泰 勒

泰勒，B. (Taylor，Brook) 1685 年 8 月 18 日生於英格蘭米德爾塞克斯郡 (Middlesex) 的埃德蒙頓 (Edmonton) 市；1731 年 12 月 29 日卒於倫敦。數學。

泰勒之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Taylor.html

泰 勒

朱 學 賢

(北京大學)

泰勒， B. (Taylor， Brook) 1685 年 8 月 18 日生於英格蘭米德爾塞克斯郡 (Middlesex) 的埃德蒙頓 (Edmonton) 市；1731 年 12 月 29 日卒於倫敦。 數學。

泰勒出生於英格蘭一個富有的且有點貴族血緣的家庭。 父親約翰 (John) 來自肯特郡 (Kent) 的比夫隆 (Bifrom) 家族， 母親奧莉維婭 (Olivia) 是巴特郡 (Bart) 的 N. 坦佩斯特 (Tempest) 爵士的女兒， 祖父納撒尼爾 (Natheniel) 曾支持過克倫威爾 (Cromwell)。 泰勒是長子。

進大學之前， 泰勒一直在家裡讀書。 泰勒全家， 尤其是他的父親， 都喜歡音樂和藝術， 經常在家裡招待藝術家。 這對泰勒一生的工作造成了極大的影響， 這從他的兩個主要科學研究課題： 弦振動問題及透視畫法， 就可以看出來。

1701 年， 泰勒進劍橋大學的聖約翰學院學習， 主要的數學教授是 J. 梅欽 (Machin) 和 J. 基爾 (Keill)。 1709 年， 他獲得法學學士學位。 1714 年獲法學博士學位。 1712 年， 他被選為英國皇家學會會員， 同年進入仲裁 I. 牛頓 (Newton) 和 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 發明微積分優先權爭論的委員會。 從 1714 年起他繼 E. 哈雷 (Halley) 之後擔任皇家學會第一秘書， 1718 年以健康理由辭去這一職務， 但看來更實際的原因是對這一比較受約束的工作不感興趣。

泰勒後期的家庭生活是不幸的。 1721 年， 因和一個據說是出身名門但沒有財產的女人結婚， 遭到父親的嚴厲反對， 只好

離開家庭。 兩年後， 妻子在生產中死去， 才又回到家裡。 1725 年， 在徵得父親同意後， 他第二次結婚， 並於 1729 年繼承了父親在肯特郡的財產。 1730 年， 第二個妻子也在生產中死去， 不過這一次留下了一個女兒伊麗莎白 (Elizabeth)。 妻子的死深深刺激了他， 第二年他也去世了， 安葬在倫敦聖・安教堂墓地。

由於工作及健康上的原因， 泰勒曾幾次訪問法國， 並和法國數學家 P.R. de 蒙莫爾 (Montmort) 多次通信討論級數問題和概率論問題。 據 W. 伯爾 (Ball) 說[1]。 著名的 "騎士遊歷問題"， 即國際象棋中的馬連續地跳遍棋盤上的 64 個格， 且每個格只允許跳進一次， 就是由他提出來， 由蒙莫爾和 A. 棣莫弗 (De Moivre) 解出來的。 後來， L. 歐拉 (Euler) 科學地處理了這一問題。

1708 年， 二十三歲的泰勒得到了 "振動中心問題" 的解， 引起人們的注意， 在這個工作中他用了牛頓的瞬的記號。 他在給基爾教授的信中報告了這一工作， 但直到 1714 年 5 月才發表在《皇家學會哲學會報》(*Philosophical Transaction of the Royal Society*) 上。

從 1714 到 1719 年， 是泰勒在數學上多產的時期。 他的兩本著作： 《正和反的增量法》(*Methodus incrementorum directa et inversa*) 及《直線透視》(*Linear perspective*) 都出版於 1715 年， 它們的第 2 版分別出於 1717 和 1719 年。 從 1712 到 1724 年， 他在《哲學會報》上共發表了十三篇文章， 其中有些是通信和評論。 文章中還包含有毛細管現象、 磁學及溫度計的實驗記錄。

在生命的後期， 泰勒轉向宗教和哲學的寫作， 他的第三本著作《哲學的沉思》(*Contemplatio philosophica*) 在他死後由外孫 W. 楊 (Young) 於 1793 年出版 (私人出資印刷和發行)。

泰勒以微積分學中將函數展開成無窮級數的定理著稱於世。 這條定理大致可以敍述爲： 函數在一個點的鄰域內的值可以用函數在

[1] W.W.R. Ball， *Mathematical recreation and essays*， London， 1912， 175

該點的值及各階導數值組成的無窮級數表示出來， 即 (用現在的記號)

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}+\cdots 。$$

這一定理及其中的無窮級數都以泰勒命名。 這條定理的重要性現在是衆所周知的， 在幾乎任何一本微積分教科書上都能找到， 並在許多數學分支裡有著廣泛的應用。

泰勒定理的首次正式出現是在 1715 年版的《正和反的增量法》的第 23 頁上， 作爲命題 7 的第二個推論。 但在 1712 年 7 月 26 日給梅欽的信中他已敍述了這一結果， 不過當時未給出證明。 後來， H. 貝特曼 (Bateman) 重印了這封信。 泰勒在信上說道， 這一工作， 是因爲在查爾特咖啡館 (Child's Coffeehouse) 裡聽到梅欽關於用 "牛頓級數" 解刻卜勒 (Kepler) 問題的一席談話以及看到發表於 1694 年《哲學會報》上的 "哈雷博士求根法" (*Dr. Halley's method of extracting roots*)， 受到啓發才做出來的。 他在書中也稱讚了牛頓。

這裡有兩點須指出。 一方面， 在十七世紀後期和十八世紀， 隨著航海、 天文和地理學的進展， 迫切要求三解函數表、 對數表和航海表等的揷值有較高的精確度， 因此許多揷值方法應運而生。 其中牛頓揷值公式 (或稱格雷戈里 (Gregory) − 牛頓內揷公式) 用了有限差方法， 這一公式由泰勒發展成把函數展開成無窮級數的最有力的方法。 但另一方面， 除了牛頓以外， 萊布尼茨在有限差分方面也做過許多工作， 伯努利 (Bermoulli) 兄弟等在把函數展開成級數方面有許多重要的貢獻， 而且實際上，J. 伯努利 (Bernoulli) 曾於 1694 年在《教師學報》(*Acta Eruditorum*) 上發表過與泰勒定理相同的結果， 泰勒是知道這一切的， 但在書中沒有提， 這裡包含的某些其它的原因， 我們在後面還會提到。

提一下泰勒在書中給出的定理的證明是很有意思的， 從中一方

面可以看到當時微積分基礎的混亂，另一方面又可以看到許多有識之士爲此作出的努力。泰勒認爲，可以用有限差分和極限既解釋牛頓的流數法又解釋萊布尼茨的微分法，流數法的原理 “全部能從增量法的原理直接推導出來” (雖然萊布尼茨在那時曾說過，這是 “把車子放在馬的前面”)。但如何從有限差分過渡到流數，他 (和萊布尼茨一樣) 並不清楚，認爲只要把 “初始的增量” 寫成零就行了。因此，他先從有限差分出發，得到格雷戈里－牛頓內插公式，然後令其中的初始增量爲零，項數爲無窮，既沒有考慮級數的收斂性也沒有給出餘項的表達式。F. 克萊因 (Klein) 曾評註道[2]，這是一種 “無先例的大膽地通過極限”，“泰勒實際上是用無窮小 (微分) 進行運算，同萊布尼茨一樣認爲其中沒有什麼問題。有意思的是，一個二十多歲的年輕人，在牛頓的眼皮底下，卻離開了他的極限方法”。

在書中及在以後的一些文章中，泰勒用他的定理把函數展開成級數，得到如正弦函數及對數函數的標準展式，並用這一方法求微分方程的通解。他還用級數去解數字方程，得到根的近似值，尤其注意到去解根式方程和超越方程。

然而，在半個世紀裡，數學家們並沒有認識泰勒定理的重大價值。這一重大價值是後來由 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 發現的。他把這一定理刻劃爲微積分的基本定理，並將其作爲自己工作的出發點。十八世紀末，拉格朗日給出了泰勒公式的餘項表達式 (通常稱爲拉格朗日餘項)，並指出，不考慮餘項就不能用泰勒級數。泰勒定理的嚴格證明是在定理誕生的一個世紀之後由 A.L. 柯西 (Cauchy) 給出的。

“泰勒級數” 這一名詞大概是由 S.A. 呂利埃 (L’Huillier) 在 1786 年首先使用的。在此之前，M. de 孔多塞 (Condorcet) 在 1784 年對此級數既用了泰勒的名字又用了 J.L.R. 達朗貝爾 (d’Alembert) 的

[2]F. Klein，*Elementary mathematics from an advanced standpoint*，英譯本，New York，1932，233

名字[3]。

C. 麥克勞林 (Maclaurin) 注意到了泰勒定理的特殊情形，即函數在零點的展開。泰勒在 1717 年版的《增量法》第 27 頁上討論了這一情形，麥克勞林本人也指出，這只是泰勒工作的一個特例。但歷史在這裡開了個玩笑，人們將它作爲一條獨立的定理而歸於麥克勞林。

關於泰勒定理，還有一點要提及，伯努利曾和泰勒爭論這一定理的優先權。主要依據是前面提到的 J. 伯努利 1694 年發表在《教師學報》上的文章。G. 皮亞諾 (Peano) 也認爲定理應歸於伯努利[4]。A. 普林斯海姆 (Pringsheim) 曾證明從伯努利的積分公式通過變量替換可以得到泰勒定理。但歷史的研究表明，並沒有充分的證據表明伯努利 (還有萊布尼茨等人) 已意識到了泰勒定理的最終形式。泰勒獨立地發現了這一定理，並將它敍述成最一般的形式。

發生在泰勒和 J. 伯努利之間的爭論實際上是當時發生的另一場著名大爭論的延伸，即爭論究竟是牛頓還是萊布尼茨首先發明了微積分。英國數學家支持牛頓，歐洲大陸的數學家支持萊布尼茨。爲了證明自己一方擁有微積分的眞經，雙方分別在《哲學會報》和《教師學報》上提出一系列挑戰問題，讓對方解答。這種挑戰曾達到賭 50 個畿尼 (舊英國金幣的名稱) 的激烈程度。泰勒是少數幾個能在這場挑戰中挺得住的英國數學家之一，但他也並不是總能獲勝。有一次，他提出一個形式很複雜的流數積分問題，向所有 “非英國” 數學家挑戰。這一問題在英國只有極少幾個幾何學家通曉，從而認爲是自己一派的優勢。但結果卻不然，J. 伯努利熟知這一積分並指出這一問題早已由萊布尼茨在《教師學報》上解決了。從而這次挑戰泰勒大敗而歸。這場爭論後來演變成尖銳的對立，因而往往缺乏理性和公允，雙方都受到了損害。泰勒雖然很熟悉萊布尼茨和伯努利的許多工作，但在自己的書中隻字不

[3] Gino Loria，*Storia delle mathematicke*，2nd ed.，Milan，1950，649。

[4] G. Peano，*Formulario methematico 5th ed.*，Turin，1906 – 1908，303 – 304。

提。 反過來， 他本人的許多工作 (甚至包括 1714 年的工作) 首創權都遭到了非議。

《 增量法 》一書不僅是微積分發展史上的一部重要著作， 而且還爲數學增添了一門新的分支， 現在稱爲 “有限差分”。 雖然有限差分法在十七世紀時已廣泛用於插值問題， 但正是泰勒的工作才使之成爲一個數學分支， 泰勒是奠基人。 在書中， 他還成功地將這一方法應用於振動弦頻率及其振動形式的研究以及級數求和。

《 增量法 》還包括了泰勒的一些創造性工作， 它們的重要性到後來才被人們認識到。 其中包括微分方程奇解的認識和確定， 涉及變量替換及反函數的導數的公式， 確定振動中心， 曲率及振動弦問題等。 與後三個問題有關的工作早些時候曾在《 哲學會報 》上發表過， 其中包含有計算對數的連分式。 泰勒將曲率半徑看作是通過曲線上三點的極限圓的半徑， 並將曲率與相切角問題聯繫起來， 後一問題可追溯到歐幾里得 (Euclid)。 他用曲率及曲率半徑第一個求得撥動弦的最簡單情形 — 正規振動的解。 在命題 22 和 23 中， 他證明在某些條件下， 每一點的振動取單擺的形式。 他用弦的長度、 重量及擺重來確定單擺的週期。 泰勒關於這一問題的見解影響了後人， 例如 J. 伯努利和兒子 D. 伯努利 (Daniel Bernoulli) 通信討論這一課題時引用了泰勒的工作。

泰勒在其它學科裡也有一些工作值得一提。 例如， 他正確地推導出大氣壓的變化率是高度的對數函數。 關於光的折射本質的第一正確解釋也屬於他 (見 [1])。

泰勒的另一本著作《 直線透視 》是十八世紀有關透視的理論的著作中影響最大的一本。 據 P.S. 瓊斯 (Jones)[5] 統計， 這本書在英國出了四版 (還不算一個修訂本)， 並被譯成法文和義大利文共出了三版。 從 1715 到 1888 年有九人寫了十二本書共二十二版， 追隨泰勒的工作。

[5]E.L. Ince， *Ordinary differential equations*， New York， 1944， 87。

相傳古希臘人在建造露天劇場時應用了透視原理，文藝復興時期的藝術家、建築師和工程師們廣泛應用透視原理於自己的創作。十八世紀的貢獻主要是理論完善及科學抽象。泰勒在書中建立了一系列定理並給出嚴格的證明。其中，最傑出和最富有創造性的思想是對所有的直線和平面分別定義了"沒影點"和"沒影直線"，並對透視問題的反問題的理論和實踐進行了研究，這一問題後來構成了 J. 藍伯特 (Lambert，他開創了理論製圖學的新紀元) 工作的基礎，也是現代攝影地理學的基礎。泰勒自如地運用平行直線在無窮遠處相交的思想，並尋求在透視中直接做幾何構造的方法。

如同泰勒的其它著作一樣，這本書寫得過於簡潔和抽象，遭到了一些批評。J. 伯努利說，這本書"對所有的人說來是深奧的，而對藝術家們說來難以理解，但是它本來是比較專門地爲他們寫的"[6]。考慮到他和泰勒之間的關係，這番話應打點折扣，但泰勒本人也多少意識到這一點，在書的第二版《直線透視的新原理》(*New principles of linear perspective*，1719) 中，他作了一些修改和補充，將原來的 42 頁擴展成 70 頁，並增加了一些圖形說明如何用他的方法直接畫圖。

泰勒的工作受到了後人的讚揚。例如，畫法幾何學的奠基人 G. 蒙日 (Monge) 及其學生 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix) 在 1801 年說它"由於創造性和富有成果的原理，從而高出於其它研究透視的工作"[7]。J. 庫利奇 (Coolidge) 在 1940 年稱泰勒的工作是透視學"整個大建築的拱頂石"[8]。

泰勒對於透視理論有濃厚興趣，不僅因爲它與數學及時代文明相一致，而且由於他的家庭影響，前面我們已指出了這一點。在泰勒家族的檔案裡，據說存有他的繪畫。他的外孫 W. 楊說，泰

[6] *Contemplatio philosophica*，29 (引自《教師學報》)。

[7] *Institut de France*，*Académie des Science*，*Procès-Verbaux des Se'ances de l'Académie*，TomeII，An WIII–XI (1800 – 1804)，1912，360。

[8] J. Coolidge，*A hitory of geometrical methods*，Oxford，1940，108。

勒喜愛風景畫和水彩畫， 作品中表現的技巧及知識的運用， 受到看過這些作品的專家的好評。 在聖約翰學院保存的泰勒的材料中有一份題爲 “論音樂” (*On musick*) 的未發表的手稿， 是由他、 牛頓及佩普斯 (Pepusch) 合作完成的， 後者顯然是寫了音樂的非科學的部分。 據說在 1713 年前， 他還交給皇家學會一篇關於音樂的論文。

研究泰勒的生平及工作表明， 他對數學發展的貢獻， 本質上要比一條以他命名的定理大得多。 他涉及的、 創造的但未能進一步發展的主要數學概念之多令人吃驚。 他的工作過分簡潔抽象難以追隨。 家庭影響、 生活的不幸、 健康不佳以及其它一些無法估量的因素， 影響了他不太長的生命中的數學創造。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Taylor, *Methodus incrementorum, directa et inversa*, London, 1715。

[2] B. Taylor, *Linear perspective*, London, 1715。

[3] B. Taylor, *New principles of linear perspective*, Londeon, 1719

[4] B. Taylor, *Contemplatio philosophica*, London, 1793。

研究文獻

[5] F. Cajori, *A history of mathematics*, Chelsea Pub. Com., New York, 1980。

[6] C.H. Edwards, *The historical development of the calculus*, Springer-Verlag, 1979 (中譯本： C.H. 愛德華， 微積分發展史， 北京出版社， 1987)。

[7] G.A. Gibson, *Taylor's theorem and Bernoulli's theorem ： a historical note*, Proc. of Edinburgh Math. Soc., 39 (1920－21), 25－33。

[8] P.S. Jones, *Brook Taylor and the mathematical theory of linear perspective*, Amer. Math. Monthly, 58 (1957), 597－606。

[9] — , *Brook Taylor*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 265－268。

[10] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[11] V. Sanford, *Brook Taylor, Mathematics Teacher*, 24 (1927), 4, 60－61。

[12] C.B. Boyer, *The concepts of the calculus*, Hafner Pub. Com., 1949 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977)。