丹尼爾 • 伯努利

伯努利， D. (Bernoulli， Daniel) 1700 年 2 月 8 日生於荷蘭格羅寧根 (Groningen)： 1782 年 3 月 17 日卒於瑞士巴塞爾。數學、物理學、醫學。

伯努利之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bernoulli_Daniel.html`

丹尼爾 • 伯努利

仝素勤　　許義夫

(山東教育學院)

伯努利， D. (Bernoulli， Daniel) 1700 年 2 月 8 日生於荷蘭格羅寧根 (Groningen)： 1782 年 3 月 17 日卒於瑞士巴塞爾。 數學、 物理學、 醫學。

丹尼爾 • 伯努利 (Daniel Bernoulli) 是著名的伯努利家族中最傑出的一位， 他是約翰 • 伯努利 (Johann Bernoulli) 的第二個兒子。 丹尼爾出生時， 他的父親約翰正在格羅寧根擔任數學教授。 1713 年丹尼爾開始學習哲學和邏輯學， 並在 1715 年獲得學士學位， 1716 年獲得藝術碩士學位。 在這期間， 他的父親， 特別是他的哥哥尼古拉 • 伯努利 II (Nicolaus Bernoulli II， 1695 – 1726) 教他學習數學， 使他受到了數學家庭的薰陶。 他的父親試圖要他去當商業學徒， 謀一個經商的職業， 但是這個想法失敗了。 於是又讓他學醫， 起初在巴塞爾， 1718 年到了海德堡， 1719 年到施特拉斯堡， 在 1720 年他又回到了巴塞爾。 1721 年通過論文答辯， 獲得醫學博士學位。 他的論文題目是 “呼吸的作用”(*De respiratione*)。 同年他申請巴賽爾大學的解剖學和植物學教授， 但沒有成功。 1723 年， 丹尼爾到威尼斯旅行， 1724 年他在威尼斯發表了他的《數學練習》(*Exercitationes mathematicae*)， 引起許多人的注意， 並被邀請到聖彼得堡科學院工作。 1725 年他回到巴塞爾， 之後他又與哥哥尼古拉 II 一起接受了聖彼得堡科學院的邀請， 到聖彼得堡科學院工作。 在聖彼得堡的八年間 (1725 – 1733)， 他被任命爲生理學院士和數學院士。 1727 年他與 L. 歐拉 (Euler) 一起工作， 起初歐拉作爲丹尼爾的助手， 後來接替了

丹尼爾的數學院士職位。 這期間丹尼爾講授醫學、 力學、 物理學， 做出了許多顯露他富有創造性才能的工作， 但是， 由於哥哥尼古拉 II 的暴死以及嚴酷的天氣等原因， 1733 年他回到了巴塞爾。 在巴塞爾他先任解剖學和植物學教授， 1743 年成爲生理學教授， 1750 年成爲物理學教授， 而且在 1750 − 1777 年間他還任哲學教授。

1733 年丹尼爾離開聖彼得堡之後， 就開始了與歐拉之間最受人稱頌的科學通信， 在通信中， 丹尼爾向歐拉提供最重要的科學信息， 歐拉運用傑出的分析才能和豐富的工作經驗， 給以最迅速的幫助， 他們先後通信四十年， 最重要的通信是 1734 − 1750 年間， 他們是最親密的朋友， 也是競爭的對手。 丹尼爾還同 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 等數學家進行學術通信。

丹尼爾的學術著作非常豐富， 他的全部數學和力學著作、 論文超過八十種。 1738 年他出版了一生中最重要的著作《流體動力學》(*Hydrodynamica*)。 1725 − 1757 年的三十多年間他曾因天文學 (1734)、 地球引力 (1728)、 潮汐 (1740)、 磁學 (1743， 1746)、 洋流 (1748)、 船體航行的穩定 (1754， 1757) 和振動理論 (1747) 等成果， 獲得了巴黎科學院的十次以上的獎賞。 特別是 1734 年， 他與父親約翰以 “行星軌道與太陽赤道不同交角的原因” (*Quelle est al cause physique de l’inclinaison des plans des orbites des pla nètes par rapport au plan de léquateur de la révolution du soleil autour de son axe*， 1734) 的佳作， 獲得了巴黎科學院的雙倍獎金。 丹尼爾獲獎的次數可以和著名的數學家歐拉相比， 因而受到歐洲學者們的愛戴， 1747 年他成爲柏林科學院成員， 1748 年成爲巴黎科學院成員， 1750 年被選爲英國皇家學會會員， 他還是波倫亞 (義大利)、 伯爾尼 (瑞士)、 都靈 (義大利)、 蘇黎世 (瑞士) 和慕尼黑 (德國) 等科學院或科學協會的會員， 在他有生之年， 還一直保留著聖彼得堡科學院院士的稱號。

丹尼爾•伯努利的研究領域極爲廣泛，他工作幾乎對當時的數學和物理學的研究前沿的問題都有所涉及。在純數學方面，他的工作涉及到代數、微積分、級數理論、微分方程、概率論等方面，但是他最出色的工作是將微積分、微分方程應用到物理學，研究流體問題、物理振動和擺動問題，他被推崇爲數學物理方法的奠基人。

數學

1724 年丹尼爾•伯努利在義大利撰寫醫學著作期間，發表了《數學練習》，內容涉及法洛 (faro) 遊戲[1]、流體問題、里卡蒂 (Riccati) 微分方程和由兩個弧組成的半月形問題。在《練習》的第一章部分，他藉助於級數獲得了代數方程數值解的近似值。丹尼爾提出循環級數，並將這些級數應用到求代數方程的根的近似計算中去。爲了達到這個目的，將分式 $\dfrac{a+bz+cz^2+\cdots+rz^m}{1-\alpha z-\beta z^2-\cdots-\delta z^n}$ 分解成部分分式，然後展成爲冪級數，對於單根 $\dfrac{1}{p}$、$\dfrac{1}{q}$、$\cdots$，該級數的一般項及隨後一項爲：

$$P=(Ap^n+Bq^n+\cdots)z^n\text{，}$$

$$Q=(Ap^{n+1}+Bq^{n+1}+\cdots)z^{n+1}\text{。}$$

若 p 比 q 大得多，那麼對充分大的 n、P 可由 Ap^n 近似得到，Q 可由 Ap^{n+1} 近似得到，因此最小的根 $\dfrac{1}{p}$ 可由 $\dfrac{P}{Q}$ 近似得到。以後他還將這種方法應用到無窮冪級數中去。

在級數理論方面，丹尼爾主要研究了正弦級數和餘弦級數，他

[1]一種賭博遊戲，參賭者一次從牌盒中抽出一張牌，每兩次抽牌爲一局，確定輸贏後即重下賭注。

曾給出過像

$$\begin{aligned}\frac{\pi-x}{2} &= \sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots，\\ \frac{x}{2} &= \sin x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots，\\ \frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12} &= -\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 4x-\cdots，\end{aligned}$$

的一類表達式，他認識到級數只在 x 的某些區間上表示這些函數。

在《數學練習》這部著作中，他還針對 1724 年《教師學報》(*Acta eruditorum*) 上發表的義大利人 J. 里卡蒂 (Riccati) 提出的 “里卡蒂方程”，擬定了解決的方案。里卡蒂方程爲

$$\frac{dy}{dx}=A+By+Cy^2，$$

其中 A、B、C 是 x 的函數。這是一個具有重要意義的非線性方程。因爲它與二階線性方程密切相關。對於里卡蒂方程的特殊形式

$$ax^n dx+y^2dx=bdy，$$

丹尼爾指出，當 $n=\dfrac{-4c}{(2c\pm 1)}$ 時，可用分離變量法求解。這裡 c 可取全部整數，包括正、負整數和零。這個方法他發表在 1724 年的《教師學報》上。對於這個方程，里卡蒂本人及約翰•伯努利、尼古拉•伯努利 I 和尼古拉•伯努利 II 都各自獨立地給出了解答。

丹尼爾在概率論和人口統計方面做出了重大貢獻。早在《數學練習》這部著作中，就已經顯露出他對概率問題的興趣。在聖彼得堡期間他又認眞地研究了這方面的問題，發表了有影響的、有重大價值的論文 “關於度量的分類” (*De mensura sortis*)。在這篇論文中他探討了資本利潤的計算，提出了政治經濟學中新型價值理

論的數學表述。他研究了財產增值與道德值之間的關係。特別提出，若一個人獲得利潤 g_1、g_2、g_3、$\cdots$ 的機會是 P_1、P_2、P_3、$\cdots$，這裡 $P_1+P_2+P_3+\cdots=1$，那麼利潤道德值的平均值爲

$$bP_1\log a(a+g_1)+bP_2\log a(a+g_2)+\cdots-b\log a\text{，}$$

且道德期望爲

$$H=(a+g_1)^{P_1}(a+g_2)^{P_2}+\cdots-a\text{。}$$

若利潤與此人的原有資產比較是很小的，那麼道德期望轉化成爲數學期望

$$H=P_1g_1+P_2g_2+\cdots\text{。}$$

緊接著，丹尼爾又將這一研究應用到風險保險業和解決由他哥哥尼古拉 II 提出的“聖彼得堡賭博悖論”。甲先付給乙一筆賭注，然後甲扔硬幣，只要第一次出現了正面朝上，賭博就結束，此時乙必須付給甲 2^{n-1} 元，其中 n 表示在第 n 次扔硬幣時，首次出現了正面朝上。現在要問：甲預付給乙的賭注應爲多少才算公正。根據概率知識，這筆賭注應等於甲將獲得的期望值，但是計算一下，這個期望值應等於

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty\text{。}$$

這就出現了賭博悖論。當時許多人都研究過這個悖論，但沒有得出滿意的結果。丹尼爾主張用所謂“有節制的道德期望”代替計算結果爲無窮大的數學期望來解決這個矛盾。

丹尼爾 1760 年又研究了一類醫學統計問題，這類問題涉及在各不同年齡組中天花病的死亡率。運用微分方程，丹尼爾計算出有關的數值表，其數據在 24 年中是有效的。由丹尼爾提出的已知某些結果的條件，在這些條件下推測出未知原因的逆概率問題，有特別重要的應用價值。這類問題以後由 T. 貝葉斯 (Bayes) 等人發展了。丹尼爾還將概率論應用於人口統計，探討了誤差理論，提

出了正態分佈誤差理論， 並用這一理論將觀察誤差分爲偶然的和系統的兩類， 發表了第一個正態分佈表， 使誤差理論更接近現代概念。

丹尼爾在研究由橢圓積分產生的一類新的超越函數中， 也曾經提出過插值問題： 在對偏微分方程解的研究中， 丹尼爾引入了某些函數的級數展開式， 他還將他高超的數學技巧應用到關於弦的振動、 懸垂鏈線的擺動及用空氣發聲的樂器頻率的研究中， 提出了有創造性的預見。

物理學

十八世紀， 由於幾類物理問題的研究， 促進了微分方程理論的發展， 其中很重要的就是彈性問題。 自 1728 年， 丹尼爾和歐拉就致力於柔性物體和彈性物體的力學研究。 他們研究過一端固定的水平彈性帶的曲率的確定。 由於重物 P 作用在自由端， 而它自身的重力 p 作用在其重心上， 均勻彈性帶繞 s 點的總力矩與曲率半徑 R 的關係， 丹尼爾 • 伯努利用以下方程表示

$$Px + \frac{P}{L}\int s dx = \frac{m}{R} 。$$

式中 s 是弧長， x 爲從自由端處取的橫坐標， m 爲彎曲模量， L 是長， R 爲曲率半徑。

在 1733 年， 丹尼爾離開聖彼得堡之前， 發表了論文 “關於用柔軟細繩聯結起來的一些物體以及垂直懸掛的鏈線的振動定理” (*Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae*)， 在這篇論文中， 他指出上端固定懸掛鏈線， 本身沒有重量， 但帶等間隔的重荷。 當鏈線振動， 質點系相對於通過懸掛點的垂線作不同模式的小振動， 這些模式中的每一個有各自的特徵頻率， 當有 n 個負荷時， 整個系統有 n 個不同的帶有一個特徵頻率的主要模式。 他發現， 對於一個均勻

的，長度爲 L 的自由懸掛鏈線，從最低點算起，相距 x 處的位移爲 y，它滿足方程

$$\alpha\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx})+y=0。$$

用現代記法，$y=AJ_0(2\sqrt{\frac{x}{\alpha}})$，這裡 α 滿足方程

$$J_0(2\sqrt{\frac{L}{\alpha}})=0，$$

J_0 是第一類零階巴塞耳 (Bessel) 函數。他指出，α 表徵振動模式和特徵頻率。此方程有無窮多個實根，因此這個鏈線可以表現出有頻率 $\nu=(2\pi)^{-1}\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$ 的無窮多個簡諧振動。這個原理，等價於以後的達朗貝爾 (d'Alembert) 原理。在此基礎上，他又討論了非均勻厚度的振動鏈，他引進了微分方程

$$\alpha\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right)+y\frac{dg(x)}{dx}=0，$$

式中 $g(x)$ 是鏈線的重量分佈。對於 $g(x)=(\dfrac{x}{L})^2$ 的情況，他給出了一個級數解

$$y=2A(\frac{2x}{\alpha})^{-\frac{1}{2}}J_1(2\sqrt{\frac{2x}{\alpha}})，$$

式中 α 滿足 $J_1(2\sqrt{\frac{2L}{\alpha}})=0$，$J_1$ 是第一類一階巴塞耳函數。

在 1741－1743 年間，丹尼爾又研究了關於彈性弦的橫向振動問題。在論文“彈性振動的疊加” (*De vibrationibus et sono laminarum elasticarum*) 中，他研究了一端釘在堅直牆上的長度爲 L 的水平棒的振動。實際上，早在 1743 年他就開始了這方面的研究，他導出了一個四階方程

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{y}{f^4}，\quad 即\ y=f^4\frac{d^4y}{dx^4}，$$

這裡 $f^4 = \dfrac{m^4 L}{g}$ 爲一常數， x 是棒上距自由端的距離， y 是棒在 x 處的振幅。

十八世紀中葉， 丹尼爾 • 伯努利、 歐拉、 約翰 • 伯努利、 達朗貝爾等人對弦振動和杆振動的研究已經導出了一階、 二階或更高階的微分方程， 如果把引起彈性振動慣性力考慮進去， 就可以得出彈性體的動力學的基本方程， 從這個基本方程出發， 可以得出各種情況下的波動方程， 歐拉和達朗貝爾就是用偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

來表示弦振動的波動方程。 但是丹尼爾卻以完全不同的形式即用函數的級數展開式給出弦振動問題的解， 從而引起了在丹尼爾、 歐拉與達朗貝爾之間的關於弦振動可允許的解的爭論， 後來 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也參加了這種爭論。

早在 1733 年前的論文中， 丹尼爾就明確地說明振動的弦能有較高的振動模式。 在 1741 − 1743 年的振動杆的橫向振動的論文中， 他又明確地說明了簡單振動 (基音) 和疊合振動 (高次諧音) 可以同時存在。 但是這些思想都是從物理學上加以理解， 而沒有從數學上加以描述。 當他看到歐拉和達朗貝爾的波動方程並給出它的解時， 他在 1753 年又發表文章， 斷言： 振動弦的許多模式 (簡單和疊加的) 能夠同時存在。 假定長度爲 α 的弦， 從單一的振動

$$y = \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{\alpha} \ (n \text{ 爲任意整數})$$

出發， 它的全部振動可用一個級數形式表示

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\alpha} \cos \frac{n\pi ct}{\alpha} \text{。}$$

因此他認爲這個振動是第一基音、 第二諧音、 第三諧音、 ······ 的一切可能的簡諧振動的一個疊合。 丹尼爾的這個觀點是非常重

要的，因爲他首次提出了將問題的解表示爲三角級數的形式，這爲將一個函數展爲傅里葉級數的純數學問題奠定了物理基礎，促進了分析學的發展。歐拉贊同丹尼爾的關於許多模式能夠同時存在，使得一個振動中的弦能發出許多諧音的觀點，但是又和達朗貝爾一起反對關於在弦振動中全部可能的初始曲線能表示成爲正弦級數的主張。丹尼爾堅持認爲有足夠多的常數 a_n 使級數 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ 適合任一曲線，但他缺乏充分的數學論證，爭論長達十幾年之久。實際上，這涉及到能用正弦級數表示的函數類的寬窄，直到 1773 年爭論已經過去，丹尼爾自己也才認識到這個問題。

正當弦振動問題研究還在進行時，丹尼爾又研究了聲音在空氣中的傳播問題。1762 年，丹尼爾發表一篇關於在琴管內 (圓柱形管) 空氣振動的論述，發現了風琴泛音的頻率是基音頻率的奇數倍的定理。這篇論文也首次創立了錐形管發聲樂器的理論，提出了無窮長錐形管的泛音與基音是和諧的。他通過物理實驗證實了他的結論。丹尼爾還研究了不均勻的振動，首次解決了從密度分佈確定振動弦的頻率的振動逆問題：研究了由不同密度和不同長度組成的弦的振動的特殊情況：比較了一個物體掛在柔性鏈的擺動與繞一固定點的振動這兩種情形：1774 年還完善了他的關於振動的疊加原理。總之，丹尼爾在彈性振動力學中做出了很大的貢獻。

丹尼爾除了對剛體振動、柔性物體和彈性物體的力學研究外，還對剛體的旋轉運動、固體在對抗媒質中的運動、以及摩擦力問題及 “活力” (live force，即動能) 守恆問題都分別進行了探討，先後發表論文 10 多篇。他也探討了作用到海船上的風力所產生的結果，以及在海洋中減少船隻的橫擺和縱擺的穩定性問題，把歐拉研究的關於船的自由振動問題擴充到受迫振動的情況。在天體力學上，他和歐拉等人研究了太陽與潮汐、月亮與潮

汐之間的由於引力影響而產生的平衡理論： 和他的父親約翰共同研究了朝向太陽赤道的行星軌道的傾角增加的原因。

丹尼爾還和他的弟弟約翰·伯努利 II (Johann Bernoulli II，1710 – 1790) 試圖建立關於磁學的理論， 1743 年， 他提出了通過改進羅盤結構， 減少羅盤傾角誤差的意見。

丹尼爾在物理學上的成就， 以流體力學最爲突出。 1738 年，出版了他的名著《流體動力學》， 這本書的出版， 開創了 “流體力學” 這門學科。 書中匯集了他在這方面的研究成果。

《流體動力學》一書共有 13 章。 這部著作開頭就展現了關於水力學的歷史以及對流體靜力學的簡短的描述， 緊接著他用流體的壓強、 密度和流速作爲描寫流體的基本物理量， 他認真研究了流體注入和流出的水平面變化情況， 考察了流體束的初始過程 (非靜態流) 和流束受阻情況， 給出了揭示三者之間關係的 “伯努利方程”。 丹尼爾從實例入手， 設一個平放的水管道， 管內壁的壓力爲 P， 接通一個充水的非常寬的容器， 讓水從管道以速度 v 流出， 若 z 爲容器中水表面到管道口間的距離， 他推得方程

$$P + z + v^2 = A = \text{常數}。$$

由於丹尼爾的特有的測量方法， 這個公式中的常數有其特定的數值。 對於密度均勻的水沿著高度 z 有變化的管道中的定常流的伯努利方程爲

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \text{常數}，$$

此處 v 爲水流速度， P 爲大氣壓力， ρ 爲水的密度， gh 爲重力勢能。 伯努利方程可由無旋的、 無粘性的流體作定常流運動時的歐拉方程

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v^2 = G - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

沿任意曲線各分得出。 伯努利方程不僅對液體 (如水) 的定常流的運動是成立的， 而且對於在高壓下自小孔噴出的氣體， 其運動也可

以看作是定常的無旋流動， 因此伯努利－歐拉方程也是成立的。

在這本著作中， 丹尼爾也專門討論了 “彈性流體” 即氣體的特性及運動， 他提出了 “流體由於速度增大， 而使壓力減小” 的觀點。 通過實驗證明了分子對器壁的碰撞， 並以此解釋壓強和氣體的某些常數， 也指出了分子的無規則運動， 以及隨著溫度的增高、 氣體的壓強和運動增加的事實， 從而奠定了 “氣體動力學 (分子運動論)” 和熱學的理論基礎。 丹尼爾在這部著作中還討論了流束受阻的反作用力的計算及對作用物體表面的壓力的測定問題。

丹尼爾在流體力學中建立的 “伯努利方程” 及 “內壓” 概念是有漏洞的， 他的父親約翰和歐拉在這方面作了改進。

丹尼爾·伯努利不僅在數學和物理學上取得了許多成就， 而且在醫學領域裡也有研究成果。 1721 年， 他的博士論文就是關於呼吸力學的綜合理論： 1728 年， 他發表了關於肌肉收縮的力學理論的論文， 提出了心臟所作機械功的計算方法： 在生理學上， 他提出 “極大工作” 的概念， 即一個人在一段持續的時間內 (如一個工作日) 所能做的工作量。 由於他在數學上的興趣遠比醫學大， 因此他雖然起初成了一名外科大夫， 但最終還是轉向了數學和力學。

丹尼爾·伯努利頭腦機敏和富有想像力。 他是第一個把牛頓和萊布尼茨的微積分思想連接起來的人。 他又是在十八世紀以新的無限小數學爲主要武器探索由實驗揭示的自然現象的數學物理方法的奠基者之一。 他同時也對實驗物理及儀器設備表現出極大興趣。

丹尼爾在學術研究方面與歐拉、 達朗貝爾、 拉格朗日及其父兄保持著密切的聯繫， 特別與歐拉有著極深厚的友誼， 密切合作， 互爲輔成。 他們經常交流學術上的某些觀點， 爭論一些數學和力學的疑難問題， 促進學術的發展。 “爭鳴” 成爲丹尼爾治學思想的一個重要內容， 這種學術上的爭論方式至今仍是科學發展的動力之一。

丹尼爾由於在學術研究上涉及的領域極爲廣泛， 有時這也妨礙

了他某些計劃的完成。 尤其令人遺憾的是， 他未能跟上由於偏微分方程的發現而引起的數學前進的步伐， 例如在弦和杆的振動問題的研究中， 他的物理思想是正確的， 但沒有用恰當的數學來支持它。 儘管如此， 丹尼爾豐碩的科學成就完全足以確保他在科學史上持久的地位。

文　　獻

原始文獻

[1] D. Bernoulli, *Exercitationes quaedam mathematicae*, Venice, 1724。

[2] D. Bernoulli, *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Strasbourg, 1738 (英譯本： *Hydro dynamics by Daniel Bernoulli*, New York, 1968)。

研究文獻

[3] H. Straub, *Daniel Bernoulli*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 2, 36 − 46。

[4] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937, 131 − 138。 (中譯本： E.T. Bell， 大數學家， 九章出版社， 2000)。

[5] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[6] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylor & Francis Ltd., London, 1958 (中譯本： J.F. 斯科特， 數學史， 商務印書館， 1981， 第 245 − 253 頁)。

[7] А. П. Ющкевич， Bernoulli 們：一個學者家族，數學譯林， 1988， 3， 第 227 − 236 頁。