牛　頓

牛頓 I. (Newton，Isaac) 1643 年 1 月 4 日 (儒略曆 1642 年 12 月 25 日) 生於英格蘭林肯郡格蘭瑟姆鎮沃爾索普 (Woolsthorpe) 村；1727 年 3 月 31 日 (儒略曆 1727 年 3 月 30 日) 卒於倫敦肯辛頓。數學、力學、物理學、天文學、化學、自然哲學。

牛頓之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Newton.html`

牛　頓

李 文 林

(中國科學院數學研究所)

牛頓 I. (Newton， Isaac) 1643 年 1 月 4 日 (儒略曆 1642 年 12 月 25 日) 生於英格蘭林肯郡格蘭瑟姆鎮沃爾索普 (Woolsthorpe) 村； 1727 年 3 月 31 日 (儒略曆 1727 年 3 月 30 日) 卒於倫敦肯辛頓。 數學、 力學、 物理學、 天文學、 化學、 自然哲學。

依薩克 • 牛頓出身於農民家庭。 祖父羅伯特 • 牛頓 (Robert Newton) 是一位富裕的農莊主。 父親 (亦名依薩克 • 牛頓) 繼承了田莊， 但與牛頓的母親漢娜 • 埃斯庫 (Hannah Ayscough) 結婚不到半年即病故。 牛頓是遺腹子， 而且早產， 生後勉強存活。 牛頓三歲時， 母親改嫁給鄰村牧師 B. 史密斯 (Smith)， 牛頓被留在沃爾索普由外祖母撫養。 大約從五歲開始， 牛頓被送到附近斯吉林頓和史托克走讀小學讀書。 1653 年， 母親漢娜再度守寡， 攜牛頓的三個異父弟妹回到沃爾索普村。 兩年後， 牛頓進入格蘭瑟姆中學。 少年牛頓不是神童， 在校成績並不突出， 但他喜歡讀書。 在沃爾索普的農舍裡保存有近二百本牛頓少年時代讀過的書籍。 牛頓從中學起就有作讀書筆記的習慣。 有一本又大又厚的筆記本， 原是史密斯牧師的神學筆記， 牛頓將它繼承下來並稱之爲 “廢書” (*Waste Book*)。 “廢書” 後又被帶到劍橋用作力學與數學筆記， 其中記錄了牛頓早年研究萬有引力與微積分的心得， 是牛頓早期科學發現的重要見證。

作爲中學生的牛頓還酷愛玩具製作。 他所製作的玩具實際上是各種機械模型， 包括風車、 木鐘、 日晷以及摺疊式提燈 (冬日清

晨上學路上照明用) 等等。 在格蘭瑟姆牛頓寄宿的克拉克藥店臥室裡， 堆滿了這類自製的玩具。

1659 年， 十七歲的牛頓被母親召回到沃爾索普管理田莊。 但牛頓對務農不感興趣。 一有機會， 仍然埋首書卷。 在這種情況下， 有兩個人對他的前途起了決定性作用。 牛頓的舅父 W. 埃斯庫 (Ayscough) 和格蘭瑟姆中學校長 J. 斯托克斯 (Stokes) 先生竭力勸說漢娜讓牛頓復學。 斯托克斯校長對牛頓母親說："在繁雜的務農中埋沒這樣一位天才， 對世界來說將是多麼巨大的損失! " 他甚至答應減收學費並讓牛頓到自己家裡用餐。 他們終於說服了牛頓的母親。 1660 年秋， 牛頓在輟學九個月後又回到格蘭瑟姆， 爲升學作準備。

1661 年 6 月， 牛頓入劍橋大學， 成爲三一學院的減費生 (Subsizar)。 入學前， 牛頓已閱讀過威廉舅舅送給他的一本桑德生 (Sanderson)《邏輯學》， 這對他順利掌握大學頭二年的邏輯與哲學課程大有裨益。 這一時期， 牛頓還閱讀了亞里士多德 (Aristotle) 的《工具篇》與《倫理學》、 R. 笛卡兒 (Descartes) 的《哲學原理》(*Principa philosophiae*) 以及 T. 霍布斯 (Hobbes)、 J. 馬吉盧斯 (Magirus) 等人的哲學著作。 從三年級起， 牛頓開始接觸大量自然科學著作， 其中包括 G. 伽利略 (Galileo) 的《恆星使節》(*Sidereus nuncius*) 與《兩大世界體系的對話》(*Dialogo dei massimisystemi*)、 J. 刻卜勒 (Kepler) 的《光學》(*Astronomiae pars Optica*) 以及 P. 加桑迪 (Gassendi) 的哥白尼天文學概述等。

根據 J. 康杜德 (Conduitt) 和 A. 隷莫弗 (De Moivre) 的記述， 牛頓在數學上很大程度是依靠自學。 1663 年， 牛頓從斯圖里奇集市購得一本占星書， 因缺乏三角知識看不懂其中的天象圖， 遂又買來三角課本和歐幾里得 (Euclid)《原本》(*Elements*) 閱讀。 但他的注意力很快被其它數學著作所吸引。 下面是牛頓本人的回憶："1664 年聖誕節前夕， 當時我還是一個高年級生， 我買到

了斯霍滕 (van Schooten) 的《雜誌》(*iscellanies*) 和笛卡兒的《幾何學》(*La géométrie*) (半年前我已讀過笛卡兒的《幾何學》與 W. 烏特勒 (Oughtred) 的《數學入門》(*Clavis mathematicae*)，同時借來了 J. 沃利斯 (Wallis) 的著作。" 根據三一學院保存的牛頓讀書筆記，可以進一步了解到牛頓在大學時代數學閱讀的範圍，涉及的作者還有：F. 韋達 (Viéte)、P. 費馬 (Fermat)、C. 惠更斯 (Huygens)、J. 德維特 (de Witt)、F. 德博內 (de Beaune)、J. 許德 (Hudde) 和 H. 范休雷特 (van Heuraet) 等。在所有這些著作中，笛卡兒的《幾何學》和沃利斯的《無窮算術》(*Arithmetica Infinitorm*) 的影響是決定性的，它們將牛頓迅速引導到當時數學最前沿的的領域 — 解析幾何與微積分。

牛頓在廣泛閱讀的同時也聽取大學的各種課程，特別是 I. 巴羅 (Barrow) 1664 年後開設的盧卡斯 (Lucas) 講座。牛頓後來追溯流數概念的來源時說道："巴羅博士當時講授關於運動學的課程，也許正是這些課程促使我去研究這方面的問題。"

1665 年 1 月，劍橋大學評議會通過了授予牛頓文學士的決定。同年 8 月，大學因瘟疫流行而關閉，牛頓離校返鄉。隨後兩年裡，除偶爾回校及到鄰鎮布思比小住外，牛頓都是在家鄉沃爾索普度過。這段時間成爲牛頓科學生涯中的黃金歲月：制定微積分、發現萬有引力、提出光學顏色理論 $\cdots$，可以說描繪了他一生大多數科學創造的藍圖。

1667 年復活節不久，牛頓回到了劍橋，但對自己的重大發現卻未作宣佈。這一年 10 月他被選爲三一學院初級院委 (minor fellow)；翌年 4 月，獲碩士學位，同時成爲高級院委 (major fellow)。

1669 年 10 月，牛頓繼巴羅任盧卡斯教授[1]。牛頓大學畢業

[1] H. 盧卡斯 (Lucas)，早年就讀於劍橋聖 • 約翰學院，曾代表劍橋大學出任國會議員。1663 年卒於倫敦，遺囑在劍橋設一數學教授職位，以他的名字命名，年俸僅低於大學院的院長 (當時爲 100 英鎊)，由其捐贈土地的收入資助。巴羅是第一任盧卡斯教授 (1664 − 1669)。

後，曾作過巴羅的助手並協助修改後者的《幾何與光學講義》(*Lectiones opticae et geometricae*，1669)。巴羅認識到牛頓的才華，他自動辭去盧卡斯教授之職而給牛頓以機會。巴羅讓賢，在科學史上一直被傳爲美談[2]。

作爲盧卡斯教授，牛頓自 1670 年起主持了一系列重要的科學講座。1670－1672 年光學講座，總結了牛頓的光學研究，其講義經修訂後於 1704 年正式出版，這就是著名的《光學》(*Opticks*)；接著牛頓用了整整十年 (1673－1683) 時間講授代數；1684－1685 年的盧卡斯講座主題是運動學，這是由 1684 年 8 月 E. 哈雷 (Halley) 的一次訪問引起的，哈雷專程到劍橋向牛頓請教在引力服從反平方律時行星的軌跡。不久牛頓將答案寫成論文寄給皇家學會，同時將論文擴充爲《論運動》(*De motu corporum*) 的講義，即 1684 年秋季開始的盧卡斯講座內容，並且也是《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 第一卷的初稿。此後便是牛頓全力創作《原理》的時期，至 1687 年春，《原理》第三卷 “宇宙體系” 告成，“宇宙體系” 也是這一年盧卡斯講座的題目。在哈雷的敦促與資助下，《原理》於同年夏正式出版。這部劃時代的巨著奠定了牛頓在科學史上的不朽地位。

在任盧卡斯教授期間 (1669－1701)，除了上述領域外，牛頓繼續致力於改進完善自己早年的微積分工作以及其它方面的數學研究，同時還花費了大量的精力探討化學及煉金術。

1680 年代末，牛頓一度捲入政治鬥爭。他曾作爲劍橋大學九人委員會成員之一，在抵制國王詹姆士二世派遣一名親信的天主教徒到劍橋任職的行動中起了重要作用。牛頓因此於 1689 年 1 月當

[2]近年亦有的作者提出異議 (如參見研究文獻 [12])，認爲巴羅是爲另謀高就而辭去盧卡斯教授之職。此說僅屬猜測。巴羅在 1669 年 7 月向皇家學會數學顧問 J. 科林斯 (Collins) 推薦牛頓的《分析學》並稱牛頓爲 “卓越的天才” (見本文 “微積分的制定”)。同年 11 月科林斯在致 J. 格雷戈里 (Gregory) 函中即已報導說 “巴羅先生已辭去他的數學教授位置，交託給了劍橋的牛頓先生”。牛頓本人曾多次提到巴羅對他的舉薦。如他告訴 A.S. 孔蒂 (Conti) 說：巴羅先生曾爲解決一個關於擺線的問題而絞盡腦汁，所得答案極爲冗長。當他看到牛頓送來的解答，深感驚訝，當即對別人說：“他 (牛頓) 比我更有學問。” 巴羅對牛頓的推崇是沒有疑問的。

選爲代表劍橋大學的議員而進入了國會。 1701 年又再度當選。

1693 年秋, 長期緊張的科學研究使牛頓患了嚴重的憂鬱症, 病雖經治癒, 但他從此結束了劍橋寧靜的學者生活。 1696 年, 牛頓通過他的學生 — 財政大臣 C. 蒙塔古 (Montague) 的關係而謀得倫敦造幣局總監之職, 遂移居倫敦, 並指定 W. 惠斯頓 (Whiston) 代理盧卡斯教授。 1699 年, 牛頓因督辦鑄幣有方而升任造幣局長, 這促使他於 1701 年 10 月下決心最終辭去盧卡斯教授之職。 牛頓晚年就在倫敦度過。 除了造幣局的工作, 他於 1703 年起出任皇家學會會長 (牛頓早在 1672 年就已當選爲皇家學會會員)。 1705 年, 牛頓被女王安娜封爵, 達到了一生榮譽之巓。 1727 年 3 月 31 日, 牛頓在患肺炎與痛風後溘然辭世, 葬禮在威斯特敏斯特大教堂耶路撒冷廳隆重舉行。 當時參加了牛頓葬禮的 F.M.A. 伏爾泰 (Voltaire) 禁不住虔誠地從牛頓所戴的桂冠上摘下一片葉子珍藏紀念 (見伏爾泰《英國通訊》序)。 詩人 A. 普柏 (Pope) 三年後在爲牛頓所作墓誌銘中寫下了這樣的名句:“自然和自然定律隱藏在茫茫黑夜中。 上帝說:‘讓牛頓出世!’ 於是一切都豁然明朗。” 劍橋三一學院教堂大廳內立有牛頓全身雕像, 供世人瞻仰。

在牛頓的全部科學貢獻中, 數學成就佔有突出的地位, 這不僅是因爲這些成就開拓了嶄新的近代數學, 而且還因爲牛頓正是依靠他所創立的數學方法實現自然科學的一次巨大綜合而開拓了近代科學。

二項定理的發現

牛頓數學生涯中第一個創造性成果乃是關於任意次冪的二項展開定理。 根據牛頓本人回憶, 他是在 “1664 年和 1665 年間的冬天, 在研讀沃利斯博士的《無窮算術》並試圖修改他的求圓面積 (或計算 $\int_0^1 (1-x)^{1/2}dx$) 的級數時” 發現這一定理的。

牛頓對二項定理的原始推導，寫在他 1664－1665 年間的一本讀書筆記上而被保存至今。但牛頓遲至 1676 年才在致皇家學會秘書 H. 奧爾登伯格 (Oldenburg) 的兩封信中正式公佈這項發現。這兩封信是為了答復 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的有關詢問而寫。在《前信》(*epistola prior*，1676 年 6 月 13 日) 中，牛頓寫道："由於他 (萊布尼茨) 很想了解英國人在這一領域的工作，而我本人若干年前曾鑽研過這一理論，所以我將自己得到的一些結果寄給您，以滿足 (至少部分滿足) 他的要求。" 牛頓接著便以下列形式首次敘述了二項定理：

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ$$

$$+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots，$$

並指出 "此處 $P+PQ$ 表示要求其根或任意次冪或冪的根的量；P 表示該量的首項，Q 則是首項相除後的餘項，m/n 是 $P+PQ$ 的冪指數，不論其是整數還是分數、正數還是負數"，而 "在計算過程中要求的各商項用 A、B、C、D 等來表示，即第一項 $P^{m/n}$ 記作 A；第二項 $\frac{m}{n}AQ$ 記作 B；等等"。

萊布尼茨復函要求進一步說明二項定理的來源。牛頓於是在《後信》(*epistola posterior*，1676 年 10 月 24 日) 中追述了自己發現二項定理的思路。

如所周知，沃利斯在《無窮算術》中考慮數列

$$a_n=\int_0^1(1-x^2)^{n/2}dx \quad (n=0、1、2、\cdots)，$$

通過對更一般的數組 $a_{p,\,q}=1/\int_0^1(1-x^{1/p})^q dx$ (p、$q=1$、2、$\cdots$) 進行插值並取特例 $a_{\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}$ 而求得表示圓積的無窮乘積。牛頓受沃利斯影響但卻採取了嶄新的途徑：他不是考慮數列而是考慮一函

數序列

$$f_n(x)=\int_0^x (1-t^2)^{n/2}dt \quad (n=0、1、2、\cdots)^3$$

的插值。當 n 爲偶數時，牛頓利用沃利斯的結果

$$\int_0^x t^p dt=\frac{x^{p+1}}{p+1}$$

得出 $f_n(x)$：

$$f_0(x)=1(x)，$$

$$f_2(x)=1(x)+1\left(-\frac{1}{3}x^3\right)，$$

$$f_4(x)=1(x)+2\left(-\frac{1}{3}x^3\right)+1\left(\frac{1}{5}x^5\right)，$$

$$f_6(x)=1(x)+3\left(-\frac{1}{3}x^3\right)+3\left(+\frac{1}{5}x^5\right)+\left(-\frac{1}{7}x^7\right)，$$

$$\cdots\cdots$$

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}\left[(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1}\right]。$$

牛頓試圖對上述級數序列的係數插值，當 $n=1$ 時就將得到四分之一的單位圓面積。爲此他注意到上述序列中所有級數的第一項都是 x，第二項 $(0/3)x^3$、$(1/3)x^3$、$(2/3)x^3$、$(3/3)x^3$ 則構成算術級數，因此插值後的中間級數前二項應爲 $x-\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^3)$，$x-\frac{1}{3}(\frac{3}{2}x^3)$，$x-\frac{1}{3}(\frac{5}{2}x^3)$ $\cdots$ 等等。爲了計算其餘各項的係數，牛頓指出當 n 爲偶數時，諸係數 a_{mn} 構成帕斯卡三角，且滿足關係 $a_{m,\,n+2}=a_{m-1,\,n}+a_{m,\,n}$。牛頓接著便利用類比推理假

[3] 爲了易於敍述和理解，這裡採用了現代積分號來表示有關的面積。需要說明的是，無論在牛頓還是沃利斯的原著中均未引進積分記號 $\int$。

定對奇數 n， 插值後的 $a_{m,\,n}$ 此關係仍成立， 由此便可從已得到的 $a_{0n}=1$、$a_{1n}=n/2$ 而逐步推算出其餘的 a_{mn} 來。 如牛頓算出 $f_1(x)$ 的前七項 a_{m1} 之值爲

$$a_{01=1}\text{、}a_{11}=\frac{1}{2}\text{、}a_{21}=-\frac{1}{8}\text{、}a_{31}=\frac{1}{16}\text{、}a_{41}=\frac{5}{128}\text{、}$$

$$a_{51}=-\frac{7}{256}\text{、}a_{61}=\frac{-21}{1024}\text{、}$$

由此看出 a_{mn} 的一般形式

$$\frac{n}{2}\times\frac{\frac{n}{2}-1}{2}\times\frac{\frac{n}{2}-2}{3}\times\frac{\frac{n}{2}-3}{2}\times\cdots\cdots\text{。}$$

在用插值法求出積分 $\int_0^x(1-t^2)^m dt$ 的一般表達以後， 牛頓將結果逐項微分便立即得到二項定理：

$$(1-x^2)^m=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}x^{2k}\text{，}$$

其中

$$\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\cdots\cdots(m-k+1)}{k!}\text{。}$$

牛頓關於二項定理的早期研究中， 根據同樣的思路用插值法計算雙曲線 $y=(1+x)^{-1}$ 的面積而獲得了級數表達式

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\text{。}$$

這實質上是對數級數的最早推導。 牛頓又通過逐項微分進而得到幾何級數

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4\cdots\cdots\text{。}$$

在後來的文獻中牛頓便拋棄了插值法而將此類展開看作是二項定理當指數取負值時的特例， 如在《 前信 》中， 牛頓給出了例子

$$\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{d^2}+\frac{e^2}{d^3}-\frac{e^3}{d^4}+\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{(d+e)^3}=\frac{1}{d^3}-\frac{3e}{d^4}+\frac{6e^2}{d^5}-\frac{10e^3}{d^6}+\cdots\cdots,$$

等等 。

在牛頓之前， 正整數冪的二項展開早爲人們熟知 。 牛頓將其推廣到正負有理數冪的情形， 這是從有限向無限的飛躍， 這一飛躍爲無窮級數研究開闢了廣闊的前景 。 尋找一些熟知的函數的無窮級數表示， 是牛頓同時代數學家們的熱門課題 。 牛頓憑藉自己發現的二項定理而能得到其它一系列函數的無窮級數 。 例如就在發現二項定理的翌年 (1666)， 牛頓用二項定理展開 $\sqrt{1-x^2}$ 而獲得了反正弦級數

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots\cdots 。$$

同樣還得到了 $\arctan x$ 的級數展開 。 稍後， 他運用反演法從已知的 $\log x$ 與 $\arcsin x$ 的無窮展開推出指數級數 、 正弦級數以及餘弦級數 ：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\cdots,$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\cdots\cdots,$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\cdots\cdots,$$

等等 。 牛頓爲能發現這麼多函數級數而自豪 。 在十七 − 十八世紀， 無窮級數是微積分不可缺少的工具 。

微積分的制定

微積分的發明、制定是牛頓卓越的數學成就。

微積分所處理的一些具體問題，如切線問題、求積問題、瞬時速度問題以及函數的極大、極小值問題等，在牛頓之前即已受到人們的研究，有的 (如求積問題) 甚至可以遠溯古代。十七世紀上半葉，天文、力學與光學等自然科學的發展使這些問題的解決越益成爲燃眉之急。當時幾乎所有的科學大師都竭力尋求有關的數學新工具，特別是描述運動與變化的無窮小算法，並且正是在牛頓誕生前後的一個時期內，取得了迅速的進展，其中最重要的如刻卜勒的旋轉體體積計算法 (1615)、費馬求極大極小值的方法 (1629)、B. 卡瓦列里 (Cavalieri) 的 "不可分量原理" (1635)、笛卡兒的解析幾何及切線構造法 (1637)、沃利斯的分數冪積分 (1655)、巴羅的微分三角形 (1664 – 1665) 等等。這一系列前驅性的工作，對於求解各類具體無窮小問題作出了寶貴貢獻，但卻缺乏一般性，尚不能滿足當時科學的普遍需要。牛頓超越前人的功績是在於，他能站在更高的角度，對以往分散的努力加以綜合，將自古希臘以來求解無限小問題的各種特殊技巧統一爲兩類普遍的算法 — 微分與積分，並確立了這兩類運算的互逆關係，從而完成了微積分發明中最後的也是最關鍵的一步，並爲其深入發展與廣泛應用鋪平了道路。

流數論的初建　牛頓對微積分的研究始於 1664 年秋。當時他反覆閱讀笛卡兒《幾何學》，對笛卡兒求切線的 "圓法" 發生了興趣，並試圖尋找更好的方法。就在此時，牛頓首創了小 o 記號表示 x 的無限小且最終趨於零的增量。在 1665 年夏瘟疫迫使他離開劍橋前不久，牛頓接連寫了幾份手稿，致力於笛卡兒、費馬、許德等人算法的改進。其中 5 月 20 日手稿引進了一種帶雙點的字母記號：對於量 a，記號 $\ddot{a}$ 相當於導數的齊次形式

$x(\dfrac{da}{dx})$。 這只是一種簡寫記號， 不應與牛頓後來引進的單點流數記號混爲一談。

1665 年夏至 1667 年春牛頓在家鄉躲避瘟疫期間， 繼續研究微積分並取得了突破性進展。 據他自述， 1665 年 11 月發明正流數術 (微分法)， 次年 5 月又建立了反流數術 (積分法)。 1666 年 10 月， 牛頓著手整理前兩年的研究而寫成一篇總結性論文， 此文現以《 1666 年 10 月流數簡論 》(*The october* 1666 *tract on fluxions*) 著稱， 當時雖未正式發表， 卻曾在牛頓的朋友與同事中傳閱。《 流數簡論 》是歷史上第一篇系統的微積分文獻。

牛頓在《 流數簡論 》中， 事實上以速度形式引進了流數概念， 但未使用 “流數” 這一術語。 他提出流數計算的基本問題如下：

(a) “設有二個或更多個物體 A、 B、 C、 $\cdots$ 在同一時刻內描畫線段 x、 y、 z、 $\cdots$。 已知表示這些線段關係的方程， 求它們的速度 p、 q、 r、 $\cdots$ 的關係。”

(b) “已知表示線段 x 的運動速度 p、 q 之比 p/q 的關係方程， 求另一線段 y。”

牛頓對多項式情形給出 (a) 的解法： “將所有的項移至方程一邊， 使其和等於零。 第一步， 各項乘以 p/x 的與該項中 x 的冪次相等的倍數。 第二步， 各項乘以 p/y 的與該項中 y 的冪次相等的倍數。 第三步 (如果有三個未知量的話)， 各項乘以 r/z 的與該項中 z 的冪次相等的倍數。 (若還有更多的未知量， 則依次類推。) 令所有乘積之和等於零， 此方程就給出了速度 p、 q、 r、 $\cdots$ 的關係式。” 這就是說， 對多項式 $f(x、y) = \sum a_{ij}x^iy^j = 0$ 問題 (a) 的解爲

$$\sum \left(\frac{ip}{x} + \frac{iq}{y}\right) a_{ij}x^iy^j = 0$$

爲了 “證明” 上述結果， 牛頓採用了時間 t 的無窮小瞬 o 的

概念，並指出：“正如速度爲 P 的物體 A 在某一瞬描畫的無窮小線段爲 $p\times o$，速度爲 q 的物體 B 在同一瞬內將描畫出線段 $q\times o\cdots\cdots$，這樣，若在某一瞬已描畫的線段是 x 和 y，則至下一瞬它們將變成 $x+po$ 和 $y+qo$。” 牛頓分別以 $x+po$ 和 $y+qo$ 代換方程中的 x 和 y，例如在方程 $x^3-abx+a^3-dyy=0$ 中作這樣的代換後，牛頓利用二項展開得

$$\begin{aligned}&x^3+3pox^2+3p^2o^2x+p^3o^3-dy^2\\&\quad-2dqoy-dq^2o^2-abx-adpo+a^3=0\end{aligned}$$

消去和爲零的項 $(x^3-abx+a^3-dyy=0)$，剩下

$$3px^2o+3p^2xo^2+p^3o^3-2dqoy-dq^2o^2-abpo=0，$$

以 o 除之得

$$3px^2+3p^2xo^2+p^3o^3-2dqy-dq^2o^2-abp=0。$$

此時牛頓指出 “其中含 o 的那些項爲無限小”，略之得 $3px^2-abp-2dqy=0$ 即欲求證的解。

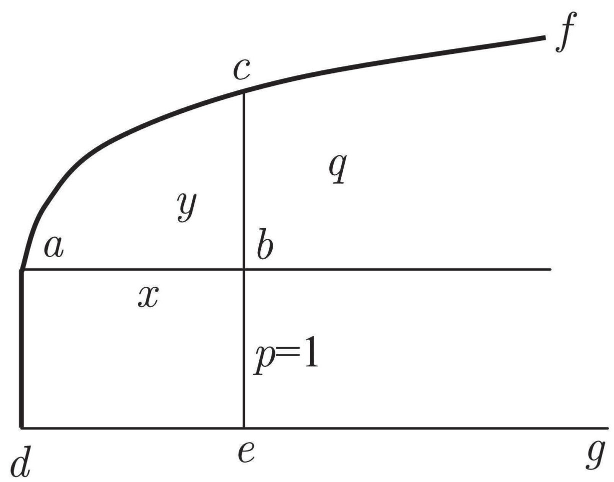

圖 1

對於問題 (b)，牛頓給出的解法實際上是問題 (a) 的解的反運算。特別重要的是，《流數簡論》中有一個問題討論了如何藉助於這種反運算來求面積，從而建立了所謂“微積分基本定理”。

牛頓是這樣推導微積分基本定理的：如圖 1，設 $ab=x$、

$\triangle abc = y$ 爲已知曲線 $q = f(x)$ 下的面積。 作 $de//ab\perp ad//be = p = 1$， 當垂線 abe 以單位速度向右移動時， ed 掃出面積 $\square aded = x$， 變化率 $dx/dt = p = 1$， cb 掃出面積 $\triangle abc = y$， 變化率 $dy/dt = q$， 由此得 $\dfrac{dy}{dt}/\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{q}{p} = q = f(x)$， 則利用問題 (b) 的解法可求出面積。 作爲例子， 牛頓算出縱坐標爲 $q = x^n$ 的曲線下的面積是 $x^{n+1}/(n+1)$。 反之， 縱坐標爲 $x^{n+1}/(n+1)$ 的曲線其切線斜率爲 x^n。

在牛頓以前， 面積總是被看作無限小不可分量之和。 牛頓卻從確定面積變化率入手通過反微分計算面積。 面積計算可以看成是求切線的逆過程， 這事實以往雖然也曾被少數人 (如牛頓的老師巴羅) 模糊地猜測到， 但只有牛頓有足夠的敏銳與能力將這種互逆關係作爲一般規律明確揭示出來。 不僅如此， 牛頓在《流數簡論》中還指出： “一旦 (反微分) 問題可解， 許多問題也都將迎刃而解”。 《流數簡論》的其餘部分就用大量篇幅討論正、 反微分運算的各種應用， 處理了求曲線的切線、 曲率、 拐點、 曲線求長、 求積、 求引力與引力中心等共十六類問題， 展示了牛頓的算法的普遍性與系統性。

向不可分量觀點的搖擺　《流數簡論》標誌著系統的微積分算法的誕生， 當然在許多方面是不成熟的。 在完成這部著作後， 牛頓於 1667 年春返回劍橋， 從那時起直到 1693 年大約四分之一世紀的時間裡， 牛頓始終不渝努力改進、 完善自己的微積分學說，《分析學》是這條道路上的第一個脚印。

1669 年 7 月， 正當巴羅考慮辭去盧卡斯教授職位之際， 牛頓交給他一篇題爲《用無限多項方程的分析學》(*De Analysi per Aequationes Infinitas*， 簡稱《分析學》) 的論文手稿。巴羅閱後立即函告當時皇家學會的數學顧問 J. 科林斯 (Collins) 道： “此間一位朋友數日前交給我一篇文章， 其中提出了計算量的冪次的方

法，與 N. 墨卡托 (Mercator) 先生處理雙曲線的方法相仿但卻更爲一般；…… 這位朋友是研究這方面問題的卓越天才。” 幾天後，巴羅便將這份手稿寄給了科林斯，科林斯複製的副本從此保存在皇家學會，但《分析學》直到 1711 年才正式發表。

《分析學》是牛頓爲了維護自己在無窮級數方面的優先權而作。1668 年 9 月，蘇格蘭學者墨卡托發表了《對數技術》(*Logarithmotechnia*) 一書，其中陳述了對數級數，這促使牛頓公佈自己關於無窮級數的成果。與此同時，牛頓在《分析學》中利用這些級數來計算面積、積分、流數以及解方程等，因此《分析學》體現了牛頓的微積分與無窮級數方法的緊密結合的特點。

關於微積分本身，牛頓在《分析學》中不失時機地對自己的方法作了簡短說明。論文一開始就敍述了計算曲線 $y = f(x)$ 下面積的法則。其中法則 I 指出若 $y = ax^{m/n}$，則所求面積爲 $z = \frac{na}{m+n}x^{(m+n)/n}$。在論證時，牛頓取 x (而不是時間 t) 的無窮小瞬 o，並以 $x+o$ 代 x，以 $z+oy$ 代 z，則

$$z + oy = \frac{na}{m+n}(x+o)^{(m+n)/n} \text{。}$$

用二項定理展開後，以 o 除方程兩邊，略去含 o 的項即得 $y = ax^{m/n}$。反過來，就知曲線 $y = ax^{m/n}$ 下的面積是

$$z = \frac{na}{m+n}x^{(m+n)/n} \text{。}$$

牛頓接著給出了另一條法則：若 y 值是若干項之和，那麼所求面積就是由其中每一項得到的面積之和，這相當於逐項積分定理。

與 1666 年 10 月《流數簡論》不同，牛頓在《分析學》中迴避了流數概念及其運動學背景。《分析學》使用的無窮小瞬 o 的概念在性質上是含糊的，牛頓有時直截了當地令其爲零，因而帶上了濃厚的不可分量色彩。

成熟的流數法　《分析學》是急就章，兩年後牛頓又寫了一部論述流數的專著—《流數法與無窮級數》(*The method of fluxions and infinite series*，簡稱《流數法》)。《流數法》可以看作是 1666 年 10 月《流數簡論》的直接發表。牛頓在其中又恢復了運動學觀點，但對於以物體運動速度爲原型的流數概念作了進一步提煉。正是在這部著作中，牛頓首次使用了 “流數”(fluxion) 這一術語。他後來對《流數法》中的流數概念作了如下解釋：

“我把時間看作是連續的流動或增長，而其它量則隨著時間而連續增長。我從時間的流動性出發，把所有其它量的增長速度稱之爲流數，又從時間的瞬息性出發，把任何其它量在瞬息時間內產生的部分稱之爲瞬。”(原始文獻 [9]，Vol. III，17。)

《流數論》以清楚的流數語言表述微積分的基本問題爲：“已知流量間的關係，求流數關係”，以及反過來 “已知表示量的流數間的關係的方程，求流量間的關係”。與《流數簡論》類似，牛頓從時間的無窮小瞬 o 出發來推導其流數算法。

流數語言的使用使牛頓的微積分算法在應用方面獲得了更大的成功。以極大、極小值的確定爲例，牛頓藉流數概念給出了下述法則：“一個量在取極大或極小值的一瞬，它既不向前也不向後流動；因爲如果它向前流動或增加的話，那麼它就比原來大，並將變得更大；反之，若它向後流動或減少的話，情況恰好相反。因此，(用前述方法) 求出它的流數，並且令此流數等於零”，這相當於通過方程 $f'(x) = 0$ 來求函數 $f(x)$ 的極值點。

《流數法》雖脫稿於 1671 年，但直到 1736 年才正式發表，當時牛頓已經去世。該書原用拉丁文寫成，第一版卻是英文本，由 J. 科爾森 (Colson) 根據 W. 瓊斯 (Jones) 的拉丁文抄本譯出。須要指出的是，瓊斯的抄本在符號上沒有忠於原作。《流數論》拉丁文原稿中並未出現帶點流數記號，而是仍以字母 l、m、n、r 等表示變量 v、x、y、z 等的流數。這種表述形式使流數方法不易

被讀者理解，故瓊斯抄本便將原稿中所有表示流數的字母統統換成當時已廣為使用的標準點記號 $\dot{v}$、$\dot{x}$, $\dot{y}$、$\dot{z}$ 等。科爾森的英譯本及後來的各種版本《流數法》均沿襲了瓊斯的做法，這釀成了後人以為牛頓本人在《流數法》中已引進標準流數記號的誤解。

《曲線求積術》與首末比方法　無論是《分析學》還是《流數法》，都是以無窮小量作微積分算法的論證基礎，所不同的是：在《流數法》中變量 x、y 的瞬 $p\times o$、$q\times o$ 隨時間瞬 o 而連續變化，而在《分析學》中變量 x、y 的瞬則是某種不依賴於時間的固定的無窮小微元。大約到八十年代中，牛頓關於微積分的基礎在觀念上發生了新的變革，這就是 "首末比方法" 的提出。首末比法最先以幾何形式在《自然哲學的數學原理》中公佈，其詳盡的分析表述則是在《曲線求積術》(*De quadratura curvarum*) 中給出的。在牛頓所有的微積分論文中，《曲線求積術》寫作最晚但發表最早，關於其具體撰寫日期，過去一般認為是在 1676 年，現已弄清，牛頓是在 1691 年才寫成這部著作，最初擬作為他的未完成著作《幾何學》(*Geometria*) 的第二卷，後來改變計劃而作為《光學》的附錄於 1704 年公諸於世。

《曲線求積術》可以看作是牛頓最成熟的微積分著述。在這裡，牛頓迴避了無窮小量並批評自己過去那種隨意忽略無窮小瞬 o 的做法："在數學中，最微小的誤差也不能忽略。…… 在這裡，我認為數學的量不是由非常小的部分組成的，而是用連續的運動來描述的。" 在此基礎上定義了流數概念之後，牛頓寫道："流數之比非常接近於在相等但卻很小的時間間隔內生成的流量的增量比，確切地說，它們構成初生增量的*最初比*，但可用任何與之比例的線段來表示。" 接著牛頓藉助於幾何解釋把流數理解為增量消逝時獲得的*最終比*。他舉例說明自己的新方法如下：為了求 $y = x^n$ 的流數，設 x 變為 $x + o$、x^n 則變為

$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} o^2 x^{n-2} + \cdots\cdots$，構成兩變化的“最初比”：

$$\frac{(x+o)-x}{(x+o)^n - x^n} = 1/nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} ox^{n-2} + \cdots\cdots,$$

然後，“設增量 o 消逝，它們的最終比就是 $1/nx^{n-1}$”，這也是 x 的流數與 x^n 的流數之比。

這就是所謂“首末比方法”，它相當於求函數自變量與應變量變化之比的極限，因而成爲極限方法的先導。

牛頓在《曲線求積術》中第一次引進了後來被普遍使用的流數記號：“用字母 z、y、x、v 表示不定量，並用帶點的同樣字母 $\dot{z}$、$\dot{y}$、$\dot{x}$、$\dot{v}$ 表示其流數或增長速度。同樣有這些流數的流數或變化率，可稱之爲相同量 z、y、x、v 的二次流數，並記作 $\ddot{z}$、$\ddot{y}$, $\ddot{x}$、$\ddot{v}$” 等等。在《曲線求積術》正式發表以前，牛頓這一著名的記法曾於 1693 年首先公佈在沃利斯的《代數學》(*De algebra tractatus*) 新版本中。

《原理》與微積分　牛頓微積分方法的第一次公開表述，出現在 1687 年《自然哲學的數學原理》之中。

《原理》中並沒有明顯的分析形式的微積分運算。整部著作是以綜合幾何的語言寫成。但牛頓在第一卷第一章開頭部分通過一組引理 (共 11 條) 建立了“首末比方法”，這正是他後來在《曲線求積術》中作爲流數運算基礎而重新提出的方法，不過在《原理》中“首末比方法”本身亦強烈地訴諸幾何直觀。

第一卷的引理 I “量以及量之比，若在一有限時間內連續趨於相等，並在該時間結束前相互接近且其差可小於任意給定量，則它們最終亦變爲相等”，可以看作是初步的極限定義。在隨後的引理中牛頓便藉極限過程來定義曲邊形的面積：如圖 2，在曲線 acE 與直線 Aa、AE 圍成的圖形 $AacE$ 中內接任意個的矩形 $ABbK$、

$BCcL$、$CDdM$、$\cdots$，且同時作矩形 $aKbl$、$bLcm$、$cMdn$、$\cdots$。牛頓首先假設所有的底邊 AB、BC、CD、DE、$\cdots$ 皆相等，證明了 “當這些矩形的寬無限縮小而它們的個數無限增加時，$\cdots\cdots$ 內接形 $AKbLcMdD$、外接形 $AalbmcndoE$ 與曲線形 $AabcdE$ 相互的最終比是等量比。” 然後指出當矩形之寬互不相等 (如圖設最大寬度爲 AF) 但都無限縮小時，上述最終比仍是等量之比。牛頓還證明了：給定曲線弧 $\overset{\frown}{AB}$ 以及相應的弦和切線段，當點 A 與 B“相接近而最終相合時”，“弦、弧及切線間相互的最終比爲等量比”$\cdots$ 等等。

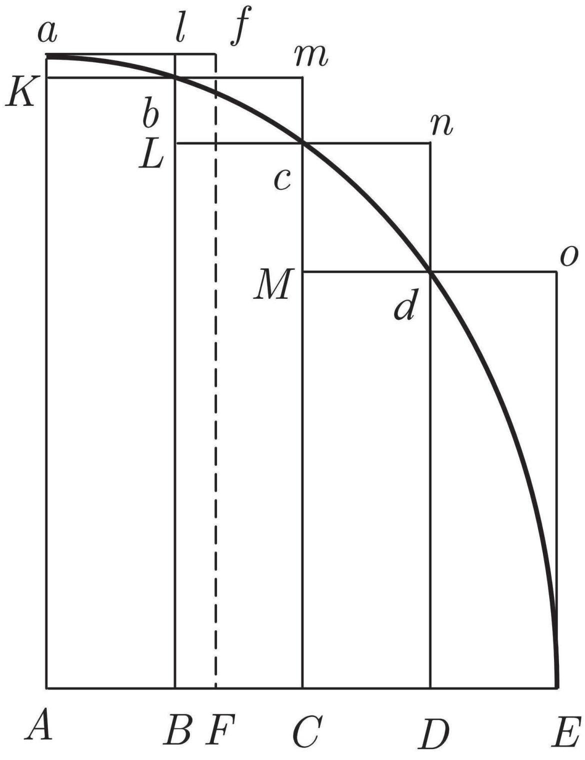

圖 2

牛頓在第一卷第一章評註中說他 “提出這些引理作爲前提，以避免古代幾何學家所使用的繁瑣的歸謬法”。另一方面牛頓又闡明了首末比法與不可分量法的區別：雖然 “此處所做的事情與用不可分量法所做的一樣，但現在這些原理是經過證明的，我們可以更放心地使用它們。所以，如果我偶而將量看作由許多微小元素組成，或是用微小的曲線來代替直線的話，我的意思不是指不可分量，而是指消逝的可分量；不是指確定部分的和與比，而是指和與比的極限”。

牛頓預見到首末比方法可能遭受的批評，並意識到爭論的焦點將在於 “最終比” 概念。爲了答復這類批評，他在前述引理的評註中對於什麼是 “最終比” 作了進一步說明：” 消逝量的最終比實際上並非最終量之比，而是無限減小的量的比所趨向的極限。它們無

限接近這個極限， 其差可小於任意給定的數， 但卻永遠不會超過它， 並且在這些量無限減小之前也不會達到它。”

儘管《原理》表現出以極限方法作爲微積分基礎的強烈傾向，但並不意味著牛頓已完全摒棄無窮小觀點。 在第二卷第二章中，人們可以看到無窮小瞬方法的陳述。 該章引理 II 指出：“任何生成量 (genitum) 的瞬， 等於生成它的各邊的瞬乘以這些邊的冪指數及係數並逐項相加。” 此處所謂 “生成量”， 即雛形的函數概念。 牛頓說明這類量的例子有 “積、 商、 根 $\cdots\cdots$” 等， 並把它們看成是 “變化的和不定的”； 生成的瞬則是指函數的微分。 因此， 上述引理實際上相當於一些微分運算法則。 例如， 牛頓分別以 a、 b、 c、 $\cdots$ 表示任意量 A、 B、 C、 $\cdots$ 的瞬， 他證明了 AB 瞬等於 $aB + bA$、 A^n 的瞬等於 naA^{n-1}、 A^{-n} 的瞬等於 $-naA^{-n-1}$， 一般冪 $A^{n/m}$ 的瞬等於 $\dfrac{n}{m}aA^{(n-m)/m}$ 等等。 牛頓在評註中宣稱， 引理 II 包含了他早年一般流數法的基礎。

《原理》在創導首末比方法的同時保留了無窮瞬， 而其中對 “瞬” 概念的解釋所使用的語言仍然是含混的 — 牛頓說：“有限元素不是瞬， 而是瞬所生成的量。 我們應把它們想像成有限量的初生元。” 牛頓的這種做法常常被認爲自相矛盾而引起爭議。 實際上， 在牛頓的時代， 建立微積分嚴格基礎的時機還遠不成熟， 在這樣的條件下， 牛頓在大膽創造新算法的同時， 堅持對微積分基礎給出不同的解釋， 說明了他對微積分基礎所存在的困難的深邃洞察和謹愼態度。

《原理》將幾何形式的微積分用於引力、 流體阻力、 聲、 光、 潮汐、 彗星乃至宇宙體系， 充分顯示了這一新數學工具的威力， 爲微積分的應用開闢了廣闊的前景。 牛頓在這樣做時實際上獲得了一些微分方程的解， 後來有一批數學家致力於將牛頓的動力學工作翻譯成分析的形式， 推動了十八世紀常微分方程的研

究。 牛頓本人在個別場合也曾以分析形式處理過若干微分方程。

優先權爭論　在微積分的發明上， 牛頓需要與萊布尼茨分享榮譽。 萊布尼茨從 1684 年開始發表微積分論文。 當牛頓 1687 年在《原理》中首次公佈流數方法時， 曾加有這樣一段評註：

> “十年前， 我在給學問淵博的數學家萊布尼茨的信中曾指出： 我發現了一種方法， 可用以求極大值與極小值、 作切線及解決其它類似的問題， 而且這種方法也適用於無理數， …… 這位名人回信說他也發現了類似的方法， 並把他的方法寫給我看了。 他的方法與我的大同小異除了用語、 符號、 算式和量的產生方式以外。 沒有實質性區別。 ”

然而在 1726 年《原理》第三版中， 牛頓卻刪卻了這段文字， 原因是其間他與萊布尼茨關於優先權問題發生了爭執。 爭端最先是由瑞士數學家 N. 法蒂奧 • 德迪勒 (Fatio de Duillier) 1699 年寄給皇家學會的一本小册子引起的， 其中提出 “牛頓是微積分的第一發明人”， 而萊布尼茨作爲 “第二發明人”“曾從牛頓那裡有所借鑑”。 萊布尼茨對此作了反駁， 並在 1705 年爲《教師學報》(*Acta Eruditorum*) 所寫對牛頓《光學》的匿名評論中含蓄地批評牛頓在《曲線求積術》中 “用流數偷換萊布尼茨的微分”。 隨著爭論的展開， 皇家學會遂於 1712 年指定一個專門的委員會進行調查， 並於翌年初公佈了著名的《通報》(*Commercium Epistolicum*)。《通報》宣佈 “確認牛頓爲第一發明人”， 並說 “那些將第一發明人的榮譽歸於萊布尼茨先生的人， 他們對他與科林斯和奧爾登伯格先生之間的通信一無所知”。 直到最近才弄淸， 這份《通報》完全是牛頓本人的手筆。 鑑於委員會主要是由牛頓的朋友 E. 哈雷、 W. 瓊斯、 B. 泰勒 (Taylor) 和 A. 棣莫弗 (De Moiver) 等人組成， 萊布尼茨向皇家學會申訴了調查對他 “不公”。 作爲回答， 他於同年 7 月起草、 散發了一份《快報》(*Cherta Volans*， 牛頓譏之爲 “飛頁”)， 氣憤地指責牛頓 “想獨佔全部功勞”。《快報》還

引用一位“領頭數學家”的判斷說牛頓七十年代所發明的只是無窮級數而不是流數法。所謂“領頭數學家”指的是約翰・伯努利 (Johann Bernoulli)，他是追隨萊布尼茨捲入爭論的歐陸國家數學家的主要代表。當相互指控越演越烈時，一些中立的學者試圖進行調解。據牛頓本人稱：漢諾威選侯 (後英王喬治一世) 訪問英國時，萊布尼茨的一些朋友想充當和事佬，但“他們未能使我屈服”。萊布尼茨 1716 年去世後，由於法國數學物理學家 P. 瓦里克農 (Varignon) 再三斡旋，伯努利首先表示願意和解，年邁的牛頓此時對爭論亦感到厭倦，終於在 1722 年重印《通報》的最後關頭發出了停戰信號：他聽從瓦里克農的勸告刪去了伯努利的名字和一些過激言辭。這場延續了二十餘年的優先權之爭雖然從此逐漸平息，但對十八世紀英國與歐陸國家數學發展上的分道揚鑣產生了消極的影響。

萊布尼茨 1676 年 10 月訪問倫敦期間，曾在皇家學會借閱了牛頓《分析學》手稿抄本並作了摘錄。這成為他涉嫌剽竊的主要事實。但從後來公佈的萊布尼茨筆記本獲知，萊布尼茨當時僅摘錄到有關級數的部分。他也不可能從牛頓在《原理》評註中提到的《後信》中了解流數法的奧秘，因為牛頓在信中只以字謎形式隱述了流數法的基本問題。而在 1693 年 10 月牛頓致函萊布尼茨向他揭露謎底以前，後者始終不解其云。現有充分的資料證實：牛頓和萊布尼茨是各自獨立完成了微積分的發明。就發明時間而言，牛頓先於萊布尼茨，但就發表而言，萊布尼茨則早於牛頓。值得補充的是，儘管發生了糾紛，兩位學者從未懷疑過對方的科學才能。有一則記載說，1701 年，在柏林王宮的一次宴會上，當普魯士王后問到對牛頓的評價時，萊布尼茨回答道：“縱觀有史以來的全部數學，牛頓做了一半多的工作。”

《普遍算術》與代數　1683 年秋，牛頓將自己的盧卡斯代數講義存入了劍橋大學圖書館。牛頓原打算隨即加以修改、發

表， 但 1707 年夏哈雷的訪問打斷了這一計劃， 其後牛頓便將主要精力投入《原理》的寫作。 直到 1707 年， 牛頓的代數講義才經他本人同意由 W. 惠斯頓整理出版， 定名《普遍算術》(*Arithmetica universalis*)。 《普遍算術》初版 (拉丁文) 含有許多錯誤， 牛頓本人頗不滿意， 遂親加校訂並於 1722 年出版了修訂本。

《普遍算術》主要討論代數基礎及其 (通過解方程) 在解決各類問題中的應用。 書中首先陳述了代數基本概念與基本運算， 接著便用大量實例顯示了如何將各類問題化爲代數方程， 同時對方程的根及其性質進行了深入探討， 引出了方程論方面的豐富結果。

像 A. 吉拉爾 (Girard) 和笛卡兒等人一樣， 牛頓未加證明地敍述了代數基本定理。 但《普遍算術》對於虛根 (牛頓稱之爲 "不可能根") 的出現卻作了更深入的考察， 這使牛頓在許多場合能走得比前人遠。

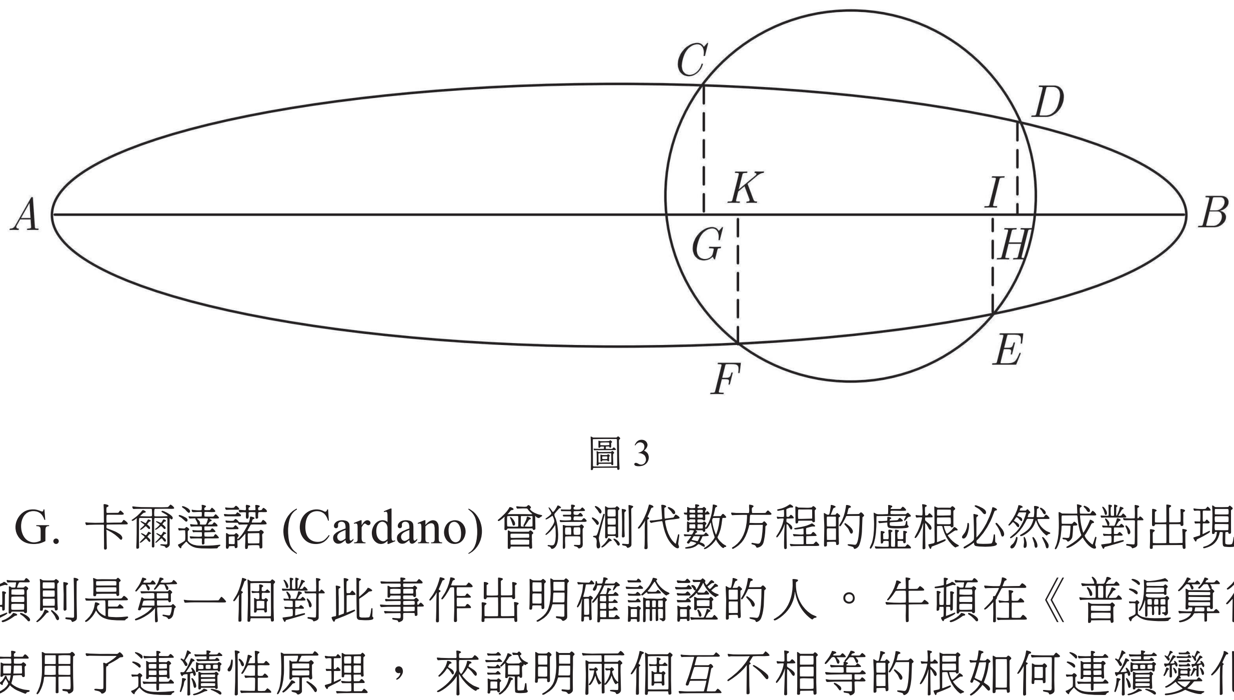

圖 3

G. 卡爾達諾 (Cardano) 曾猜測代數方程的虛根必然成對出現， 牛頓則是第一個對此事作出明確論證的人。 牛頓在《普遍算術》中使用了連續性原理， 來說明兩個互不相等的根如何連續變化爲相等根然後又變爲虛根。 他通過幾何實例來解釋自己的論證： 設圓 $CDEF$ 與橢圓 $ACBF$ 相交於點 C、 D、 E、 F (圖 3)， 由交點向已知直線 AB 引垂線 CG、 DH、 EI、 FK， 若通過求任一垂線之長得到一方程， 則在圓與橢圓相交的四點， 該方程

應有四個實根 (即四條垂線之長)。 但若圓心保持不動而圓徑逐漸縮減， 當點 E 與 F 趨於重合時， 圓與橢圓變爲相切， 則表示現已重合的垂線 EI 和 FK 的兩根亦將變爲相等。 若圓進一步縮小而不再在點 E/F 處與橢圓接觸， 而僅在另二點 C 、 D 處與其相交， 那麼四根中表示現已變得不可能的垂線 EI 和 FK 的那兩個根亦將相應地成爲不可能。 牛頓將這種例證推而廣之， 指出 "在所有方程中， 通過這樣地增加或減小它們的項， 兩不相等根起先趨於相等， 然後變成不可能。 結果是： 不可能根的數目將永遠是偶數"。

牛頓對笛卡兒符號法則的推廣亦在於對虛根情形的分析。 笛卡兒法則是說： 一方程正根最多個數等於係數變號的次數， 負根最多個數則等於兩個 + 號或兩個 – 號連續出現的次數。 正如牛頓指出的那樣， 若方程有虛根， 則上述法則既不能給出眞正的正、 負根個數， 也不能給出虛根的實際個數。 於是牛頓便在《普遍算術》中提出了他自己的改進法則。

牛頓的法則由兩部分組成。 第一部分用來確定虛根個數， 即所謂 "不完全法則"(imcomplete rule)：

對任一 n 次方程，列出分數序列 $\dfrac{n}{1}$ 、 $\dfrac{n-1}{2}$ 、 $\dfrac{n-2}{3}$ 、 $\cdots$ 、 $\dfrac{1}{n}$ 將其中每項分數除以前項分數，所得分數置於方程中間各項上方， 若一中間項平方與其上方分數的乘積大於左右二項之積， 就在該項下方記以 + 號， 否則記以 – 號， 同時在首項與末項下方皆記以 + 號， 那麼虛根個數恰等於下方所記符號變號的次數。 例如方程

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0，$$

按上述法則操作得：

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$$

$$x^3 + px^2 + 3p^2x - q = 0$$
$$+ \quad - \qquad + \qquad +$$

下標的符號序列 + 、 − 、 + 、 + 中包含兩次變號， 故方程有二個虛根。

牛頓法則的第二部分即所謂 “完全法則”(complete rule)， 可藉以進一步確定方程正負根的個數。 根據笛卡兒法則可以判別方程正根的最多個數。 牛頓認爲這中間可能 “隱藏” 著虛根， 並稱其爲 “不可能正根”。 同樣地可以定義 “不可能負根”。 牛頓完全法則是說： 在 “不完全法則” 中得到的方程下標符號序列中， 考察變號上方諸項的符號， 不可能正根的個數恰等於這些項本身的變化次數， 而不可能負根的個數則等於不變號的次數。 例如方程：

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0$$
$$+ \quad + \qquad - \qquad + \qquad + \quad +$$

按 “不完全法則” 操作得到的下標符號序列中變號者爲 + 、 − 、 + ， 這說明有兩個不可能根， 而上方諸項 $-4x^4 + 4x^3 - 2x^2$ 變號二次， 標誌著二個不可能正根。 但因方程本身各項係數符號序列 + 、 − 、 + 、 − 、 − 、 − 中總共有三次變號， 故最多正根個數爲 3， 其中 “隱藏” 兩個不可能根， 結果方程共有一個眞正的正根， 二個負根和二個虛根。

根據現存的牛頓手稿可知， 牛頓早在 1665 − 1666 年間就已發現了他的符號法則。 牛頓法則的證明相當困難， 直到 1865 年才由 J. 西爾維斯特 (Sylvester) 給出第一個嚴格的證明 (西爾維斯特證明了包含牛頓法則爲特例的更普遍的定理)。

《普遍算術》中有關方程論最突出的貢獻或許是表述方程根與係數關係的冪和公式，這公式現以牛頓的名字命名，它爲代數方程根的對稱函數理論奠定了基礎。對於方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

作 n 個根 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 i 次冪和

$$S_i = x_1^i + \cdots + x_n^i \quad (i = 1、2、\cdots、n),$$

牛頓公式相當於

$$\begin{aligned}
&a_0S_1 + a_1 = 0, \\
&a_0S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0, \\
&\quad\cdots\cdots \\
&a_0S_n + a_1S_{n-1} + a_2S_{n-2} + \cdots + na_n = 0。
\end{aligned}$$

牛頓在《普遍算術》中運用上述公式來推算方程的根限。他給出的法則中最重要的一條可用現代語言表述如下：若有方程

$$f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_0 > 0)$$

則每一個使 $f(z)$ 及導數 $f'(z)$、$f''(z)$、$\cdots$、$f^{n-1}(z)$ 皆爲正的數 $z = L$ 必爲 $f(z) = 0$ 正根的上限。類似地可以求出方程負根的下限。牛頓進而討論了如何通過這些極限公式去逼近方程的數值根。

《普遍算術》對於代數本身的見解也有重要的意義。牛頓在前言中寫道：“人們或者像在通常算術中那樣用數字進行計算，或者像分析數學家習慣的那樣藉助普遍變量 (species，直譯“類”) 來進行計算。這兩種運算都依賴於同樣的基礎並服務於同樣的目標，算術採用確定和特殊的方法，而代數則採用不定的和普遍的方法，以致由這種運算得到的所有結論幾乎都可以稱作爲定理。”在這裡，牛頓像 F. 韋達一樣將代數看作是“變量算術”(Arithmetica specisa)，而將通常算術看作是“數字算術”，但他在代數中更加

自由地運用變量， 並主張代數與算術相互結合而形成數學的基礎："在算術中， 問題的解決是從已知量出發逐步推算出未知量。 代數卻相反， 把未知量當作已知量， 並由之出發去反推已知量， 好像這些已知量是要求的量， 最終通過某種方式達到某種結論 — 也就是說某個方程， 而從這方程則可解出眞正的未知量。 這正是代數的優越性。 運用這種技巧， 一些極困難的問題可以迎刃而解， 而這些問題的解決單靠算術是無濟於世的。 不過， 算術運算對代數來說又必不可少。 二者似應相互結合而形成統一的完善的計算科學" — 這就是牛頓 "普遍算術" 的眞諦。 牛頓的觀點在當時英國反響不大， 卻很快吸引了歐洲大陸數學家的注意 (這同微積分情形成對照)。 1707 年 11 月間約翰 • 伯努利致函萊伯尼茨說他 "正急切地盼望能讀到一本書， · · · 此書篇幅不大， 但卻大大勝過了法國出版的同類巨卷著作"。 伯努利指的就是剛出版的《 普遍算術 》。 《 普遍算術 》後來成爲發行最多的牛頓數學著作， 對於十八世紀數學中代數與分析方法優勢的確立頗有影響。

幾何研究　　牛頓對解析幾何與綜合幾何兩方面都有貢獻。

1664 年秋， 牛頓在學習掌握笛卡兒《 幾何學 》時， 即已面臨大多數同時代數學家所關心的問題： 描繪大量尙屬未知的曲線並研究它們的性質。 這方面的探討導致了他在解析幾何領域最重要的工作。

自阿波羅尼奧斯 (Apollonious) 時代起， 希臘數學家已對圓錐曲線作了透徹的研究， 笛卡兒在《 幾何學 》卷 2 中將希臘人的綜合工作翻譯成了解析語言。 然而對於高次曲線， 無論古希臘人還是笛卡兒卻都知之不多。 希臘人將所有高於二次的曲線統稱爲 "線性曲線" (linear line)， 對此他們只給出了個別實例如蚌線 (conchoid)、 蔓葉線 (cissoid)。 笛卡兒向他的同時代人展示了三叉線 (trident) 和葉形線 (folium)， 其後數十年間， 數學家們新認識的三次曲線總共只增添了二種， 即沃利斯的立方拋物線與 W. 尼爾

(Neile) 的半立方抛物線。 在牛頓之前， 也沒有人能夠像把非退化二次曲線分成橢圓、 雙曲線與抛物線那樣對三次曲線分類。 牛頓從 1664 年起試圖追隨笛卡兒按方程次數對曲線分類的思路來解決這一課題。 1667 − 1668 年和 1678 − 1679 年間， 他又兩度回到高次曲線的研究並獲重大進展。 但如其一貫所爲， 牛頓遲疑於結果的發展， 直到 1695 年， 他才將以前的結果總結成專論《三次曲線枚舉》(*Enumeratio linearum tertii ordinis*) 並作爲《光學》的附錄發表 (1704)。

《三次曲線枚舉》首先根據平面曲線與直線相交所產生的交點數來定義曲線的階， 同時指出圓錐曲線的許多概念與性質可以被推廣至高次曲線。 例如牛頓提出了適合高次曲線的一般直徑理論 (在這理論中 n 次曲線的直徑被定義爲該曲線與一平行直線族中每一條 n 個交點的重心軌跡) 和一般漸近線理論等。 《三次曲線枚舉》的這個引論部分以著名的“牛頓定理”爲高潮， 牛頓定理相當於說： 平面上的點關於一三次曲線的三個縱坐標之積與相應的三橫坐標之積保持常數比。

在上述一般性討論之後， 牛頓便轉向其理論的精粹 — 三次曲線分類。 他注意到任一三次曲線至少有一個實漸近方向， 取與此方向平行的直線爲坐標軸之一， 牛頓導出了三次曲線方程的四類基本形式：

$$\textbf{(i)}\ \ xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d\text{，}$$

$$\textbf{(ii)}\ \ xy = ax^3 + bx^2 + cx + d\text{，}$$

$$\textbf{(iii)}\ \ y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d\text{，}$$

$$\textbf{(iv)}\ \ y = ax^3 + bx^2 + cx + d\text{。}$$

它們分別相應於一般立方雙曲線、 笛卡兒三叉線、 發散抛物線 (牛頓用語) 和立方抛物線。 牛頓並未證明這四類方程窮舉了一切可能 (1729 年法國數學家 F. 尼科爾 (Nicole) 證明了這一點)。 對

第 (i) 和第 (iii) 類情形牛頓又區分出許多子類， 結果他總共列舉了 72 種三次曲線。 對此後來 J. 斯特靈 (Stirling， 1717)、 G. 克萊姆 (Cramer， 1746) 等人又追加了六種。 數學家還發現了其它不同的對高次曲線分類的原則。

除了分類， 牛頓在《三次曲線枚舉》中還將圓曲線的射影定義推廣到高次曲線， 他大膽地指出：“正像所有的圓錐曲線都可看作是圓的投影一樣， 所有的三次曲線都可以看作是五種發散拋物線 (即方程 $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 確定的曲線) 的投影。” 這個重要的事實到 1713 年才由 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 嚴格證明。

《三次曲線枚舉》是解析幾何發展新的一頁。 以往只了解少數特例的三次曲線， 現在可以從整體上進行分類並考察其性質， 這激發了包括克萊姆、 歐拉直到十九世紀的 J. 普呂克 (Plücker) 等人對高次代數曲線的系統研究。

牛頓關於解析幾何的工作在他的《流數法》一書中也有大量記述 (該書拉丁文本最初甚至用名《解析幾何》， 其中最重要的是各種坐標系的採用。 牛頓在用流數法計算切線問題時指出：“作切線可用不同的方法， 這取決於曲線與直線的不同關係”， 他所說的 “曲線與直線的不同關係”， 意味著不同的坐標系。 事實上， 牛頓在《流數法》中引進了九種不同的表示曲線上任意點 D 的坐標 “模式” (mode)， 其中 “模式 3” 與 “模式 7” 分別爲雙極坐標系與一般極坐標系。 以一般極坐標爲例， 牛頓是在求作所謂 “機械曲線” (mechanical curve， 即超越曲線) 的切線過程中引進的。 如圖設有曲線 ADE、 $\overset{\frown}{BG}$ 是以定點 A 爲圓心， AG 爲半徑的圓弧， 牛頓將曲線 ADE 看作是當 AG 繞中心 A 旋轉時其上一點 D 的移動軌跡。 令 $\overset{\frown}{BG} = x$、 $AD = y$， 則曲線由 x 與 y 間的一個方程 $f(x、 y) = 0$ 確定， 於是可用流數法求出 x 與 y 的流數關係並據以確定切線 DT 的位置 (實際上， 藉助一些初等幾何的推導， 牛頓獲

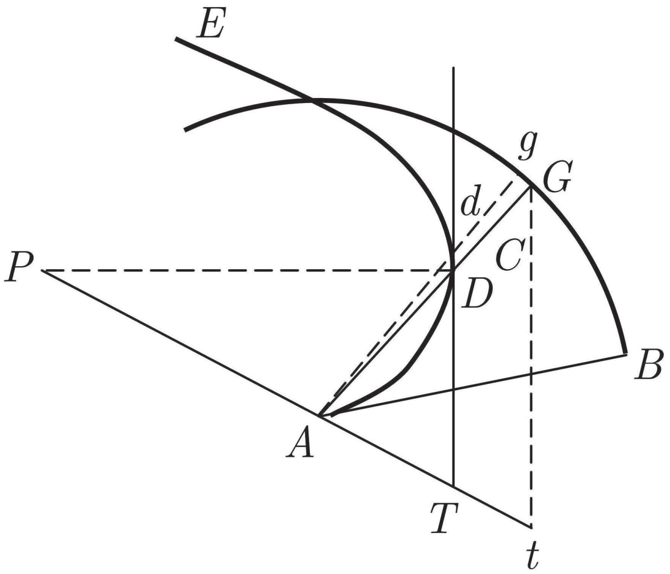

圖 4

得流數之比 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{CD}{Gg} = \dfrac{AD}{At}$，其中 $CD = AC - AD = Ad - AD$ 與 Cg 爲 D 沿曲線作無限小移動至 d 時，AD 與 $\overset{\frown}{BG}$ 之相應增量，故 $At = AD\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$，由此可確定 Gt，而切線 $DT//Gt$)。很清楚這一模式中牛頓所使用的參量 $x(\overset{\frown}{BG})$ 和 $y(AD)$ 即極坐標中的幅角與矢徑。他還以極坐標形式給出了阿基米德螺線和費馬螺線的方程：$ax/b = y$ 和 $x^2 = by$。因此，牛頓毫無疑問是極坐標(包括雙極坐標) 的創始人。極坐標後又爲雅格布・伯努利 (Jacob Bernoulli) 獨立引進 (1691)。

牛頓對古典幾何的研究則開始較晚。在七十年代後期，牛頓表現出探索古希臘幾何寶庫的巨大熱情。這方面的具體背景尚待探明，D. 懷特賽德 (Whiteside) 認爲主要是受到笛卡兒《幾何學》中關於帕波斯問題的論述 (牛頓在準備盧卡斯代數講義過程中又重研了笛卡兒《幾何學》) 以及費馬對兩部失傳希臘幾何著作－阿波羅尼奧斯《平面跡線》(*Plane loci*) 和歐幾里得《衍論》(*Porisms*) 的考證論文 (1679) 的激勵。這導致了牛頓古典幾何研究的高產時期 (特別

是 1678 − 1679 年間) 。 從現存牛頓手稿看， 這一時期最有代表性的作品是《古代立體軌跡問題求解》(*Solutio problem atis veterum de loco solido*， 以下簡稱《立體軌跡》)。

《立體軌跡》是一篇由 13 個命題組成的短論， 其中心結果是關於帕波斯問題的解答。 所謂帕波斯問題是說：

已知三 (或四) 條直線， 求一點之軌跡， 使由該點向這些直線所引與其成已知交角 (不同直線可有不同交角) 的三 (或四) 線段中， 二線段之乘積與另一線段之平方 (或另二線段之乘積) 成定比。 此軌跡通稱三 (或四) 線軌跡。 (圖 5 所示爲四線情形， 其中 $\dfrac{PQ\times PR}{PS\times PT}=$ 常數， 相當於交比 $P(ACDB)$。)

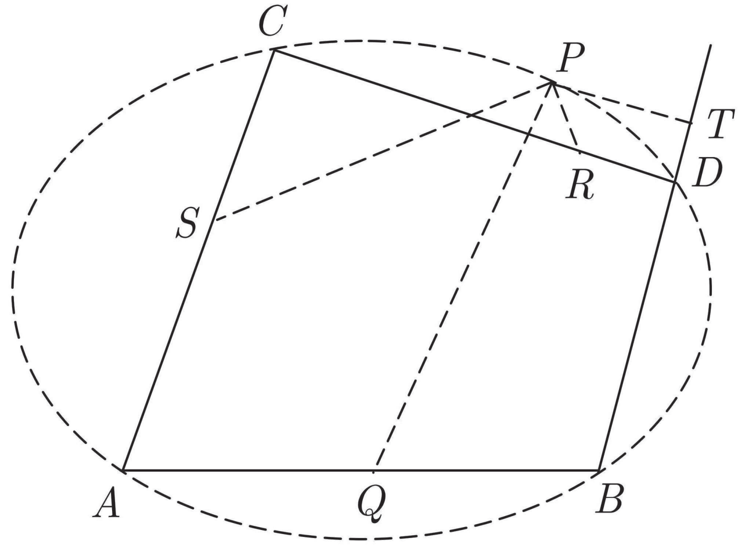

圖 5

帕波斯和阿波羅奧斯都已猜測到三 − 四線軌跡爲圓錐曲線， 但未能作出證明。 笛卡兒在《幾何學》中用解析方法證實了希臘人的猜測， 而牛頓《立體軌跡》則在歷史上第一次用綜合法確立了三 − 四線軌跡與圓錐曲線的等價性 (命題 1、 2)。 利用此種等價性， 牛頓以全新的本質上是射影的方式重新定義圓錐曲線。《立體軌跡》命題 5 證明了：圓錐曲線上四點 A、 B 、 C 、 P， 過 P 作 $PQ//AC$ 、 $PS//AB$， 且分別交 AB 、 AC 於 Q 、 S， 若對曲線上任何第五點 D， 連接 DB 、 DC， 分別交 PQ 、 PS 於

R、T，則 PR 與 PT 之比恆爲常數。反之，若 PR 與 PT 成定比，則點 D 必落在過 A、B、C、P 之圓錐曲線上 (圖 6)。不難看出，這相當於將圓錐曲線定義爲兩個分別會聚於確定極 B 與 C 的線束 $B(D)$ 與 $C(D)$ 的交點 D 的軌跡，而線束 $B(D)$、$C(D)$ 通過某作平移動的直線 (l) 與已知角 UPQ 兩邊相交所得的點偶 $(R$、$T)$。對此，《立體軌跡》命題 12 又作了基本的推廣：一軌跡線是圓錐曲線，當且僅當它能作爲二線束 (分別具有確定極) 的交點集畫出，這二線束可通過某種 “單幾何” (simple geometry) 來相互確定。牛頓所謂的 “單幾何”，實質是點集與點集、點集與線集之間的一一對應。《立體軌跡》的其它一些命題用相當篇幅討論了這種一一對應理論。牛頓後來對高次曲線的射影分類即以此爲基礎。他將那些可在射影下相互變換的圖形看成一類，並提供了相應的作圖技巧 (這方面的內容後構成《原理》中專門的一節 — 第一卷引理 XXII“將圖形變換成同類的其它圖形”) 。

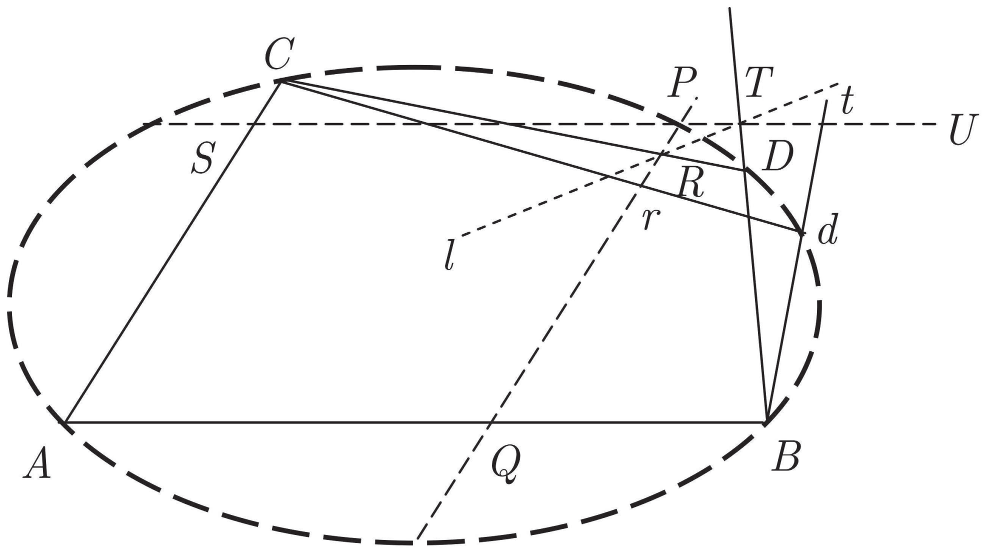

圖 6

牛頓的上述工作超越了他的時代，預示著十九世紀以 J.V. 龐斯列 (Poncelet)、J. 施泰納 (Steiner) 和 M. 夏斯萊 (Chasles) 等爲代表的綜合射影幾何的復興。牛頓本人並未意識到這一點，他像大多數前輩一樣將自己所獲得的結果納入歐幾里得幾何的框架。《立體軌跡》並未正式發表，但其中絕大部分命題後來都被載入《原

理》(第一卷第五章“論焦點均未知時求軌跡之法”。《原理》還包括了牛頓關於古典幾何的其它許多優美的定理。這些純幾何的結果成爲《原理》數學論證的基礎。

九十年代初，牛頓曾想集一生幾何研究之大成而編纂三卷本專著《幾何學》(*Geometria*)，整個計劃未能實現，但一、二卷有手稿留下。牛頓無疑是一位幾何學大師，在這方面，相對於其它領域而言，人們對他的工作了解尚不充分。

數值分析、概率論、挑戰問題 除了微積分、代數與幾何以外，牛頓的數學工作還涉及數值分析、概率論和初等數論等衆多的領域。

現今任何一本數值分析教程都不能不提到牛頓的名字 — 牛頓 − 高斯公式、牛頓 − 斯特靈公式、牛頓 − 拉弗森公式 ⋯⋯，這反映了牛頓對該領域廣泛而卓越的貢獻。

牛頓的插值法研究有兩個來源。第一個來源是追隨沃利斯《無窮算術》尋求內插求積公式的努力，如前所述這導致了二項定理的發現。第二個來源是函數表的計算，這把他引向了有限差分插值理論。

由於實際需要，十七世紀的數學家們熱衷於各種函數表的編制。他們遇到的一個典型問題是如何根據函數二已知值來計算中間值，即插值。1675 年春，一位叫 J. 史密斯 (Smith) 的學者致函牛頓求敎正整數 $1-10000$ 的平方根、立方根及四次方根表的編算，激起了牛頓對此問題的興趣。他在給史密斯的復信 (1675.5.8) 中制定了一種計算開方表的方案：先算出每組 100 個根

$$(100p)^{1/k}\text{，}\qquad 1\le p\le 100\quad (k=2、3、4)\text{，}$$

然後利用一、二、三次調整差分算出每二個值之間的其它 99 個值。在其後撰寫的兩份手稿中，牛頓提出了一系列差分插值公式。這兩份手稿是《差分法則》(*Regula differentiarum*) 和《差分方法》(*Methodus differentialis*) 初稿。據 D. 懷特賽德考均完成於

1676 年左右。

在《差分法則》中，牛頓重新發現了所謂布里格斯 (Briggs，1624) 關係即等間距向前差分公式，並將其推廣到了不等間距情形。牛頓的推導是以 “調整差” (adjusted differences) 爲基礎。如圖 7 所示，對插值結點 A、B、C、D、E、F、G、$\cdots$，牛頓作下列量：

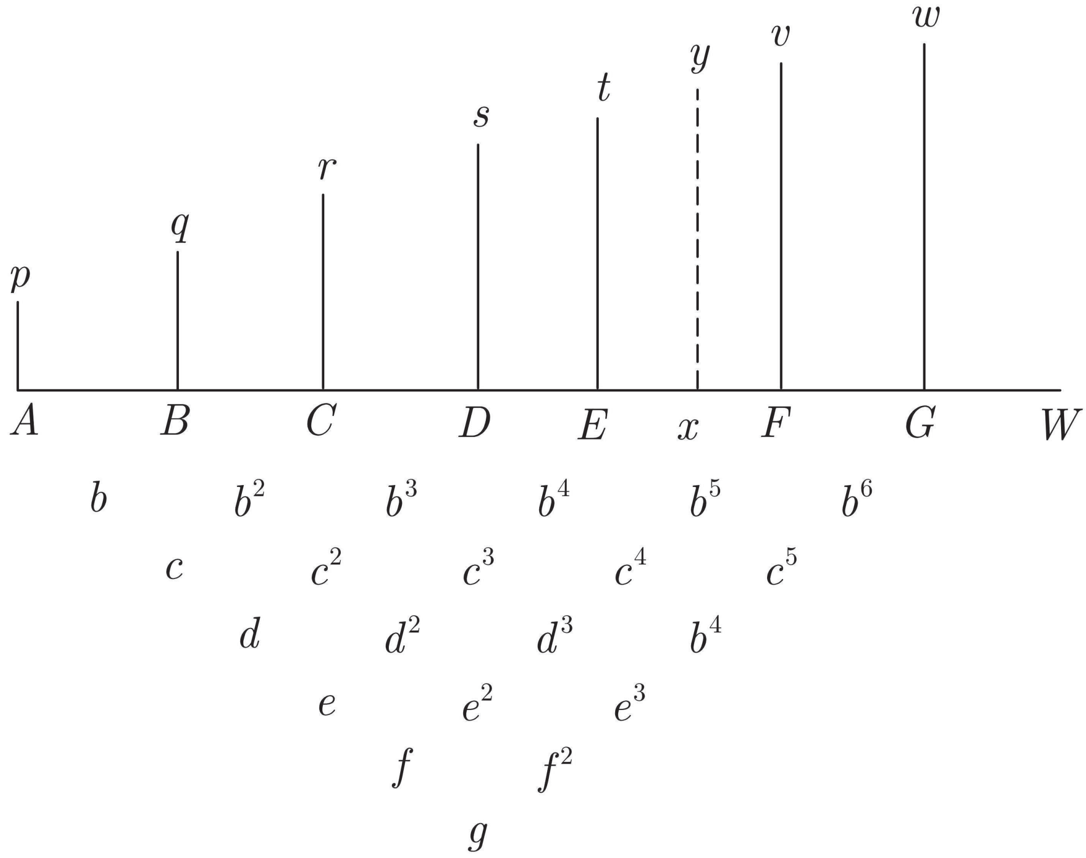

圖 7

$$\frac{A-B}{AB}=b\text{、}\frac{B-C}{BC}=b^2\text{，}\frac{C-D}{CD}=b^3\text{、}\cdots\text{，}$$

$$\frac{b-b^2}{\frac{1}{2}AD}=c\text{、}\frac{b^2-b^3}{\frac{1}{2}BD}=c^2\text{，}\frac{b^3-b^4}{\frac{1}{2}CE}=c^3\text{、}\cdots\text{，}$$

$$\frac{c-c^2}{\frac{1}{3}AD}=d，\quad \frac{c^2-c^3}{\frac{1}{3}BE}=d^2，\quad \frac{c^3-c^4}{\frac{1}{3}CF}=d^3、\cdots，$$

$$\frac{d-d^2}{\frac{1}{4}AE}=e，\quad \frac{d^2-d^3}{\frac{1}{4}BF}=e^2、\cdots，$$

$$\frac{e-e^2}{\frac{1}{5}AG}=f、\cdots，$$

(式中以 A、B、C、D、$\cdots$ 代替相應縱坐標 p、q、r、s、$\cdots$)。此即 n 次調整差的遞推定義，用現代記號表示爲：

$$\Delta^1(x_0、x_1)=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}，$$

$$\Delta^{n+1}(x_0、x_1、\cdots、x_{n+1})$$

$$=\frac{\Delta^n(x_0、x_1、\cdots、x_n)-\Delta^n(x_1、x_2、\cdots、x_{n+1})}{(x_0-x_{n+1})/n}。$$

牛頓取多項式 $f(x)=\sum\limits_{0\leq i\leq n}a_ix^i$ 作爲被插值連續函數的最佳逼近，於是可知 $f(x)$ 之 n 階調整差爲常數。牛頓接下去的做法相當於從 n 階調整差出發逆推，逐項展開差分而得：

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0)+(x-x_0)\Delta^1(x_0、x_1)+\frac{1}{2!}(x-x_0)(x-x_1)\\ &\quad \Delta^2(x_0、x_1、x_2)+\cdots+\frac{1}{n!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots\\ &\quad (x-x_n)\Delta^n(x_0、x_1、\cdots、x_n)+\cdots。\end{aligned}$$

這就是調整差形式的牛頓一般插值公式，其等間距情形有時又稱牛頓－格雷戈里 (Gregory) 公式 (J. 格雷戈里 1670 年曾獨立發現)。

在《差分方法》初稿中，牛頓則建立了中心差分公式。他首先討論了兩種等間距情形。

情形 1. 奇數揷值點。牛頓導出的公式相當於：

$$f(x) = f(0) + \binom{x}{1}\mu\delta_0^1 + \frac{1}{2}x\binom{x}{1}\delta_0^2 + \binom{x+1}{3}\mu\delta_0^3 + \frac{1}{4}x\binom{x+1}{3}\delta_0^4 + \binom{x+2}{5}\mu\delta_0^5 + \cdots$$

(δ_0^α、$\alpha = 1$、2、$\cdots$表中心差分)。

此式後爲 J. 斯特靈重新獲得 (1719)，故又名牛頓－斯特靈公式。

情形 2. 偶數揷值點。導出的公式相當於：

$$f(x) = \mu f(0) + x\delta_0^1 + \binom{x+1/2}{2}\mu\delta_0^2 + \frac{1}{3}x\binom{x+1/2}{2}\delta_0^3 + \binom{x+3/2}{4}\mu\delta_0^4 + \frac{1}{5}x\binom{x+3/2}{4}\delta_0^5\cdots\text{。}$$

現以牛頓－巴塞耳 (Bessel) 公式著稱，R. 科茨 (Cotes) 1708 年也獨立發現此式。

《差分方法》初稿接著便將上述中心差分公式推廣到不等間距情形。值得注意的是，牛頓在《差分方法》初稿中放棄調整而定義了均差 (divided difference)：

$$\begin{aligned} f_1 &= f(x_0\text{、}x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\text{，} \\ f_{\alpha+1} &= f(x_0\text{、}x_1\text{、}\cdots\text{、}x_{\alpha+1}) \\ &= \frac{f(x_0\text{、}x_1\text{、}\cdots\text{、}x_\alpha) - f(x_1\text{、}x_2\text{、}\cdots\text{、}x_{\alpha+1})}{x_0 - x_{\alpha+1}}\text{。} \end{aligned}$$

在此後的有關著述中，牛頓便一概使用均差語言。

根據《差分法則》與《差分方法》初稿的內容，如果說牛頓在 1676 年左右已奠定了近代差分揷值理論的基礎，那並不誇張。但這兩份手稿當時都沒有發表。大約十年後，牛頓才在《原理》中

首次將《差分法則》所獲得的結果公諸於世。《原理》第三卷引理 V ("求作一拋物線使經過若干已知點") 以均差形式陳述了牛頓一般插值公式：

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & f(x_0)+(x-x_0)f(x_0、x_1)+(x-x_0)(x-x_1) \\ & f(x_0、x_1、x_2)+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots \\ & (x-x_n)f(x_0、x_1、\cdots、x_n)+\cdots。\end{aligned}$$

牛頓唯一正式發表關於差分插值法的系統論文《差分方法》，是以上述 1676 年初稿爲基礎修改而成，修改工作遲至 1710 年才進行，1711 年與《分析學》等同時刊載於 W. 瓊斯編輯的牛頓數學短篇論文集 (原始文獻 [4])。與初稿不同的是，正式發表的《差分方法》首先概要證明了牛頓一般插值公式，然後作爲特例給出牛頓－斯特靈公式和牛頓－巴塞耳公式。這體現了牛頓建立統一的差分插值理論的努力。牛頓早在《差分法則》中就表達過這種統一的意向，他在該文最後寫道："還可以提出其它這類法則，但我希望用一個一般的法則來概括所有這些公式。"

代數方程數值求解的迭代方法也以牛頓的名字命名。這方法最先在《原理》第一卷命題 XXXI 中作爲解刻卜勒方程的工具正式公佈，但早在 1669 年前已被發現。牛頓《分析學》中有一例三次方程 $y^3-2y-5=0$，牛頓的解法如下：首先觀察得根的整數部分爲 2，作代換 $y=2+p$，獲方程 $p^3+6p^2+10p-1=0$，略去高次項得 $p\approx 0.1$，再作代換 $p=0.1+q$，獲方程

$$q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=0$$

略去高次項，得 $q\approx -0.0054$，接著繼續此步驟至下一步 $q=-0.0054+r$，求得 $r\approx -0.00004853$，此時 $y\approx 2.09455147$ (末位數應爲 8。牛頓後在《流數法》中作了更正)。容易看出，牛頓的解法相當於對方程 $f(x)=0$ 給出迭代程序

$$E_i(=x_{i+1}-x_i)=-f(x_i)/f'(x_i) \quad (i=1、2、\cdots)，$$

其中 x_i 爲逐次近似根。牛頓的公式後被 J. 拉弗森 (Raphson) 在形式上加以改進並發表在《一般方程分析》(*Analysis aequationum universalis*，1690) 一書中，拉弗森的程序相當於

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i),$$

這就是所謂牛頓－拉弗森公式。

雖然牛頓並未留下任何概率論專作，但在他的許多著述中卻不乏概率論的思想與方法。牛頓早期數學手稿中就有關於概率定義的討論，特別是他 1664－1666 年間對惠更斯《賭博計算》(*Deratiociniis in ludo aleae*) 所作的一份註記中，已出現幾何概率概念，牛頓寫道：

“當機會之比 $\cdots$ 是無理數時，仍可用同樣的方法計算期望值，設半徑 ab、ac，將水平圓面 bcd 分成 $abec$ 和 $abdc$ 兩部分 (如圖 8)，其面積之比爲 $2:\sqrt{5}$。一小球向圓心 a 垂直下落，若它落在 $adec$ 部分，我贏得 a；若它落在另一部分，則贏得 b，此時期望值等於 $\dfrac{2a+\sqrt{5}b}{2+\sqrt{5}}$。”

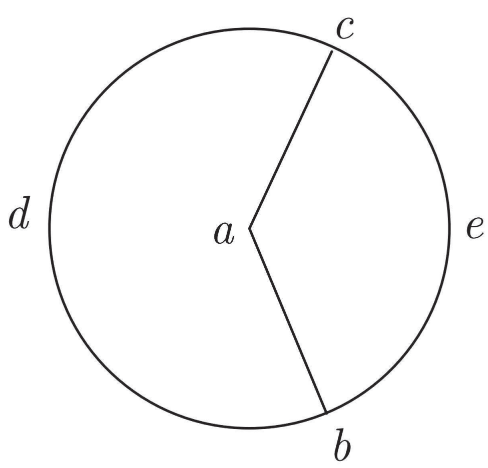

圖 8

這說明牛頓引用了幾何概率來處理機會的無理數比，可能是目前所了解的關於幾何概率的最早記載。此外，牛頓在編年學研究《古代王國修正編年》(*Chronology of ancient kingdoms amended*，1728) 中藉概率原理從考古數據來推斷古代王朝年代，其方法觸及大數律基礎。在牛頓的天文和光學著作中，還有大量與誤差有關的論述。牛頓在古典概率論方面的工作對同時代的棣莫弗和後來的拉普拉斯等人不無影響。

牛頓 1696 年到造幣局任職後，基本上停止了創造性的數學研究活動。即使這樣，他身上仍然閃耀著偉大數學家智慧的光

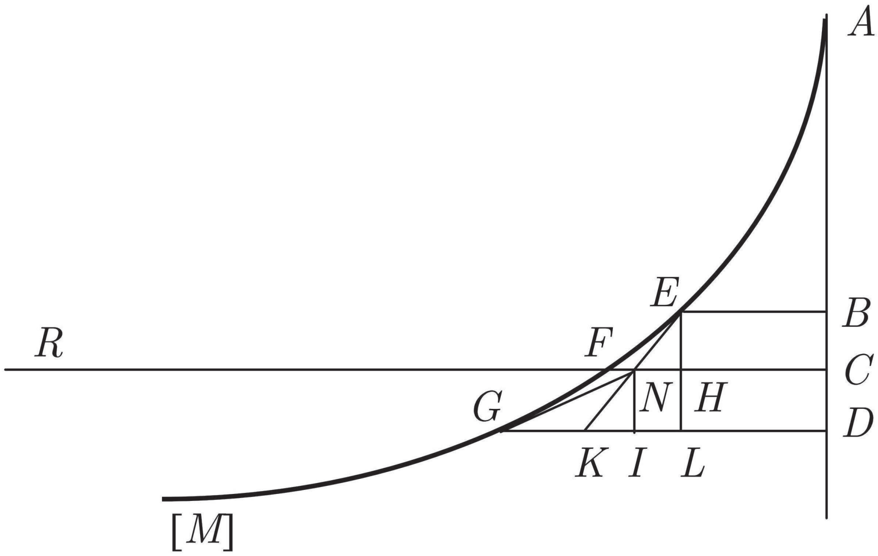

圖 9

華。牛頓晚年曾兩次面對波及全歐的數學挑戰。第一次是約翰• 伯努利於 1696 年 6 月在《教師學報》(*Acta eruditorum*) 上提出的。問題有兩個，第一問題即最速降落線問題：求一曲線 AEG 使重物在自身重力作用下將沿此曲線由已知點 A 最速降落至點 G。問題提出後半年仍未解決，伯努利遂於 1697 年元旦發表著名的 “公告” (Programma)，再次向 “全世界最能幹的數學家” 挑戰。1 月 29 日牛頓從造幣局下班回到寓所時，發現了一封法國來信，轉達了伯努利的挑戰。牛頓利用晚飯後的時間一舉解決了兩個問題，並將結果寫成短文匿名發表在《哲學彙刊》(*Philosophical Transaction*，1697，No. 224) 上。伯努利讀後驚呼 “從這鋒利的爪我認出了雄獅”。對最速降落線問題牛頓從幾何上解答爲擺線。三年後他又給出一個分析證明。此證明記載在 D. 格雷戈里的回憶錄中，如圖 9，設 $AB = x$、$BE = y$，牛頓對無限小增量 $BC = CD = o$ 考慮無限小降落 $E \to N \to G$，他求出從 $E \to N$，從 $N \to E$ 的時間分別爲：

$$R = \frac{\sqrt{oo + pp - 2pq + qq}}{\sqrt{x}}, \quad S = \frac{\sqrt{oo + pp + 2pq + qq}}{\sqrt{x + o}},$$

其中 $2p = GL = 2\dot{y}o + 2\ddot{y}o^2$、$q = FN$。牛頓然後固定 x、o、p

而令 q 變動， 尋求 N 在水平線 FC 上的位置使降落 $E \to N \to G$ 所需時間 $(R+S)$ 最少， 並給出了作爲局部極小條件的流數方程。

牛頓對最速降落線問題的解答與伯努利、 萊布尼茨和法蒂奧 • 德迪勒 (Fatio de Duillier) 等人的結果一起推動了變分法的早期發展。

另一次挑戰涉及所謂 “等交曲線” 問題， 即求一曲線 (或曲線族) 與已知曲線族相交成定角。 一個重要的特例是交角與直角的情形即 “正交軌線”。 這問題最先也是約翰 • 伯努利提出。 1715 年萊布尼茨又重新提出來對準英國數學家主要是牛頓挑戰。 年逾古稀的牛頓也是用一個晚上作出了解答。 這一次當伯努利看到《哲學彙刊》(1716) 上刊出的匿名解答後卻說 “未見雄獅利爪”， 他以爲作者是泰勒。 牛頓的解答是將正交問題歸結爲二階常微分方程： $(1 + y\dot{y})/y = -\ddot{y}$， 並確立了解的存在性， 但除列舉特例外， 未能給出一般解。

數學方法　在數學方法上， 牛頓的思想存在著不同的側面， 並且是隨著他一生不同的時期而變化、 發展。

在牛頓的早期數學研究中， 演繹傾向顯然無足輕重。 牛頓發明微積分， 主要是依靠了高度的歸納算法的能力， 並沒有多少綜合幾何背景， 從現在仍保存在三一學院的牛頓大學時代讀過的《原本》上可以看到他當時對該書的評語 — trivial(平易無聊)， 以致於他 1664 年參加津貼生考試 (巴羅主考) 時因歐氏幾何成績不佳差一點未能通過。 而幾乎在同時他開始研究微積分問題， 並且不到一年就做出了基本發現。 牛頓後來對早年未學好歐氏幾何頗感後悔， 認爲 “不該先讓自己致力於笛卡兒和其他代數學家的著作”，“歐幾里得作爲一個傑出的作家本來是應該首先受重視的”。 對於數學史來說， 幸運的是牛頓實際並沒有像這樣倒過來做， 但上述自白反映了他思想上的轉折。 七十年代以後， 牛頓對演繹方法益趨重視， 其結果如前所述， 是他在古典幾何領域的豐

收和《原理》中演繹的力學體系。牛頓在《原理》第一版序言中讚美幾何演繹的作用，認爲“從極少數原理出發，而能推出如此豐富的結果，這正是幾何學的光榮”。

牛頓在《原理》中不遺餘力給微積分披上幾何外衣，使流數術帶上了僵硬呆板的弱點，在客觀上阻礙了十八世紀英國分析的發展。但這決不意味著牛頓主觀上對分析方法有任何貶抑。相反，他在 1704 年《光學》中談到分析方法時說：“在自然哲學中也像在數學中一樣，對於困難事物的研究，總是首先使用分析方法，然後再用綜合方法。”牛頓後來曾多次說明《原理》中命題的分析來源，特別是在他 1710 年代末撰寫的《原理》新序言 (手稿，未發表) 中可以看到這樣的典型論述：

“分析有助於發現眞理，而發現的確定性則應通過綜合證明來體現，··· 本著上述理由，我在《原理》中採用了綜合方法去證明各卷中的命題，而這些命題原先是我通過分析途徑發現的。··· 對於當今通曉代數的數學家來說，這種綜合的證論方式確有令人不快之處，原因也許是太繁瑣、太泥古了；或者因爲它不能充分揭示發現的奧秘。當然，我也完全可以用分析方式來敍述那些本來就是通過分析發現的事實，而不必像現在這樣絞盡腦汁。但本書是爲那些對幾何原理造詣頗深的學者而寫，旨在奠定物理學的幾何證明基礎。”(原始文獻 [9]，Vol. VII)

考慮到牛頓早先的分析發現，似乎沒有理由懷疑他的自述。況且除了幾何模式，《原理》中確實有意保留了“分析方法的樣板”，即第一卷命題 XLV 及第二卷命題 X。牛頓還指出“通過對命題綜合證明的逆推，也可以對發現這些命題的分析方法有所了解”。

牛頓有時被認爲“愛幾何方法甚於純分析方法”，他甚至說過“代數是數學愚人的分析學” (研究文獻 [3])。另一方面，牛頓又常遭批評說他過分強調分析與歸納的作用。其實正如 I.B. 科恩

(Cohen) 所說，對牛頓的一些說法不能斷章取義。牛頓的思想是複雜的，有時確實是矛盾的。但全面考察仍然可以找到主旋律。事實上，牛頓比他的任何同時代人都更加強調數學方法的“雙重性”。他曾明確說過：“數學科學的方法是雙重的，即綜合與分析，或稱合成與分解。” (原始文獻 [9]，Vol. VIII) 在《普遍算術》中他竭力提倡算術與代數“作爲綜合與分析”二者應“結合在一起研究”。而關於代數與幾何，他的看法是：“這兩門科學不應混淆。古人不遺餘力地將它們截然分開，以致在幾何中從未使用過算術名詞。近人則相反，將二者混淆起來而喪失了體現幾何美的簡單性”，也就是說他既反對將代數與幾何“混淆起來”，也反對二者的“截然分開”。認識分析與綜合的區別，致力於二者的結合，這種雙重方法也被牛頓推廣於整個自然哲學而顯示出巨大功效。誠如 R. 科茨 (Cotes) 在《原理》第二版序中指出的：“這是哲學探討的無可比擬的最好方法，我們的著名作者 (指牛頓) 最先正確地掌握了這個方法，並且認爲只有這個方法才值得他用他的卓越勞動去加以發揚光大。”

幾乎所有的牛頓傳記都把它描寫成一個心不在焉、沉迷於科學研究的人。據他的助手回憶，牛頓忘記吃飯是常事。他的僕人常常發現送到書房的午飯和晚飯一口未動。牛頓偶爾上食堂用餐，有時出門便陷入思考，兜個圈子又回到家裡，竟把吃飯一事置之腦後。他不倦地工作，往往一天伏案寫作 18 至 19 小時。當他在花園中散步，常會突然想起什麼而急忙跑回書房往正在構思的論文上寫下幾行。在艱深的研究之後，他有時閱讀或撰寫一些較輕鬆的東西作爲休息。W. 惠威爾 (Whewell) 在《歸納科學史》(*History of inductive sciences*) 中寫道：“除了頑強的毅力和失眠的習慣，牛頓不承認自己與常人有什麼區別。當有人問他是怎樣做出自己的科學發現時，他的回答是：‘老是想著它們’。另一次他宣稱：如果他在科學上做了一點事情，那完全歸功於他的勤奮與

耐心思考，‘心裡總是裝著研究的問題，等待那最初的一線希望漸漸變成普照一切的光明’。”

牛頓總是謙遜地將自己的科學發現歸功於前人的啓導。他在談到他的光學成就時曾經說過這樣的名言：“如果我看得更遠些，那是因爲我站在巨人們的肩膀上”(1676.2.5 致胡克的信)。臨終前他對友人說：“我不知道世人將怎樣看我，我自己認爲我不過是一個在海邊玩耍的小孩，偶然揀到一些比尋常更光滑的卵石或更美麗的貝殼並因此沾沾自喜。而在我面前，卻仍然是一片浩瀚未知的眞理的海洋。”

牛頓對於發表自己的科學著作極度謹愼。除了兩篇光學論文外，牛頓絕大多數著作都是在朋友們再三敦促下才發表。這或許反映了他內心的矛盾：一方面爲自己的科學發現感到驕傲，希望獲得公衆承認。另一方面又擔心自己的思想超越大多數同時代人太遠、懼怕批評而不願發表結果。這種心理僵局導致他許多重要論著長年湮沒無聞，同時也招來優先權的麻煩，成爲他與萊布尼茨、R. 胡克 (Hooke)、J. 弗拉姆斯蒂德 (Flamsteed) 等人一系列爭端的部分緣由，而在這些爭端中，牛頓有時表現出偏執、不公。

可能是因爲早年經歷所致，牛頓性格沉鬱內向。但幸而這沒有妨礙他後來在造幣局與皇家學會的職位上顯示出行政能力。牛頓不善於在公衆場合表達自己的思想，但作爲皇家學會會長，他卻能贏得多數會員擁護，連選連任領導這個最高學術機構長達四分之一世紀。牛頓初任會長時，針對學會面臨的學術與財政困難，制訂了一份“皇家學會振興計劃”，計劃將“自然哲學”分成五個主要領域 — 數學與力學；天文與光學；動物、解剖與生理學；植物學；化學。對每個領域指定一位公認的專家負責，主持每週的學術討論。“計劃”還聲明皇家學會只任命在科學上有建樹的人。在牛頓任職期間，皇家學會吸收了大批年輕有爲的會員，其

中包括 C. 麥克勞林 (Maclaurin)、 R. 科茨、 W. 瓊斯、 H. 彭伯頓 (Pemberton) 等， 他們形成牛頓學派的中堅。 牛頓推動理事會通過一項向會員捐款的規定， 從而克服了學會的債務危機。 牛頓是一個一絲不苟的人， 他甚至命令學會職員 H. 亨特 (Hunt) 守在大門前向會員募捐。 也是在牛頓的奔波努力下， 皇家學會在建院五十年之際從破舊的格雷沙姆學院搬進了克蘭大院 (Crane Court) 新址。 牛頓始終如一認眞對待皇家學會的工作， 據學會記錄， 他出席了任職期間總共 177 次理事會中的 167 次， 直到臨終前不久還抱病在倫敦主持了一次會議。

牛頓一生過著近乎淸敎徒式的簡樸生活， 即使成爲貴族後亦未變其本色。 但他對於公益事業和親友的困難， 常能慷慨解囊。 牛頓有許多親戚， 他們中幾乎每個人都分享他的慷慨。 他的異父妹妹安娜丈夫去世後， 牛頓爲其三個孩子買了保險年金， 並將外甥女凱瑟琳 (Catherine Barton) 接到倫敦居住、 接受敎育。 格蘭瑟姆的克拉克先生回憶說： 有一次牛頓給了他一張數目可觀的支票， 作爲他一位遠房姪女的嫁妝， 後來這位女士不幸守寡， 牛頓還一直接濟她和她母親的生活。 牛頓還經常向劍橋大學、 皇家學會捐款。

牛頓待人接物帶著一種自然的尊嚴和彬彬有禮， 同時也富有人情。 林肯郡的蕭特 (Short) 先生說一次他 “攜全家到倫敦塔拜訪依薩克爵士， 並參觀鑄幣， 受到他盛情款待， 每人獲贈金質紀念章一枚以作紀念”。 牛頓有時會出席親友的婚禮， 每當此種場合， 他 “通常拿出 100 英鎊給新娘作賀禮”。

牛頓終身未娶， 晚年由外甥女凱瑟琳協助管家。 凱瑟琳敎養有素， 在倫敦社交界頗有名氣。 當年僑居英國的伏爾泰記道：“牛頓有一位非常迷人的外甥女， 就是現在的康杜德夫人。 她曾經征服了哈里發克斯大臣 (即財政部長蒙塔古)。 在這方面， 如果沒有一個漂亮的外甥女， 流數術和萬有引力也將無濟於事。” 伏爾泰與

凱瑟琳本人有直接交往，後者曾親口告訴他那個現已家喻戶曉的蘋果落地的故事[4]。凱瑟琳的丈夫康杜德亦是牛頓的崇拜者，平時細心記錄牛頓的言論、軼聞，牛頓有許多事蹟即藉以留傳下來。對科學史來說尤爲重要的是，在牛頓去世後，康杜德夫婦在親屬們圍繞遺產的糾紛中不惜代價保全了牛頓的手稿。這些手稿後又傳給了他們的後代樸茨茅斯 (Portsmouth) 伯爵家族，在漢普郡樸茨茅斯莊園沉睡了近一個世紀，直到 1888 年，樸茨茅斯家族將部分科學手稿贈送給劍橋大學，世稱“樸茨茅斯手稿”。其餘的手稿則於 1936 年在倫敦公開拍賣而分散到世界各地的圖書館與博物館裡。現存的牛頓手稿中，僅數學手稿 (不包括《原理》) 就有 5000 多頁，最近已全部整理、註譯出版 (原始文獻 [9])。它們是牛頓數學思維的偉大記錄，正如 A. 愛因斯坦 (Einstein) 在紀念這位科學巨匠誕生三百週年時所評價的那樣：“理解力的產品要比喧嚷紛擾的世代經久，它能經歷好多個世紀而繼續發出光和熱。”

文　　獻

原始文獻

[1] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1st edi., London, 1687；2nd edi., Cambridge, 1713；3rd edi., London, 1726；英譯本：A. Motte, *Mathematical principles of natural philosophy*, 1st edi., London, 1729；中譯本：鄭太樸，自然哲學之數學原理，商務印書館，1931。

[2] I. Newton, *Opticks*, London, 1704, 包括兩個數學附錄 (《曲線求積術》、《三次曲線枚舉》)。

[3] I. Newton, *Arithmetica universalis*, 1st edi., Cambridge, 1707；

[4]伏爾泰在《牛頓哲學原理》(*Eléments de la philosophis de Newton*，見 Voltaire's Oeuvres，Vol. 38，196，Paris，1830) 中寫道：“牛頓的外甥女 (康杜德夫人) 告訴我說：1666 年牛頓隱居鄉間，一天他看到林樹上落下的果實，遂引起沉思：究竟什麼原因使一切物體都受到差不多總是朝向地心的吸引力呢？”關於蘋果落地的傳說還有其它來源，如牛頓的朋友、皇家學會會員 W. 斯圖克萊 (Stukeley) 在其《牛頓生平回憶錄》(*Memoirs of Sir Isaac Newton's life*，1752) 中記述：1726 年 4 月 15 日他訪問牛頓寓所並與牛頓共進午餐，“飯後天氣和煦，我們一起到花園中的蘋果樹蔭下喝茶，··· 他告訴我說，多年前也是在同樣的氣氛下，他心中產生了引力概念，那是由一隻蘋果落地引起的，當時他正在樹下靜坐沉思。”另外，J. 康杜德的回憶錄 (見 Keynes 收藏 MS 130.4) 和 R. 格林 (Greene) 的一部著述《原理》(1727) 也都獨立地提到這一事實。

修訂版 London, 1722；英譯第一版：J. Raphson, *Universal arithmetic*, London, 1720。

[4] W. Jones 編, *Analysis per quantatum series, fluxiones ac differentias*, London, 1711。這是牛頓授權 W. Jones 編輯的數學短篇論文集，其中首次發表了《分析學》、《差分方法》，同時重印了《曲線求術》、《三次曲線枚舉》，另外還包括牛頓致奧爾登伯格、沃利斯、科林斯等人的信件。

[5] J. Colson 譯, I. Newton, *The method of fluxions and infinite series, with its application to the geometry of curve lines*, 牛頓的拉丁文原本則遲至 1779 年才首次發表 (見文獻 [6])。

[6] S. Horsley 編, *lsaaci Newtoni opera quae extant omnia*, 5 vols, London, 1779－1785, 卷 I 爲已出版的數學論文，其中以 "Artis analyticae specimina, sive geometria analytica" 爲題第一次發表了牛頓 1671 年《流數法》拉丁文原作。

[7] H.W. Turnbull 等編, *Correspondence of Isaac Newton*, Vol. I–VII, Cambridge University Press, 1959－1977。

[8] A. Rupert Hall & Marie B. Hall, *Unpublished scientific papers of Isaac Newton, a selection from the portsmouth collection in the University Library*, Cambridge, Cambridge University Press, 1962。

[9] D.T. Whiteside, *The mathematical papers of Isaac Newton*, Cambridge University Press, 1967－1981；
Vol. I (1664－1666) 包括 1666 年 10 月《流數簡論》手稿；
Vol. II (1667－1670) 包括《分析學》原稿；
Vol. III (1670－1673) 包括《流數法》原稿；
Vol. IV (1674－1684) 包括《差分法則》手稿、《差分方法》初稿、《古代立體軌跡問題求解》手稿、三次曲線研究手稿
Vol. V (1683－1684) 盧卡斯代數講義 (即《普遍算術》原稿)；
Vol. VI (1684－1691) 運動幾何學手稿；
Vol. VII (1691－1695)《曲線求積術》初稿，《幾何學》第一、二卷手稿、《三次曲線枚舉》修訂稿等；
Vol. VIII (1697－1722) 包括《曲線求積術》修訂稿、《差分方法》修訂稿、挑戰問題解答以及優先權爭論有關原始文獻 (如 1712 年《通報》、對《通報》的匿名評論及補充說明等)。

[10] 手稿收藏：
樸茨茅斯收藏 (Portsmouth Collection)。劍橋大學圖書館 (編

號 ULC. Add. MS. 3988－4007)。 這是牛頓數學手稿最主要部分， 其中包括數學筆記 (Add. MS. 4000) 和《廢書》(Add. MS. 4004)；
凱恩斯收藏 (Keynes Collection)。 凱恩斯在 1936 年倫敦拍賣中收集的部分手稿， 現藏劍橋國王學院， 其中包括涉及不同領域的手稿以及 J. 康杜德關於牛頓言論、 軼事的筆記資料；
三一學院收藏 (Trinity College Collection)。 包括手稿、 筆記以及牛頓個人收藏的書籍；
皇家學會收藏。 多數與《原理》有關；
菲茨威廉筆記 (Fitxwilliam Notebook)。 劍橋菲茨威廉博物館藏， 牛頓大學時代筆記， 多數學內容； 在散佈世界各地的其它收藏中亦可找到零星的數學手稿。

研究文獻

[11] D. Brewster, *Memoirs of the life, writings, and discoveries of Sir Isaac Newton*, 2 vols, Edinburgh, 1855。

[12] R.S. Westfall, *Never at rest*： *A biography of Isaac Newton*, Cambridge Univeisrty Press, 1980。

[13] I.B. Cohen, *Isaac Newton, Dictionary of scientific biography (C. C. Gillsipie 主編)*, Vol. 10, 42－103, New York, Charles Scribner's Sons, 1974 (中譯本：I.B. 科恩，牛頓傳，科學出版社， 1989)

[14] W.W. Rouse Ball, *A history of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge University Press, 1889。

[15] W.J. Greenstreet 編, *Isaac Newton 1642－1727*, London, 1927 紀念文集， 其中論述牛頓數學貢獻的文章有： Newton and Interpolation (D. C. Fraser)； Newton on Plane Cubic Curve (H. Hilton)； Newton's Contribution to Geomertry of Conics (J.J. Milne) 等。

[16] D.C. Whiteside, *Patterns of Mathematical Thought in the later seventeenth century, Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961), 3, 179－388。

[17] F. Cajori, *Historical note on the Newton–Raphson method of approxmation, American Mathematical Monthly*, 18 (1911), 2, 29-32。

[18] C. Boyer, *Newton as an originator of polar coordinates, Ameri-*

can Mathematical Monthly, 56 (1949), 2, 73 − 78 。

[19] O.B. Sheynin, *Newton and the classical theory of probability, Archive for history of Exaci Sciences*, 7 (1971), 3 217 − 243 。

[20] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer–Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

[21] H.H. Goldstine, *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*, Springer–Verlag, 1977 。

[22] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。