# 雅格布 • 伯努利

伯努利，J. (Bernoulli, Jacob) 1654 年 12 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Besel)；1705 年 8 月 16 日卒於巴塞爾。數學、力學、天文學。

伯努利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bernoulli_Jacob.html

# 雅格布 • 伯努利

仝素勤　　許義夫

(山東教育學院)

伯努利， J. (Bernoulli, Jacob) 1654 年 12 月 27 日生於瑞士巴塞爾 (Besel)； 1705 年 8 月 16 日卒於巴塞爾。 數學、 力學、 天文學。

雅格布 • 伯努利 (Jacob Bernoulli) 出生在一個商人世家。 他的祖父是荷蘭阿姆斯特丹的一位藥商， 1622 年移居巴塞爾。 他的父親接過興隆的藥材生意， 並成了市議會一名成員和地方行政官。 他的母親是市議員兼銀行家的女兒。 雅格布在 1684 年與一位富商的女兒結婚， 他的兒子尼古拉 • 伯努利 (Nikolaus Bernoulli) 是藝術家， 巴塞爾市議會的議員和藝術行會會長。

雅格布畢業於巴塞爾大學， 1671 年獲藝術碩士學位。 這裡的藝術是指 “自由藝術”， 它包括算術、 幾何、 天文學、 數理音樂的基礎， 以及文法、 修辭和雄辯術等七大門類。 遵照他父親的願望， 他又於 1676 年取得神學碩士學位。 同時他對數學有著濃厚的興趣， 但是他在數學上的興趣遭到父親的反對， 他違背父親的意願， 自學了數學和天文學。 1676 年， 他到日內瓦做家庭教師。 從 1677 年起， 他開始在這裡寫內容豐富的《沉思錄》(*Meditationes*)。 1678 年雅格布進行了他第一次學習旅行， 他到過法國、 荷蘭、 英國和德國， 與數學家們建立了廣泛的通信聯繫。 然後他又在法國度過了兩年的時光， 這期間他開始研究數學問題。 起初他還不知道 I. 牛頓 (Newton) 和 G. W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的工作， 他首先熟悉了 R. 笛卡兒 (Descartes) 及其追隨者的方法論科學觀， 並學習了笛卡兒的《幾何學》(*La géometrie*)、 J. 沃

利斯 (Wallis) 的《無窮的算術》(*Arithmetica Infinitorum*) 以及 I. 巴羅 (Barrow) 的《幾何學講義》(*Geometrical Lectures*)。他後來逐漸熟悉了萊布尼茨的工作。1681 − 1682 年間，他做了第二次學習旅行，接觸了許多數學家和科學家，如 J. 許德 (Hudde)、R. 玻意耳 (Boyle)、R. 胡克 (Hooke) 及 C. 惠更斯 (Huygens)。通過訪問和閱讀文獻，豐富了他的知識，拓寬了個人的興趣。這次旅行，他在科學上的直接收獲就是發表了還不夠完備的有關彗星的理論 (1682 年) 以及受到人們高度評價的重力理論 (1683 年)。回到巴塞爾後，從 1683 年起，雅格布做了一些關於液體和固體力學的實驗講課，爲《博學雜誌》(*Jounal des scavans*) 和《教師學報》(*Acta eruditorum*) 寫了一些有關科技問題的文章，並且也繼續研究數學著作。1687 年，雅格布在《教師學報》上發表了他的 “用兩相互垂直的直線將三角形的面積四等分的方法”，這些成果被推廣運用後，又被作爲 F. V. 斯霍滕 (Schooten) 編輯的《幾何學》(*Geometrie*) 的附錄發表。

1684 年之後，雅格布轉向詭辯邏輯的研究。1685 年出版了他最早的關於概率論的文章。由於受到沃利斯以及巴羅的涉及到數學、光學、天文學的那些資料的影響，他又轉向了微分幾何學。在這同時，他的弟弟約翰•伯努利 (Johann Bernoulli) 一直跟其學習數學。1687 年雅格布成爲巴塞爾大學的數學教授，直到 1705 年去世。在這段時間，他一直與萊布尼茨保持著通信聯繫。

1699 年，雅格布被選爲巴黎科學院的國外院士，1701 年被柏林科學協會 (即後來的柏林科學院) 接受爲會員。

雅格布•伯努利是在十七 − 十八世紀期間，歐洲大陸在數學方面做過特殊貢獻的伯努利家族的重要成員之一。他在數學上的貢獻涉及微積分、解析幾何、概率論以及變分法等領域。

雅格布和他的弟弟約翰經常一起研究萊布尼茨的文章， 迅速接受了萊布尼茨微積分的學說， 並對他的文章大力加工， 使之能夠較易被人接受。 伯努利兄弟也對微積分做了大量的新發展， 成爲十七世紀繼牛頓和萊布尼茨之後， 最先發展微積分的人。 萊布尼茨承認， 他們在微積分方面的工作和他一樣多。

雅格布在微積分方面的工作， 同牛頓和萊布尼茨一樣， 也是從關於求曲線的弧長、 曲率、 法包線 (曲線的法線的包絡線)、 拐點等基本的微積分課題開始。 他把牛頓和萊布尼茨的結論擴展到各種各樣的螺線、 懸鏈線和曳物線。 1687 年， 關於 “定長懸掛曲線的確定” (The determination of the curve of constant descent) 已被萊布尼茨當作一個問題提出。 1690 年雅格布在《教師學報》中也提出類似的問題： 一根柔軟而不能伸長的繩子， 自由懸掛於兩個固定點， 求這繩所形成的曲線， 即懸鏈線 (catenary) 形狀的確定問題。 萊布尼茨立即指出這個問題的深遠意義， 並主動解決這個問題， 他的結果發表在 1691 年的《教師學報》上， 同期約翰•伯努利、 惠更斯也都各自發表了這個問題的解答。 雅格布自己當時卻沒有能解決這個問題， 所以使約翰感到莫大的驕傲。 1691 年與 1692 年間， 雅格布和約翰解決了更普遍的問題， 即懸掛著的變密度非彈性軟繩、 等厚度的彈性繩， 以及在每一點上的作用力都指向一個固定中心的細繩的形狀的問題。 1694 年， 雅格布也研究了受力細桿 (彈性物) 所具有的形狀問題。 對一組端點條件， 他發現曲線的方程爲

$$dy = \frac{(x^2+ab)dx}{\sqrt{a^4-(x^2+ab)^2}}\ ,$$

這裡涉及到無理函數的積分問題。 1695 年關於懸鏈線的研究被應用到了懸置橋樑的建築中。

雅格布在 1691 年獲得兩項突出的成果。 他檢驗了拋物螺線

(parabolic spiral) 在極坐標中爲：$r = a - b\sqrt{\phi}$，曲線長度的橢圓積分具有特殊的對稱性；對數螺線 (logarithmic spiral) 在極坐標中爲 $r = a^{\theta}$，雅格布對對數螺線有深入的研究，他發現對數螺線經過各種變換後，結果還是對數螺線。如對數螺線的漸屈線和漸伸線都是對數螺線；自極點至切線的垂足的軌跡也是對數螺線；以極點爲發光點經對數螺線反射後得到的無數根反射線，和所有這些反射線相切的曲線叫回光線 (catacaustic)，它還是對數螺線。他在驚嘆欣賞這曲線神奇巧妙之餘，效仿阿基米德 (Archimedes)，在遺囑裡要求他的後人將對數螺線刻在他的墓碑上，作永久紀念，並附以頌詞："雖然改變了，我還是和原來一樣" (Eadem mutata resurgo)。

1694 年，雅格布出版了一本論文集《微分學方法，論反切線法》(*Specimen caluli differentialis*：*de methodo tangentium inversa*)。這本著作用通俗易懂的語言去解釋微分法的原理，因而使萊布尼茨的微積分思想得到很大範圍的普及。

## 微分方程

雅格布在分析學中，使專用術語 "積分" 第一次被賦予數學意義而使用。他也是用微積分求一階常微分方程分析解的先驅者之一。1690 年 5 月，他在《教師學報》上發表了關於等時問題的解答。這個問題是：求一條曲線，使得一個擺沿著它作一次完全的振動都取相等的時間，不管擺所經歷的弧長的大小。他用微分方程 $dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$ 表示，由微分等式得出結論：兩端的積分必須相等，並給出了解答：

$$\frac{2b^2y - 2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}\ ,$$

這曲線是擺線。1691 年雅格布研究了跟蹤曲線問題，導出了跟蹤曲線的微分方程。在求解一階常微分方程時，雅格布在 1695 年的

《教師學報》中提出了求解方程

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$$

的問題。 這方程後來被稱爲 “伯努利方程”。 萊布尼茨在 1696 年證明了利用變量替換 $z = y^{1-n}$， 可以把方程化爲線性方程 ($y$ 和 $y'$ 的一次方程) 來解。 雅格布和約翰都各自給出了它的解法。 雅格布還研究了船帆在風力下的形狀問題， 而且導出了一個二階微分方程： $d^2x/ds^2 = (dy/ds)^3$， 這裡 $s$ 爲弧長。

## 級數

雅格布在級數方面的大量工作， 使他在級數理論方面成爲當時的權威。 1689－1704 年間他寫了五篇論文， 共有六十個命題， 這些論文中大多數是討論函數的級數表示的， 其目的是求函數的微分和積分， 以及求曲線下的面積和曲線的長度。 他求級數和的一些方法及判別級數收劍性的方法是值得注意的， 例如比較判別法就得到了成功的運用， 對級數的研究起了很好的作用， 但是這些命題的表述， 並沒有顯現出他的獨創性， 也出現了一些相悖的結論。

在第一篇論文 (1698 年) 中， 他討論了一些無窮級數的和， 證明了調和級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ 的發散性。 他考慮這樣的項

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\text{，}$$

並說這個和大於 $\dfrac{n^2-n}{n^2}$， 因爲這裡有 $n^2 - n$ 項， 而每一項均大於或等於最後一項。 但是

$$(n^2-n)\cdot\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}\text{，}$$

因此就有

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1\text{。}$$

他說， 這樣我們可以把項一組接一組的歸併起來， 使得每一個組的和大於 1， 於是我們能夠得到有限多個項， 其和大於任意指定的正數， 從而整個級數的和必是無窮。 文章末尾他證明了無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ 的和是有限數， 承認自己還不能求出它的和的精確值 (歐拉在 1737 年首先得到成功)， 但是他知道關於優級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k^{-1}(k+1)^{-1}$$

可以求出它的前 $n$ 項和。 在命題 24 中， 寫出

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-m}/\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-m} = (2^m - 1)/1 ,$$

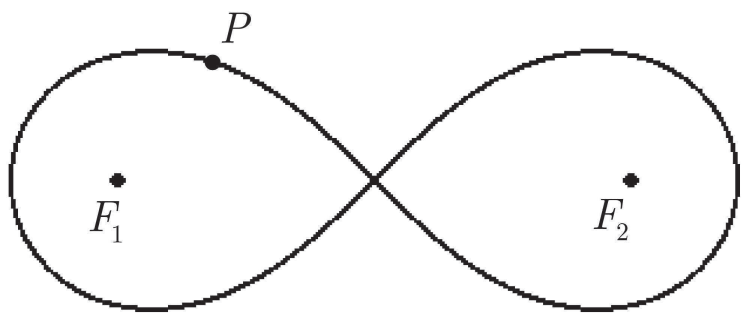
$m$ 是大於 1 的整數。 並且指出 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{2}}$ 比 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}$ 發散得更快。 這裡他成功地應用了比較判別法。 第二篇論文主要是在三次曲線不完全分類的基礎上， 根據它們的形態劃分成 33 種不同類型。 第三篇論文中的命題， 對於雙曲線求積分應用對數級數 (命題 42)， 對數級數的逆是指數級數 (命題 43)， 對於 $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}x^k$ 的幾何解釋 (命題 44)， 以及級數對於圓面積和二次曲線的扇形面積的解釋 (命題 45， 46)。 雅格布 1698 年以前關於懸鏈線及有關問題的見解， 關於拋物線求長法及對數曲線求長的見解等分別作爲命題 49、 命題 41 和命題 52 增補進去。 第三篇論文有雅格布對二項式定理的證明， 儘管牛頓在 1676 年曾經陳述過這個定理， 並用一些仔細挑選出來的例題說明它， 但沒有給出任何證明， 雅格布所補充的證明是最早的， 然而他只限於指數是正整數的情況。 大約在六十年後， 歐拉才想出了一個適用於指數爲非正整數的證明。 在命題 55 中出現了待定係數法。 命題 56 − 58 以及命題 60， 涉及到與彈性有關的問題。 命題 59 說明了對於求 $\ln 2$ 用級數 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}k^{-1}$ 來代

替級數 $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}$ 收斂得更快。 從 1704 年 8 月 2 日雅格布給萊布尼茨的信中， 我們看出在命題 59 中他應用了 J. 克里斯托夫 (Christophe)、 法蒂奧德迪勒 (Fatio de Duillier) 的改進收斂性的思想。 他的侄子尼古拉 I (1687 − 1759) 把所有這些命題作爲雅格布的名著《猜度術》(*Ars conjectandi*) 的附錄發表。

## 解析幾何

在解析幾何方面， 1691 年雅格布在《教師學報》上發表了一篇基本上是關於極坐標的文章， 所以通常認爲他是極坐標的發明者之一。 他引入了 "極坐標" 的概念， 並說明了某些高次曲線應用極坐標可以比較容易地畫出來。 在研究它們的性質時， 用極坐標表示它們的方程比用直角坐標表示更方便。 1694 年， 雅格布在《教師學報》發表的論文中， 提出了 "伯努利雙紐線" (lemniscate of Bernoulli)， 並討論了它的性質。 如圖， 設 $F_1$、 $F_2$ 是平面上的兩點， 且 $F_1F_2 = 2a$ $(a > 0)$， 平面上一動點 $P$ 使得

$$PF_1 \cdot PF_2 = b^2 \text{ ($b$ 是正常數)}$$




成立的軌跡稱爲一條卡西尼 (Cassini) 卵形線。 當 $b = a$ 時得雙紐線。 雙紐線在直角坐標系中的方程是

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)，$$

在極坐標系中的方程是

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta。$$

它是等軸比曲線的切線與垂直於切線並通過中心的直線的交點之軌跡。雙紐線 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 所圍成的面積是 $a^2$。1691 年，雅格布和約翰給出了曲線的曲率半徑的公式。雅格布稱之爲“黃金定理”，並寫作

$$z = dxds：ddy = dyds：ddx，$$

其中 $z$ 是曲率半徑。如果用 $ds^2$ 除每一個比的分子和分母，得到

$$z = \frac{dx}{ds}\Big/\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{dy}{ds}\Big/\frac{d^2x}{ds^2}。$$

雅格布也給出了在極坐標下曲率半徑的公式。

## 變分法

1696 年約翰向歐洲數學家挑戰，提出了一個難題：最速降線問題，雅格布作爲還擊，1697 年 5 月又提出另一個難題：等周問題。對於這些問題的研究和解決，使他們成爲新的數學分支 — 變分法的重要奠基者。

變分法是微分學中處理單變量函數極大極小問題的一種推廣。對變分法的產生和發展有巨大影響的有下列幾類問題：最速降線問題、等周問題、測地線問題以及最小旋轉面問題。十七－十八世紀，力學的迅速成長刺激了這類問題的發展。伯努利兄弟與前面三個問題的解決都有關係，特別是最速降線問題的提出和解決，認爲是對變分法的創立有決定意義。1696 年約翰提出的最速降線問題是：確定一條連結不在同一鉛直線上的兩點 $A$ 和 $B$ 的曲線，使質點只受重力的作用由 $A$ 點沿曲線滑向 $B$ 點，所用時間最短 (介質的阻力和摩擦力不計)。這問題的困難之處在於它和普通的極大極小值的求法不同，它是要求出一個未知函數 (曲線)，來滿足所給條件。這個問題提出後，數學家們立即被它的新穎性所陶醉。雅格布、約翰、萊布尼茨、洛比達和牛頓都研究了這個問題，各用不同的方法得到了相同的答案，這條曲線是旋輪線 (亦

稱圓滾線或擺線)。 雅格布的解法是比較淺顯的， 1700 年他在《教師學報》上發表了 “等周問題實解” (*Solution propria problematis isoperimetrici*) 一文， 文中包括了他對 “最速降線” 的解答。

雅格布在 1697 年 5 月的《教師學報》上， 提出了一個包含幾種情形相當複雜的 “等周問題”， 向其弟弟約翰挑戰。 約翰最初給出的解都沒有獲得成功， 雅格布在 1700 年的 “等周問題實解” 一文中， 給出了正確的答案。

1698 年， 雅格布在關於變分法的第三個典型問題 — 測地線問題上， 作出了新的貢獻， 他解決了柱面 、 錐面和旋轉面的測地線問題。

## 概率論

《猜度術》(*Arc conjectandi*) 是雅格布一生中最有創造力的著作， 這本書是在他死後 8 年， 即 1713 年才出版的。 這本書的出版是概率史上的一件大事， 它是把數學的又一分支 — 概率論建立在穩固的數學基礎上的首次認眞的嘗試。 在這部著作中他提出了概率論中的 “伯努利定理” 以及在數論中很有影響的 “伯努利數” 和 “伯努利多項式” 等基本內容。“伯努利定理” 是 “大數定律” 的最早形式。 由於 “大數定律” 的極端重要性， 1913 年 12 月聖彼得堡科學院曾舉行慶祝大會， 紀念 “大數定律” 誕生二百周年。

早在雅格布的《猜度術》出版之前， P. de 費馬 (Fermat) 、 E. 帕斯卡 (Pascal) 以及惠更斯等人就對概率論問題作過一些研究， 獲得某些成果。 雅格布本人也在《教師學報》(1685) 上寫過一些論文， 提出了有關賭博遊戲中的輸贏次數問題， 對這些問題他在《猜度術》中也做出了解答。 《猜度術》這部巨著中提出的大數定律是在隨機現象的大量重複中往往出現的必然規律的總稱， 是對大量經驗觀測中呈現的穩定性的刻劃。 雅格布對大數定律的陳述與現代的標準概率論著作十分一致，“隨著觀測數目的不斷增

加，那記錄在案的有利事件與不利事件的比接近眞實比的概率也不斷增加，以致這概率將最終超過所要求的任意的確定的度”。這一陳述對大量觀測的複雜結構提出了一個簡明的假設，並且證明了這一假設。如在擲錢幣的遊戲中，每次出現正面或反面雖是偶然的，但在大量重複時，出現正面次數與總次數之比卻必然接近確定的 $\frac{1}{2}$。這是歷史上最早發現的大數定律的實例之一。大數定律第一次試圖在單一的概率值與衆多現象的統計度量之間建立演繹關係，成爲概率論通向廣泛的應用領域的橋樑。

“伯努利數”是雅格布在研究正整數的正整數次冪之和的公式時引入的。若

$$S_n(k)=1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n\text{，}$$

當 $n=1$ 時，有

$$S_1(k)=1+2+\cdots+(k-1)=\frac{k^2}{2}-\frac{k}{2}\text{，}$$

當 $n=2$ 時，有

$$S_2(k)=1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2=\frac{k^3}{3}-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{6}\text{，}$$

當 $n=3$ 時，有

$$S_3(k)=1^3+2^3+\cdots+(k-1)^3=\frac{k^4}{4}-\frac{k^3}{2}+\frac{k^2}{4}\text{，}$$

$\cdots\cdots\cdots$。

一般地，雅格布給出公式

$$S_n(k)=\frac{k^{n+1}}{n+1}-\frac{k^n}{2}+C_1^nB_2\frac{k^{n-1}}{2}-C_3^nB_4\frac{k^{n-3}}{4}+\cdots\text{，}$$

這裡 $C_\gamma^n=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$。雅格布對其中的係數 $B_2$、$B_4$、$B_6$、$\cdots$ 很感興趣，他計算出

$B_2=\dfrac{1}{6}$、$B_4=\dfrac{1}{30}$、$B_6=\dfrac{1}{42}$、$B_8=\dfrac{1}{30}$、$B_{10}=\dfrac{5}{66}$、$\cdots$，

而且還給出了計算這些係數的遞推公式。 現在人們把 $B_2$、 $B_4$、 $B_6$、 $\cdots$ 稱爲 “伯努利數”。 設 $f(x)$ 是一個單變量實函數， 在研究求和 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$ 的公式中， 用到一個關於 $x$ 的多項式

$$P_k(x) = \frac{x^k}{k!} + \frac{B_1}{1!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{B_2}{2!}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!} + \cdots + \frac{B_k}{k!} \text{，}$$

其中 $B_1 = -\dfrac{1}{2}$、 $B_{2k+1} = 0$、 $k = 1$、 $2$、 $\cdots$。 這個多項式也出現在《猜度術》一書中， 被稱爲 “伯努利多項式”。

《猜度術》共有四篇， 各篇的主要內容是： 第一篇基本上重新提出惠更斯問題； 第二篇是排列組合理論的詳盡論述。 他以 V. 斯霍滕 (Schooten) (1657) 、 萊布尼茨 (1666) 、 沃利斯 (1685) 和 J. 普列斯特 (Prestet) 的《初等數學》(*Elemens de mathematiques*) 的有關貢獻爲基礎， 主要結果是給出了關於指數級數的嚴格推導。 這一篇的第四章和第五章的許多內容， 即使拿到近代論著中也無不當之處； 第三篇是給出了 “機會對策” 中所產生的各種各樣新問題的解答， 共有 24 個例題， 有些例題很簡單， 也有一些很複雜的例題； 第四篇是關於概率論在道德和經濟問題上的應用。 “大數定律” 就是在這篇中提出的。 這部分還包括了雅格布特有的哲學思想， 他是爲回答匿名嘲笑者關於 1686 年在詭辯的邏輯問題上爭論的需要而寫的。 《猜度術》一書鼓舞了一些學者研究這門誘人的學問， P. R. de 蒙莫爾 (Montmort) 和 A. 棣莫弗 (de Moivre) 使這本書中的問題更加具體。 雅格布關於概率論的思想， 對於這個領域的進一步發展有決定性的貢獻。

此外， 雅格布 • 伯努利在物理學上也做了一些工作， 如在關於一個半圓鏡上平行入射光線的焦散線的研究中， 提出了測量法包線的基本步驟； 獨立地發現了被風鼓起的帆的外形可以用微分方程

$(\frac{dx}{ds})^3 = a\frac{d^2y}{dx^2}$ 描述 ; 以及關於彈性物體耐力的研究等。 在日內瓦大學的圖書館裡還收藏有雅格布沒有發表的關於固體和液體力學的講演稿 (手稿)。《大學實驗學報》(*Acta collegii experimentalis*) 翻譯了其中的一部分。 但令人遺憾的是, 雅格布對力學的貢獻幾乎沒有在正式文獻中提到過。

雅格布、 約翰經常與萊布尼茨、 惠更斯及其他數學家通信。 約翰在格羅寧根工作期間, 他們兄弟之間也經常互相通信。 通過書信提出問題, 研究解決問題, 他們經常在相同的領域裡工作, 也相互爭論。 伯努利兄弟自懸鏈線問題上就產生了分歧以後爭論加劇。 這些爭論無疑會促進科學的發展。 但由於雙方過分敏感自尊, 性格暴躁, 相互批評指責又過於尖刻, 使兄弟之間時常造成不快, 甚至雙方的家庭也都捲入了爭論, 其後果之一是當雅格布死後, 他的《猜度術》的手稿被他的遺孀和兒子在外藏匿多年, 直到他死後 8 年 (1713 年) 才得以出版, 幾乎使這部經典著作的價值受到損害。

雅格布 • 伯努利一生致力於數學研究, 他是高等分析的正規方法的最重要的創建者之一, 對十七世紀下半葉近代數學的發展產生了巨大的影響。

## 文　　獻

### 原始文獻


[1] J. Bernoulli, *Ars conjectandi*, Basel, 1713。

[2] J. Bernoulli, *Opera*, 2 vols., Geneva, 1744 ; Birkhaüser reprint, 1968。


### 研究文獻


[3] J.E. Hofmann, *Jakob Bernoulli*, 見 Dictionary of scientific biography, Vol. 2, 46 − 51。

[4] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937, 131－138。

[5] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[6] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylor & Francis Ltd., London, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981， 第 245－253 頁)。

[7] А. П. Ющкевич, Bernoulli 們： 一個學者家族， 數學譯林， 1988， 3， 第 227－236 頁。