，關孝和由此受啓發變換“無商式”和“負商式”係數使其根達到要求，進而得到了求多項式函數的極大值、極小值的“適盡方級法”，他在《題術辨議之法》中，對“碎術” (即“自遠至近數次而求所問”的方法，他認爲“其術不定也”，因而不是最恰當的方法) 問題採用逐次逼近法解決，這可能是從《算法勿憚改》中受到啓發的，因爲《算法勿憚改》在日本是首次使用逐次逼近法的著作。

但是，他的最主要的數學成就並不能在他之前的和算著作中找到線索，這就在他的研究與先前和算家的研究之間形成了一個“斷層”。一些人認爲，彌補這個斷層的是中國數學和西方數學對他的影響。據日本武林史著作《武林隱見錄》(1378) 中“關新助算術秩

事” 一條記載， 孝和估計到南部某寺收藏的 “唐本” (指古時由中國傳到日本的書籍) 中可能有數學書， 就去南部搜尋， 並將其抄錄下來帶回江戶研究。 從此類 “秩事” 中可知關孝和在研究中參考了中國數學著作。

從孝和的數學成果來看， 對他的研究產生了較大影響的中國數學著作是《楊輝算法》(1738) 以及清朝的《天文大成管窺輯要》等。《楊輝算法》是楊輝的《乘除通變本末》(上卷爲《算法通變本末》， 中卷爲《乘除通變算寶》， 下卷爲《法算取用本末》， 與史仲榮合著)、《田畝比類乘除捷法》和《續古摘奇算法》三部著作合刻的， 在朝鮮重刻後傳入日本並保存下來。 孝和從《楊輝算法》中得到了 “翦管術” 的名稱和問題形式， 並完善了 “翦管術”。 另外，《楊輝算法》中已有類似於 “霍納法” 的解方程方法， 大概是孝和從中受到啓發， 才提出了分別相當於霍納法和牛頓逼近法的兩種解方程方法。

清朝黃鼎的《天文大成管窺輯要》對孝和也有影響。 孝和的《授時發明》(或稱《天文大成三條圖解》) 就是對此書第三卷的解釋， 由此看來孝和曾仔細研究過這部書。 書中有對元朝郭守敬《授時曆》中 “三差法” 所作的解說， 可能由此引出了孝和對 “招差法” 的研究。

關於西方數學的影響是進入明治時代之後才開始研究的。 十七世紀中葉荷蘭萊頓大學的 F. 斯霍滕 (Schooten) 教授有一個學生， 名叫 P. 哈特辛烏斯 (Hartsingius)， 是日本人。 這由荷蘭阿姆斯特丹大學的 D.J. 科爾泰韋赫 (Korteweg) 教授給林鶴一博士的信中可知。 這個日本人後來是否回到日本已無法證實。 但據日本數學史家三上義夫考證， 那個時期在日本有一名叫鳩野巴宗的醫學家， 此人或許就是哈特辛烏斯。 如果這個推測正確， 則說明當時已經有人將西方數學帶回日本了， 從而可以認爲關孝和的數學研究直接受到西方數學的影響。

從以上的介紹可以看出，關孝和從以往數學家的研究中發現問題，又對這些問題從理論上加以解決或者將其推廣爲一般性方法。除此之外他還有自己的首創性研究。這些成果奠定了和算的基礎，擺脫了日本數學家單純介紹中國數學的傳統束縛，成爲後世和算家的典範。

關流數學教育及關流弟子

關孝和作爲一個數學家的同時又是一位數學教育家。他一生中親自授過課的弟子就有幾百人，其中最傑出的是荒木村英及建部賢弘、建部賢明兩兄弟，村英的弟子中有松永良弼，賢弘的弟子中有中根元圭，元圭弟子中有山路主住等最爲著名。孝和與他的弟子們的研究構成了和算的一個最大流派 — 關流 (關流各代數學家系譜如文後圖所示)。能培養出這許多傑出的弟子，與孝和創立的教育方式有很大關係。他根據學生的情況分成五個等級分別集中指導，每一級都規定有相應的具體數學內容和具體教材。初級的教以珠算，進而籌算，高級的從演段術到點竄術，隨著每一級學生學業的完成而分別授以相應的 “免許證”，相當於現在的畢業證，有 “見題免許”、“隱題免許”、“伏題免許”、“別傳免許” 和 “印可免許” 五個等級。後來這種方式不斷發展，成爲關流嚴格的教育制度 — 五段免許制。只有得到五個等級的免許之後，才可以被稱爲 “關流第幾傳”，而且最後得到 “印可” 的只限於幾名高徒。後來隨著數學研究的發展，加入到各等級的學習內容不斷增加，五段免許制日益完善和嚴格。到了山路主住成爲關流掌門人時，據說規定一代弟子中只傳一子和高徒二人。

關於所用的教材，除了關孝和的著作之外，其他關流數學家也寫過教科書，如山路主住的《關流算術》45 卷作爲關流入門者的最初教程；久留島義太的《廣益算梯》25 卷也作爲數學初學者的

教材。

可見，關孝和創立的五段免許制體系，已有班級授課制的萌芽。

附：關流系譜

關孝和（? －1708）

澤口一之（活動於 1671 年前後）　荒木村英（1640－1718）　建部賢弘（1664－1739）

久留島義太（? －1754）　松永良弼（? －1744）　中根元圭（1662－1733）

內藤正樹（1703－1766）　山路主住（1704－1772）　中根法舶（1701－1761）

藤田貞資（1734－1807）　有馬賴僮（1714－1773）　安島直圓（1739－1798）　戶板保佑（1708－1784）

坂部廣胖（1759－1824）　日下誠（1764－1839）

長谷川寬（1782－1832）　內田五觀（1805－1882）　和田寧（1787－1840）

川北朝鄰（1841－1919）　細井寧雄（1802－1873）

林鶴一（1873－1935）　遠藤利貞（1844－1915）

文　　獻

原始文獻

[1] 群馬縣多野郡教育會， 建碑紀念・算聖關孝和先生， 日本群馬， 1929。

[2] 東京數學物理學會， 關流算法七部書， 東京， 1907。

[3] 平山諦・下平和夫・廣瀨英雄編， 關孝和全集， 大阪教育圖書， 1974。

[4] 關孝和， 括要算法， 荒木村英檢閱， 大高由昌校訂， 皇都川勝五郎右衛門他， 1712。

研究文獻

[5] 三上義夫，關孝和の傳記の研究，東京物理學校雜誌，1932，7－9。

[6] 三上義夫， 文化史上よク見たる日本の數學， 哲學雜誌， 421－426 號， 1921。

[7] 三上義夫，圖理の發明に關する論證，史學雜誌，第 41 卷，9－21 號。

[8] 遠藤利貞， 大日本數學史， 東京， 1896。

[9] 遠藤利貞， 增修日本數學史， 帝國學士院藏版， 恆星社厚生閣， 1981。

[10] 日本東北帝國大學，林鶴一博士和算研究集錄，東京開成館，1937。

[11] 藤原松三郎， 日本數學史要， 寶文館株式會社， 1952。

[12] 日本帝國學士院， 明治前日本數學史， 岩波書店， 1954。

[13] 細井淙， 東西數學思想史， 共立出版， 1955。

[14] 下平和夫， 日本人の數學感覺， 二十一世紀圖書館， 1986

[15] 下平和夫， 日本人の數學 — 和算， 河出書房新社， 1972。

[16] 小倉金之助， 日本の數學， 岩波書店， 1940。

[17] 平山諦， 和算の歷史 — その本質と發展， 至文堂， 1961。

[18] 村田全， 日本の數學・西洋の數學， 中央公論社， 1981。

[19] Yoshio Mikami, *The development of mathematics in China and Japan*, Leipzig, 1913。

[20] David Eugene Smith and Yoshio Mikami, *A history of Japanese mathematics*, Chicago, 1914。