

歐 拉

歐拉，L. (Euler，Leonhard) 1707 年 4 月 15 日生於瑞士巴塞爾；1783 年 9 月 18 日卒於俄國聖彼得堡。數學、力學、天文學、物理學。

歐拉之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Euler.html>

歐 拉

張 洪 光

(南開大學)

歐拉，L. (Euler，Leonhard) 1707年4月15日生於瑞士巴塞爾；1783年9月18日卒於俄國聖彼得堡。數學、力學、天文學、物理學。

歐拉的祖先原來居住在瑞士東北部博登湖(康斯坦斯湖)畔的小城—林道。十六世紀末，他的曾祖父漢斯·喬治·歐拉(Hans Georg Euler)帶領全家順萊茵河而下，遷居巴塞爾。這個家族幾代人多為手藝勞動者。歐拉的父親保羅·歐拉(Paul Euler)則畢業於巴塞爾大學神學系，是基督教新教的牧師。1706年，保羅與另一位牧師的女兒瑪格麗特·勃魯克(Margaret Brucker)結婚。翌年春，歐拉降生。1708年，保羅舉家遷居巴塞爾附近的村莊—里亨(Riehen)。歐拉就在這田園靜謐的鄉村度過他的童年。

歐拉的父親很喜愛數學。還在大學讀書時，他就經常去聽雅格布·伯努利(Jacob Bernoulli)的數學講座。他親自對歐拉進行包括數學在內的啟蒙教育，並盼望兒子成為名門的後起之秀。賢慧的母親為了使歐拉及時受到良好的學校教育，把他送到巴塞爾外祖母家生活了幾年，入那裡的一所文科中學唸書。可是，這所學校不教數學。勤勉好學的歐拉獨自隨業餘數學家J. 伯克哈特(Burckhart)學習。歐拉聰敏早慧，酷愛數學。他曾下苦功研讀C. 魯道夫(Rudolf)的《代數學》(*Algebra*，1553)達數年之久。

1720年秋，年僅十三歲的歐拉進了巴塞爾大學文科。當時，約翰·伯努利(Johann Bernoulli)任該校數學教授。他每天講授基礎數學課程，同時還給那些有興趣的少數高材生開設了更高深的

數學、物理學講座。歐拉是約翰·伯努利的最忠實的聽衆。他勤奮地學習所有的科目，但仍不滿足。歐拉後來在自傳中寫道：“……不久，我找到了一個把自己介紹給著名的約翰·伯努利教授的機會。……他確實忙極了，因此斷然拒絕給我個別授課。但是，他給了我許多更加寶貴的忠告，使我開始獨立地學習更困難的數學著作，盡我所能努力地去研究它們。如果我遇到什麼障礙或困難，他允許我每星期六下午自由去找他，他總是和藹地為我解答一切疑難……，無疑，這是在數學學科上獲得成功的最好的方法。”約翰的兩個兒子尼古拉·伯努利 II (Nicolaus Bernoulli II)、丹尼爾·伯努利 (Daniel Bernoulli)，也成了歐拉的摯友。

1722 年夏，歐拉在巴塞爾大學獲學士學位。翌年，他又獲哲學碩士學位。但授予這一學位是在 1724 年 6 月 8 日的會議上正式通告的。此前，他為了滿足父親的願望，於 1723 年秋又入神學系。他在神學、希臘語、希伯萊語方面的學習並不成功。他仍把大部分時間花在數學上。儘管歐拉後來徹底放棄了當牧師的念頭，但他卻終生虔誠地信奉基督教。

歐拉十八歲開始其數學研究生涯。1726 年，他在《教師學報》(Acta eruditorum) 上發表了關於在有阻尼的介質中的等時曲線結構問題的文章。翌年，他研究彈道問題和船桅的最佳佈置問題。後者是這年巴黎科學院的有獎徵文課題。歐拉的論文雖未獲得獎金，卻得到了榮譽提名。此後，從 1738 年至 1772 年，歐拉共獲得巴黎科學院十二次獎金。

在瑞士，當時青年數學家的工作條件非常艱難，而俄國新組建的聖彼得堡科學院正在網羅人才。1725 年秋，尼古拉 II 和丹尼爾應聘前往俄國，並向當局力薦歐拉。翌年秋，歐拉在巴塞爾收到聖彼得堡科學院的聘書，請他去那裡任生理學院士助理。然而，故土難離。歐拉開始用數學和力學方法研究

生理學，同時仍期望在巴塞爾大學找到職位。恰好，這時該校有一位物理學教授病故，出現空席。歐拉向學校教授議會遞交了“論聲音的物理學原理”(*Dissertatio physica de sono*，1727)的論文，爭取教授資格。在激烈的競爭中，未滿二十歲的歐拉落選了。1727年4月5日歐拉告別故鄉，5月24日抵達聖彼得堡，從那時起，歐拉的一生和他的科學工作都緊密地同聖彼得堡科學院和俄國聯繫在一起。他再也沒有回到瑞士。但是，出於對祖國的深厚感情，歐拉始終保留了他的瑞士國籍。歐拉到達聖彼得堡後，立即開始研究工作。不久。他獲得了在真正擅長的領域從事研究工作的機會。1727年，他被任命為科學院數學部助理院士。他撰寫的關於聖彼得堡科學院學術會議情況的調查報告，也開始在《聖彼得堡科學院彙刊(1727)》(*Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*)第二卷(St. Petersburg，1729)上發表。儘管那些年俄國政局動盪，聖彼得堡科學院還處在艱難歲月之中，但周圍的學術氣氛對發展歐拉的才華特別有利，那裡聚集著一群傑出的科學家，如數學家C. 哥德巴赫(Goldbach)、丹尼爾·伯努利，力學家J. 赫爾曼(Hermann)，三角學家F. 梅爾(Maier)，天文學家和地理學家J.N. 德萊索(Delisle)等。他們同歐拉的個人情誼與共同的科學興趣，使得彼此在科研工作中配合默契、相得益彰。1731年，歐拉成為物理學教授。1733年，丹尼爾·伯努利返回巴塞爾後，歐拉接替了他的數學教授職務，擔負起領導科學院數學部的重任。這一對親密的朋友，以後通信四十多年，促進了科學的競爭和發展。是年冬，歐拉和科學院預科學校的美術教師、瑞士畫家G. 葛塞爾(Gsell)的女兒柯黛林娜·葛塞爾(Katharina Gsell)結婚。翌年，其長子約翰·阿爾勃蘭克(Johann Albrecht)降生。1740年，卡爾(Karl)出世。恬靜、美滿的家庭生活伴隨著歐拉科學生涯的第一個黃金時期。

還在聖彼得堡科學院建成之初，俄國政府就責成它除了進行純科學研究之外，還要培養、訓練俄國科學家。為此，科學院建立了一所大學和預科學校，大學辦了近五十年，預科學校一直辦到 1805 年。俄國政府還委託科學院制定俄國的地圖，解決各種具體技術問題。歐拉積極參與並領導了科學院的這些工作。從 1733 年起，他和德萊索成功地進行了地圖研究。從三十年代中期開始，歐拉以極大的精力研究航海和船舶建造問題。這些問題對於俄國成為海上強國，是具有重大意義的。歐拉是各種技術委員會的成員，又擔任科學院考試委員會委員。他既要為科學院的期刊撰稿、審稿，還要為附屬大學、預科學校準備講義、開設講座，工作十分忙碌。然而，他的主要成就是在數學研究上。

在聖彼得堡的頭十四年間，歐拉以無可匹敵的工作效率在分析學、數論和力學等領域作出許多輝煌的發現。截至 1741 年，他完成了近九十種著作，公開發表了 55 種，其中包括 1936 年完成的兩卷本《力學或運動科學的分析解說》(*Mechanica sive motus scientia analytice exposita*)。他的研究碩果累累，聲望與日俱增，贏得了各國科學家的尊敬。歐拉從前的導師約翰·伯努利早在 1728 年的信中就稱他為“最善於學習和最有天賦的科學家”，1737 年又稱他是“最馳名和博學的數學家”。歐拉後來謙遜地說：“……我和所有其他有幸在俄羅斯帝國科學院工作過一段時間的人都不能不承認，我們應把所獲得的一切和所掌握的一切歸功我們在那兒擁有的有利條件。”

由於過度的勞累，1738 年，歐拉在一場疾病之後右眼失明了。但他仍舊堅韌不拔地工作。他熱愛科學，熱愛生活。他非常喜歡孩子（他一生有過十三個孩子，除了五個以外都夭亡了）。寫論文時往往膝上抱著嬰兒，大一點的孩子則繞膝戲耍。他酷愛音樂。在撰寫艱深的數學論文時，他的“那種輕鬆自如是令人難以置信的”。

1740 年秋冬，俄國政局再度驟變，形勢極不安定。歐拉此時與聖彼得堡科學院粗魯、專橫的顧問 J.D. 舒馬赫爾 (Schumacher) 也產生了磨擦。為了使自己的科學事業不愛損害，歐拉希望尋求新的出路。恰好這年夏天繼承了普魯士王位的腓特烈 (Frederick) 大帝決定重振柏林科學院，他熱情邀請歐拉去柏林工作。歐拉接受了邀請。1741 年 6 月 19 日，歐拉啓程離開聖彼得堡，7 月 25 日抵達柏林。

柏林科學院是在 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 的大力推動下於 1700 年創立的，後來它衰落了。歐拉在柏林 25 年。那時，他精力旺盛，不知疲倦地工作。他鼎力襄助院長 P. 莫佩蒂 (Maupertuis)，在恢復和發展柏林科學院的工作中發揮了重要作用。

在柏林，歐拉任科學院數學部主任。他是科學院的院務委員、圖書館顧問和學術著作出版委員會委員。他擔負起了其它許多行政事務，如管理天文台和植物園，提出人事安排，監督財務，以及曆書和地圖的出版工作。當院長莫佩蒂外出期間，歐拉代理院長，1759 年莫佩蒂去世後，雖然沒有正式任命歐拉為院長，但他實際上一直領導著科學院的工作。歐拉和莫佩蒂的友誼，使歐拉能對柏林科學院的一切活動，尤其是在選拔院士方面，施加巨大影響。

歐拉還擔任過普魯士政府關於安全保險、退休金和撫恤金等問題的顧問，並為腓特烈大帝了解火炮方面的最新成果 (1745 年)，設計改造費諾 (Finow) 運河 (1749 年)，曾主管普魯士皇家別墅水力系統管系和泵系的設計工作。他和德國許多大學的教授保持廣泛聯繫，對大學教科書的編寫和數學教學起了促進作用。

在此期間，歐拉一直保留著聖彼得堡科學院院士資格，領取年俸。受該院委託，歐拉為其編纂院刊的數學部分，介紹西歐的科學思想，購買書籍和科學儀器，同時推薦研究人員和課題。他在培養俄國的科學人才方面起了重大的作用。他還經常把自己的學術

論文寄往聖彼得堡。他的論文約有一半是用拉丁文在聖彼得堡發表的，另一半用法文在柏林出版。另外，他還先後當選為倫敦皇家學會會員(1749年)。巴塞爾物理數學會會員(1753年)及巴黎科學院院士(1755年)。

柏林時期是歐拉科學研究的鼎盛時期，其研究範圍迅速擴大。他與 J.R. 達朗貝爾 (D'Alembert) 和丹尼爾·伯努利展開的學術競爭奠定了數學物理的基礎；他與 A. 克萊羅 (Clairaut) 和達朗貝爾一起推進了月球和行星運動理論的研究。與此同時，歐拉詳盡地闡述了剛體運動理論，創立了流體動力學的數學模型，深入地研究了光學和電磁學，以及消色差折射望遠鏡等許多技術問題。他寫了大約 380 篇(部)論著出版了其中的 275 種。內有分析學、力學、天文學、火炮和彈道學、船舶建造和航海等方面的幾部巨著，其中 1748 年出版的兩卷集著作《無窮分析引論》(*Introductio in analysin infinitorum*) 在數學史上佔有十分重要的地位。

歐拉參加了十八世紀四十年代關於萊布尼茨和 C. 沃爾夫 (Wolf) 的單子論的激烈辯論。歐拉在自然哲學方面接近 R. 笛卡兒 (Descartes) 的機械唯物主義，他和莫佩蒂都是單子論的“勁敵”。1751 年，S. 柯尼格 (König) 以聳人聽聞的新論據，發表了幾篇批評莫佩蒂的“最小作用原理”的文章。歐拉翌年撰文反駁，並同莫佩蒂用更淺顯的語言來解釋最小作用原理。除了這些哲學和科學的爭論以外，對於數學的發展來說，歐拉參加了另外三場更重要的爭論：與達朗貝爾關於負數對數的爭論；與達朗貝爾、丹尼爾·伯尼利關於求解弦振動方程的爭論；與 J. 多倫 (Dollond) 關於光學問題的爭論。

1759 年莫佩蒂去世後，歐拉在普魯士國王的直接監督之下負責柏林科學院的工作。歐拉同腓特烈大帝之間的關係並不融洽。1763 年，當獲悉腓特烈想把院長的職務授予達朗貝爾後，歐

拉開始考慮離開柏林。聖彼得堡科學院立即遵照凱瑟琳 (Catherine) 女皇旨意寄給歐拉聘書，誠摯希望他重返聖彼得堡。但是達朗貝爾拒絕長期移居柏林，使腓特烈一度推遲就院長人選作最後的決定。“七年戰爭”之後，腓特烈粗暴地干涉歐拉對柏林科學院的事務管理。1765 年至 1766 年，在財政問題上，歐拉與腓特烈之間引發了一場嚴重的衝突。他懇請普魯士國王同意他離開柏林。1766 年 7 月 28 日，歐拉重返聖彼得堡，他的三個兒子和兩個女兒也回到俄國，伴於身旁。

歐拉的家安置在涅瓦河畔離聖彼得堡科學院不遠的舒適之處。他的長子阿爾勃蘭克這年成爲科學院院士、物理學部教授，三年後又被任命爲科學院的終身秘書。1766 年，歐拉父子還同時當選爲科學院執行委員。歐拉的工作是順心的，然而，厄運也接二連三地向他襲來。回到聖彼得堡不久，一場疾病使歐拉的左眼幾乎完全失明。這時，他已經不能再看書了。只能勉強看清大字體的提綱，用粉筆在石板上寫很大的字母。1771 年，歐拉雙目完全失明。這一年，聖彼得堡的一場特大火災又使歐拉的住所和財產付之一炬，僅搶救出歐拉及其手稿。1773 年 11 月，歐拉夫人柯黛琳娜去世。三年後，她同父異母的妹妹莎洛姆·葛塞爾 (Salome Gsell) 成爲歐拉的第二個妻子。

歐拉晚年遭受雙目失明、火災和喪偶的沉重打擊，他仍不屈不撓地奮鬥，絲毫沒有減少科學活動。在他的周圍，有一群主動的合作者，包括：他的兒子阿爾勃蘭克和克利斯托夫 (Christoph)；W.L. 克拉夫特 (Krafft) 院士和 A.J. 萊克塞爾 (Lexell) 院士；兩位年輕的助手 N. 富斯 (Fuss) 和 M.E. 哥洛文 (Golovin)。歐拉和他們一起討論著作出版的總計劃，有時簡要地口述研究成果。他們則使歐拉的設想變得更加明確，有時還爲歐拉的論著編纂例證。據富斯自己統計，七年內他爲歐拉整理論文 250 篇，哥洛文整理了 70 篇。歐拉非常尊重別人的勞動。1772 年出版的《月球運動理論

和計算方法》(*Theoria motuum lunae , nova methodo pertractata*) 是在阿爾勃蘭克、克拉夫特和萊克塞爾的幫助下完成的，歐拉把他們的名字都印在在這本書的扉頁上。

重返聖彼得堡後，歐拉的著作出版得更多。他的論著幾乎有一半是 1765 年以後出版的。其中，包括他的三卷本《積分學原理》(*Institutiones calculi integralis*，1768–1770) 和《關於物理學和哲學問題給德韶公主的信》(*Lettres à une princesse d'Allemagne Sur divers sujets de physique et de philosophie*，1768–1772)。前者的最重要部分是在柏林完成的。後者產生於歐拉給普魯士國王的姪女的授課內容。這本文筆優雅、通俗易懂的科學著作出版後，很快就在歐洲翻譯成多種文字，暢銷各國，經久不衰。歐拉是歷史上著作最多的數學家。

歐拉的多產也得益於他一生非凡的記憶力和心算能力。他七十歲時還能準確地回憶起他年輕時讀過的荷馬史詩《伊利亞特》(Iliad) 每頁的頭行和末行。他能夠背誦出當時數學領域的主要公式和前 100 個質數的前六次幕。M. 孔多塞 (Condorcet) 講述過一個例子，足以說明歐拉的心算本領：歐拉的兩個學生把一個頗為複雜的收斂級數的 17 項相加起來，算到第 50 位數字時因相差一個單位而產生了爭執。為了確定誰正確，歐拉對整個計算過程進行心算，最後把錯誤找出來了。

1783 年 9 月 18 日，歐拉跟往常一樣，度過了這一天的前半天。他給孫女輔導了一節數學課，用粉筆在兩塊黑板上作了有關氣球運動的計算，然後同萊克塞爾和富斯討論兩年前 F.W. 赫歇爾 (Herschel) 發現的天王星的軌跡計算。大約下午 5 時，歐拉突然腦出血，他只說了一句“我要死了”，就失去知覺。晚上 11 時，歐拉停止了呼吸。

歐拉逝世不久，富斯和孔多塞分別在聖彼得堡科學院和巴黎科學院的追悼會上致悼詞。孔多塞在悼詞的結尾耐人尋味地說：“歐

拉停止了生命，也停止了計算。”

歐拉的著作在他生前已經有多種輸入了中國，其中包括著名的、1748年初版本的《無窮分析引論》。這些著作有一部分曾藏於北京北堂圖書館。它們是十八世紀四十年代由聖彼得堡科學院贈給北京耶穌會或北京南堂耶穌學院的。這也是中俄數學早期交流的一個明證。十九世紀七十年代，清代數學家華蘅芳和英國人傅蘭雅 (John Fryer) 合譯的《代數術》(1873) 和《微積溯源》(1874)，都介紹了歐拉學說。在此前後，李善蘭和偉烈亞力 (Alexander Wylie) 合譯的《代數學》(1859)、趙元益譯的《光學》(1876)、黃鍾駿的《疇人傳四編》(1898) 等著作也記載了歐拉學說或歐拉的事蹟 (詳見文獻 [32])。中國學者是很早熟悉歐拉的。歐拉不僅屬於瑞士，也屬於整個文明世界。著名數學史家 A. П. 尤什凱維奇 (Юшкевич) 說，人們可以藉 B. 弗坦內里 (Fontenelle) 評價萊布尼茨的話來評價歐拉，“他是樂於看到自己提供的種子在別人的植物園裡開花的人。”

在歐拉的全部科學貢獻中，其數學成就佔據最突出的地位。他在力學、天文學、物理學等方面也閃現著耀眼的光芒。

數學

歐拉是十八世紀數學界的中心人物。他是繼 I. 牛頓 (Newton) 之後最重要的數學家之一。在歐拉的工作中，數學緊密地和其它科學的應用、各種技術問題的應用以及公衆的生活聯繫在一起。他常常直接為解決力學、天文學、物理學、航海學、地理學、大地測量學、流體力學、彈道學、保險業和人口統計學等問題提供數學方法。歐拉的這種面向實際的研究風格，使得人們常說：應用是歐拉研究數學的原因。其實，歐拉對數學及其應用都十分愛好。作為一位數學家，歐拉把數學用到整個物理領域中去。他總是首先試圖用數學形式表示物理問題，為解決物理問題

而提出一種數學思想並系統地發展和推廣這一思想。因此，歐拉在這個領域中的傑出成就作為一個整體，可以用數學語言加以系統地闡述。他酷愛抽象的數學問題，非常著迷於數論就是例子。歐拉的數學著作在其各種科學著作中所佔的比重也明顯地說明了這一點。現代版的《歐拉全集》(*Leonhardi Euleri Opera omnia*，1911-?) 72 卷(74 部分；近況詳見文獻[1])中有 29 卷屬於純粹數學。

歐拉在連續和離散數學這兩方面都同樣有著力，這是他的多方面天才的最顯著的特點之一。但是，在他的數學研究中，首推第一的是分析學。這同他所處的時代，特別是當時自然科學對分析學的迫切需要有關。歐拉把由伯努利家族繼承下來的萊布尼茨學派的分析學的內容進行整理，為十九世紀數學的發展打下了基礎，他還把微分積分法在形式上進一步發展到複數的範圍，並對偏微分方程、橢圓函數論、變分法的創立和發展留下先驅的業績。在《歐拉全集》中，有 17 卷屬於分析學領域。他被同時代的人譽為“分析的化身”。

歐拉的計算能力，特別是他的形式計算和形式變換的高超技巧，無與倫比。他始終不渝地探求既能簡明應用於計算，又能保證計算結果足夠準確的算法，只是在十九世紀開始的“注意嚴密性”方面，略顯不足。他沒有適當地注意包含無限過程的公式的收斂性和數學存在性。歐拉還是許多新的重要概念和方法的創造者。這些概念和方法的重要價值，有時只是在他去世一個世紀甚至更長的時間以後才被人們徹底理解。譬如，美籍華人數學家陳省身教授說過：“歐拉示性數是整體不變量的一個源泉。”

歐拉是在數學研究中善於用歸納法的大師。他用歸納法，也就是說，他憑觀察、大膽猜測和巧妙證明得出了許多重要的發現。但他告誡人們：“我們不要輕易地把觀察所發現的和僅以歸納為旁證的關於數的那樣一些性質信以為真。”歐拉從不用不完全的歸納來最後證明他提出的假定是正確的。他的研究結果本質上是建

立在嚴密的論證形式之上的。

歐拉採用了許多簡明、精煉的數學符號。譬如，用 e 表示自然對數的底， $f(x)$ 表示函數， \int_n 表示數 n 的約數之和， Δy 、 $\Delta^2 y$ 、… 表示有限差分， \sum 表示求和， i 則表示了虛數單位 $\sqrt{-1}$ ，還有現代三角函數符號… 等等。這些符號從十八世紀一直沿用至今。

在數學領域內，十八世紀可以正確地稱爲歐拉世紀。約翰·伯努利在給歐拉的一封信中說過：“我介紹高等分析的時候，它還是個孩子，而你正在把它帶大成人。”P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 常常告訴年輕的數學家們：“讀讀歐拉，讀讀歐拉，他是我們大家的老師。”歐拉對數學發展的影響不限於那個時期。十九世紀最著名的數學家 C.F. 高斯 (Gauss)、A.L. 柯西 (Cauchy)、M. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、П. Л. 切比雪夫 (Чебышев)、C.F.B. 黎曼 (Riemann) 常從歐拉的工作出發開展自己的工作。高斯說過：“歐拉的工作的研究將仍舊是對於數學不同範圍的最好學校，並且沒有任何別的可以替代它。”人們還可以從由切比雪夫奠基的聖彼得堡數學學派追溯歐拉開闢的衆多道路。

1. 數論

古代希臘和中國的數學家研究過數的性質。十七世紀，P. de 費馬 (Fermat) 開闢了近代數論的道路。他提出了若干值得注意的算術定理，但幾乎未留下任何證明。歐拉的一系列成果奠定了作爲數學中一個獨立分支的數論的基礎。

歐拉的著作有很大一部分同數的可除性理論有關。他很早就採用了同餘概念，1736 年，歐拉首先證明了數論中重要的費馬小定理。1760 年，他引進函數 $\phi(n)$ ，給出了這個定理的重要推廣：如果 a 與 n 互質，則 $a^{\phi(n)} - 1$ 可以被 n 整除。這就是歐拉定理。其中， $\phi(n)$ 表示小於 n 且與 n 互質的正整數的個數，叫歐拉

函數。歐拉在數論中最重要的發現是二次互反律。它表述在 1783 年的一篇論文中，但未給予證明。這個定理的敘述實際上早已包含在歐拉以前寫的論文中了，只是未引起同時代人的注意。二次互反律是十九世紀數論中的最富有首創精神、可能引出最多成果的發現。後來，A.M. 勒讓德 (Legendre) 重新發現並不完全地證明了它。高斯參考了歐拉、勒讓德的著作，於 1801 年發表了二次互反律的完整的證明。他把這個初等數論中至關重要的定理譽為“算術中的寶石”。二次互反律後來引起了許多數學家，如 E.E. 庫默爾 (Kummer)、D. 希爾伯特 (Hilbert)、E. 阿廷 (Artin) 等人對代數數域內高次互反律的研究，出現不少意義深刻的工作。1850 年，I.R. 沙法熱維奇 (Shafarevich) 建立了廣義互反律。

歐拉還致力於丟番圖 (Diophantus) 分析的研究。費馬重新發現了求解方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的問題 (其中， A 是整數但非平方數)，J. 沃利斯 (Wallis) 全部解出了這個問題。歐拉在 1732–1733 年的一篇論文中，誤稱其為佩爾 (Pell) 方程，這個名稱也就這樣固定下來了。1759 年，歐拉通過把 \sqrt{A} 表成一個連分式，給出了一種解佩爾方程的方法。此後不久，J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 開始對這個問題進行全面研究。對費馬關於“不定方程 $x^n + y^n = z^n (n > 2)$ 沒有正整數解”的著名猜測 (此處 x 、 y 、 z 均為整數， $xyz \neq 0$)，1753 年歐拉證明 $n = 3$ 時，它是正確的。歐拉的證明建立在無窮遞降法的基礎上，並利用了形如 $a + b\sqrt{-3}$ 的複數。他在《代數學入門》(Vollständige Anleitung Zur Algebra，1770，德文版)一書詳盡地敘述了這個證明。此書兩卷，最先以俄文發表於聖彼得堡，其中，第二卷有很大篇幅是關於丟番圖分析的研究。

歐拉用算術方法和代數方法研究上述問題，他還首先在數論中運用分析方法，開解析數論之先河。他利用調和級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

的發散性，簡單而巧妙地證明了質數個數無窮的歐幾里得定理。

1737 年，歐拉推出了下列著名的恆等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

式中 \prod 表示對所有的質數求積。等式左邊即後來黎曼所稱的 ζ 函數 $\zeta(s)$ 。1749 年，歐拉應用發散級數求和法和歸納法，發現了與 $\zeta(s)$ 、 $\zeta(1-s)$ 和 $\Gamma(s)$ 有關的函數方程，即：對於實的 s ，有

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s).$$

黎曼後來重新發現並建立了這個函數方程，他是第一個定義 ζ 函數，也是第一個定義自變量為複值的 ζ 函數的科學家。十九世紀和二十世紀， ζ 函數已成為解析數論最重要的工具之一，尤其在 L. 狄利克雷 (Dirichlet)、切比雪夫、黎曼、J. 阿達瑪 (Hadamard) 等人關於質數分佈的研究中更是如此。

歐拉還研究了數學常數以及同超越數論有關的重要問題。J.H. 藍伯特 (Lambert) 1768 年證明 e 和 π 是無理數時，曾用連分數表示 e ，但連分式是歐拉首先採用並奠定理論基礎的。1873 年，C. 埃爾米特 (Hermite) 證明 e 是超越數。1882 年，F. 林德曼 (Lindemann) 應用歐拉公式 $e^{i\pi} = -1$ (歐拉 1728 年發現的)，證明了 π 是超越數，因此，用直尺和圓規作出一個正方形和已知面積相等是不可能的，從而解決了古希臘遺留下來的“化圓為方”的問題。歐拉常數

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

的超越性的猜測，則至今尚未解決。

2. 代數

在十七世紀，代數是人們興趣的一個重要中心。到了十八世紀，它變成從屬於分析，人們很難把代數和分析互相區別開

來。歐拉很早就把對數定義爲指數，並於 1728 年在其一篇未發表的手稿中引入 e 作爲自然對數的底。1732 年，歐拉對 G. 卡爾達諾 (Cardano) 的三次方程解法作出了第一個完整的討論。他還試圖找到用根式表示的高於四次的方程之解的一般形式，誠然這是徒勞的。1742 年，歐拉在給尼古拉 I · 伯努利和哥德巴赫的信中，第一次提出了所有實係數的 n 次多項式都可以分解爲實一次或實二次因式的定理，即具有 n 個形如 $a + bi$ 的根。這是和代數基本定理等價的重要命題，先後由達朗貝爾和歐拉證明。他們的證明思路不同，但都不夠完全。十九世紀有了更精確的證明。前述的歐拉《代數學入門》一書，是十六世紀中期開始發展的代數學的一個系統總結。此書出版後，很快被譯成英文、荷蘭文、義大利文、法文等多種文字，對於十九世紀和二十世紀代數學教科書的編寫產生極大影響。

3. 無窮級數

在十七世紀建立微積分的同時，無窮級數也進入了數學的實踐。十八世紀是級數理論的形式發展時期。在歐拉的著作中，無窮級數起初主要用作解題的輔助手段，後來成爲他研究的一個科目，實際知識達到了很高水準。前面提到的對著名的 ζ 函數的研究就是一個例子。其出發點是整數平方的倒數求和問題

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z),$$

伯努利兄弟、J. 斯特靈 (Stirling) 和其他一些數學家都曾徒勞地探討過它。1735 年，歐拉解決了一個普遍得多的問題，證明了對於任意偶數 $2K > 0$ ，

$$\xi(2K) = a_{2K^{\pi^{2K}}} ,$$

這裡 a_{2K} 是有理數，它後來分別通過歐拉－馬克勞林求和公式的係數與伯努利數來表示。歐拉還給出了當 $2K + 1$ 是前面幾個小奇數

時 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2K+1}}$ 的和，但對所有的奇數 $2K+1$ ， $\xi(2K+1)$ 的算術性質至今尚不清楚。

歐拉大約在 1732 年發現了上述求和公式，他於 1735 年給出了證明。C. 麥克勞林 (Maclaurin) 不謀而合地在幾年後又獨立地發現了它，並且所用的方法稍好些，也更接近於今天所用的方法。這個公式是有限差演算的最重要的公式之一。有限差演算方法是由 B. 泰勒 (Taylor) 和斯特靈奠基的。歐拉的《微分學原理》(*Introductio calculi differentialis*，1755) 是有限差演算的第一部論著，他第一個引進差分算子。藉助於這個求和公式，1735 年，歐拉把前述的歐拉常數 γ 的值計算到小數點後十六位

$$\gamma = 0.57721566 \dots$$

歐拉在大量地應用幕級數時，還引進了新的極其重要的傅里葉三角級數類。1744 年他在給哥德巴赫的一封信中，談到了用三角級數表示代數函數的例子：

$$\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

它發表在 1755 年的《微分學原理》中。此後，他又得到了其它的展開式。1777 年，爲了把一個給定函數展成在 $(0, \pi)$ 區間上的餘弦級數，歐拉又推出了傅里葉係數公式。歐拉的論文遲至 1798 年才發表。他採用的正是現行通用的逐項積分方法。J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 對歐拉的工作並不了解，他於 1807 年得到相同的公式。歐拉也不知克萊羅 1759 年的相應工作。

歐拉還把函數展開式引入無窮乘積以及求初等分式的和，這些成果在後來的解析函數一般理論中佔有重要的地位。無窮級數、無窮乘積和連分式之間許多相互變換的方法也是歐拉發現的。

形式觀點在十八世紀無窮級數的工作中佔統治地位。級數被看

成是無窮的多項式，並且就當作多項式來處理，對其收斂和發散的問題是不太認真對待的。歐拉多少意識到收斂性的重要，他也看到了關於發散級數的某些困難，特別是用它們進行計算時產生的困難。為了尋求收斂的一般理論，歐拉確信且著手進行建立發散級數轉變為收斂級數的法則這一艱苦的工作。為此，他對級數的和這一概念提出了新的更廣泛的定義。他還提出兩種求和法。這些豐富的思想，對十九世紀末、二十世紀初發散級數理論中的兩個主題，即漸近級數理論和可和性的概念產生了深遠影響。

4. 函數概念

十八世紀中葉，分析學領域有許多新的發現，其中不少是歐拉自己的工作。它們系統地概括在歐拉的《無窮分析引論》(圖 1)、《微分學原理》和《積分學原理》組成的分析學三部曲中。這三部書是分析學發展的里程碑式的著作。它們至今饒有興味，尤其《無窮分析引論》的第一卷更是如此。專家們可以從這些著作中追尋分析學裡許多富有成果的方法之發展足跡。

《無窮分析引論》共兩卷，它是第一本溝通微積分與初等分析的書。在這部書中，歐拉第一次清晰地論述了數學分析是研究函

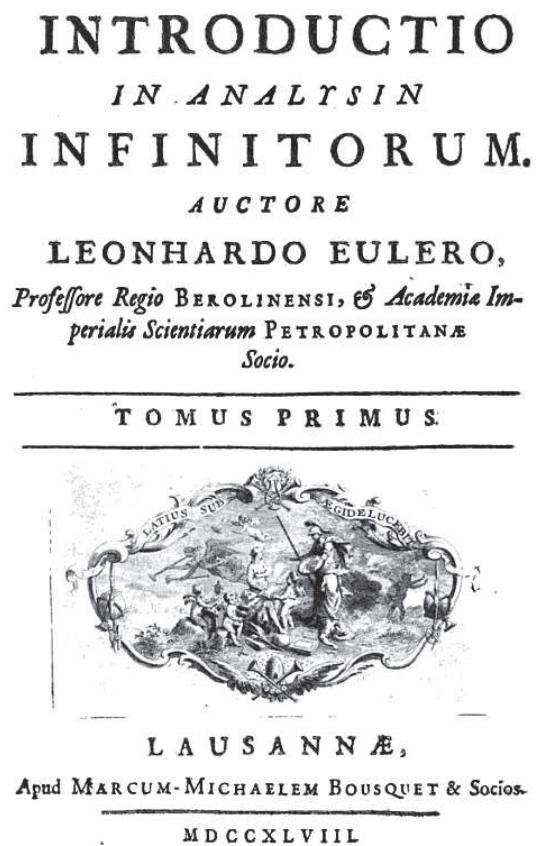


圖 1

《無窮分析引論》的扉頁，洛桑，1748 年

數的科學，並對函數概念作了更加透徹的研究。他一開頭，就把函數定義為由一個變量與一些常量通過任何方式形成的解析表達式。在這一點上，他繼承了約翰·伯努利的思想。歐拉寫道，函數間的原則區別在於組成這些函數的變量與常量的組合法不同。他在書中給出了現今還廣泛應用的函數的分類。歐拉還區分了顯函數與隱函數，單值函數與多值函數。他按照自己和所有同時代的人的經驗，堅信所有的函數都能展成級數。歐拉認為函數的自變量不僅可以取實值，也可以是虛值，這一見解極其重要。

在歐拉、達朗貝爾和丹尼爾·伯努利等許多數學家捲入的關於弦振動問題的研究中，發生了關於函數概念的爭論。它促使歐拉去推廣自己的函數概念。1755年，歐拉在《微分學原理》一書中給函數下了一個新定義：“如果某些量這樣地依賴於另一些量：當後者改變時它經受變化，那麼稱前者為後者的函數。”不過，在《無窮分析引論》中，歐拉就已把函數當作對應值加以論述。

5. 初等函數

《無窮分析引論》第一卷共18章，主要研究初等函數論。其中，第八章研究圓函數，第一次闡述了三角函數的解析理論，並且給出了棣莫弗(de Moivre)公式

$$e^{\pm xi} = \cos x \pm i \sin x$$

的一個推導。雖然R.科茨(Cotes)在1714年發表了這個公式且與歐拉給出的略有不同，但只有歐拉才使該公式得到了廣泛的應用。歐拉在《無窮分析引論》中研究了指數函數和對數函數，他給出著名的表達式

$$e^z = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$$

(這裡*i*是表示趨向於無窮大的數；1777年後，歐拉用*i*來表示 $\sqrt{-1}$)，但僅考慮了正自變量的對數函數。1751年，歐拉發表

了完備的複數理論。他斷言：對正實數而言，對數只有一個實值，其餘都是虛值；但對於負實數或虛數而言，對數的一切值都是虛的。歐拉對這個問題的成功解答，實際上結束了此前 1747–1748 年在萊布尼茨和約翰·伯努利之間，達朗貝爾和歐拉本人之間通過信件進行的關於負數的對數的爭論。但他的工作當時並未被人們接受。

6. 單複變函數

通過對初等函數的研究，達朗貝爾和歐拉在 1747–1751 年間先後得到了（用現代術語表達的）複數域關於代數運算和超越運算封閉的結論。他們兩人還在解析函數的一般理論方面取得了最初的進展。1752 年，達朗貝爾在研究流體力學時發現了把解析函數 $u(x, y) + iv(x, y)$ 的實部和虛部連結在一起的方程。1757 年，歐拉在提交聖彼得堡科學院的一篇論文中推出了同樣的方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

其要點是藉助於虛代換 $z = x + iy$ ，利用實函數去計算複函數的積分，展示了計算積分 $\int f(z)dz$ 的新方法。因此，歐拉發現了

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

歐拉還藉助於保角映射把複變解析函數用於理論製圖學等方面的研究。他在 1768 年的一篇論文中，利用複變函數，設計了一種從一個平面到另一個平面的保角映射的表示方法。1775 年，他又證明球面不可能全等地映入平面。這裡，他再一次用了複變函數而且討論了相當一般的保角表示。

歐拉的這些思想，十九世紀在柯西、黎曼闡發解析函數的一般理論時，都獲得了深入的發展。譬如，上述達朗貝爾和歐拉的方程就是以柯西和黎曼的名字命名的。

7. 微積分學

歐拉的《微分學原理》和《積分學原理》二書對當時的微積分方法作了最詳盡、最有系統的解說，他以其衆多的發現豐富了無窮小分析的這兩個分支。

在《微分學原理》中，歐拉詳盡地研究了變量替換下的微分公式。他在 1734 年的一篇論文中證明，若 $z = f(x, y)$ ，則

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

導出了函數 $f(x, y)$ 恰當微分的必要條件。1736 年，他又揭示了關於齊次函數的定理，即若 z 是 x 和 y 的 n 次齊次函數，則

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

他還就函數 $f(x)$ 和 $f(x, y)$ 的極值問題，得到許多重要的結果。

歐拉在《積分學原理》第一卷中，用相當現代的方式敍述了不定積分的方法。他創造了“歐拉代換”等許多新方法。他計算了許多困難的定積分，進一步奠定了特殊函數論的基礎。例如，1729 年歐拉就研究了序列 $1!、2!、\dots、n!、\dots$ 的插值法。他引入了 B 函數和 Γ 函數，繼而還發現了 B 函數和 Γ 函數的許多性質，如：

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

在橢圓積分理論上，歐拉的主要貢獻是發現了加法定理。1770 年他對二重定積分有了清楚的概念，還給出了用累次積分計算這種積分的程序。

《微分學原理》和《積分學原理》是歐拉那個時代的標準課本。他的形式化方法使微積分從幾何中解放出來，從而使它建立在算術和代數的基礎上。這至少為後來基於實數係數的微積分的根本論證開闢了道路。

8. 微分方程

《積分學原理》還展示了歐拉在常微分方程和偏微分方程理論方面的衆多發現。他和其他數學家在解決力學、物理問題的過程中創立了微分方程這門學科。

在常微分方程方面，歐拉在 1743 年發表的論文中，用代換 $y = e^{kx}$ 紿出了任意階常係數線性齊次方程的古典解法，最早引入了“通解”和“特解”的名詞。1753 年，他又發表了常係數非齊次線性方程的解法，其方法是將方程和階數逐次降低。歐拉早在 1740 年左右就知道並且在潮汐和行星軌跡攝動的著作中應用常數變易法。他在 1734 – 1735 年領會了積分因子的概念，提供一個方法，並在 1768 – 1770 年的工作中廣泛地發展了積分因子法，把它應用於許多一階微分方程類型，還推廣到高階方程。歐拉對里卡蒂 (Riccati) 方程的性質多有研究。1768 年，他給出了一個從特殊積分鑒別奇解的判別法。這一年，歐拉在其有關月球運行理論的著作中，創立了廣泛用於求帶有初值條件 $x = x_0$ 、 $y = y_0$ 的方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的近似解的方法，次年又把它推廣到二階方程。這個現稱“歐拉折線法”的方法，為十九世紀柯西關於解的存在性的嚴格證明和數值計算提供了重要途徑。

歐拉在十八世紀三十年代就開始了對偏微分方程的研究。他在這方面的最重要的工作，是關於二階線性方程的。數學物理中的許多問題都可以歸結為二階線性方程。弦振動問題是一個著名的例子。1747 年，達朗貝爾首次建立了弦振動方程

$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2}$$

得到形如兩個任意函數之和的解：

$$y(t, x) = \frac{1}{2}\phi(at + x) + \frac{1}{2}\phi(at - x) \circ$$

歐拉隨即對達朗貝爾的方法作了進一步研究。他在允許什麼函數可以作為初始曲線，因而也可以作為偏分方程的解的問題上，有全然不同的想法。於是，這兩位數學家，還有丹尼爾·伯努利、拉格朗日、拉普拉斯和其他一些數學家，都捲進了一場曠日持久的激烈論戰，延續了半個多世紀，直到傅里葉的《熱的分析理論》(*Theorie analytique de la chaleur*, 1822) 發表為止。其間，歐拉把特徵線法發展更加完善了。歐拉還在流體動力學和鼓膜振動、管內空氣運動等問題中接觸到數學物理方程。例如，位勢方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

最早就出現在 1752 年關於流體運動的論文中。1766 年，歐拉從圓膜振動問題得到後來所稱的巴塞耳 (Bassel) 方程，並藉助於巴塞耳函數 $J_n(x)$ 來求解。

9. 變分法

歐拉從 1728 年解決約翰·伯努利提議的測地線問題開始從事變分法的研究。1734 年，他推廣了最速降線問題。然後，著手尋找關於這種問題的更一般的方法。1744 年，歐拉的《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》(*Methodus inventiendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes*) (圖 2) 一書出版。這是變分學史上的里程碑，它標誌著變分法作為一個新的數學分支的誕生。該書廣泛使用了幾何論證。書中系統地總結了歐拉在十八世紀三十年代和四十年代初的一些成果，其中，包括歐拉 1736 年成功證明的關於使積分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$$

取極大或極小值的函數
 $y(x)$ 須滿足的常微分方程

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0 ,$$

以及大量應用的例子。這一個以歐拉名字命名的方程，迄今仍是變分法的基本微分方程。

十八世紀五十年代的中期，拉格朗日循著歐拉的思路和結果，從純分析方法的角度，創造應用於變分演算的新算法和新符號而得到更完善的結果。歐拉隨後放棄了自己以前的說明，並以對拉格朗日的方法作了詳細、清晰的解釋。歐拉認為拉格朗日的方法是一種新的計算方法，並且在自己的論文中正式將它命名為“變分法”(the calculus of variation)。1770年，歐拉在《積分學原理》第三卷中把變分法應用於具有常數限的二重積分的極值問題。其後不久，歐拉又提出了變分演算的另一種解釋方法。他早期變分法研究中使用的直接方法，一個半世紀發後，也在尋找變分問題及相應的微分方程的精確解或近似解中獲得獨立的價值。

10. 幾何學

十八世紀，坐標幾何得到廣泛的探討。歐拉在《無窮分析引論》第二卷中引入了曲線的參數表示。他從二次曲線的一般方程著手，超越同時代的人，對二次曲線論的代數發展做出了重要

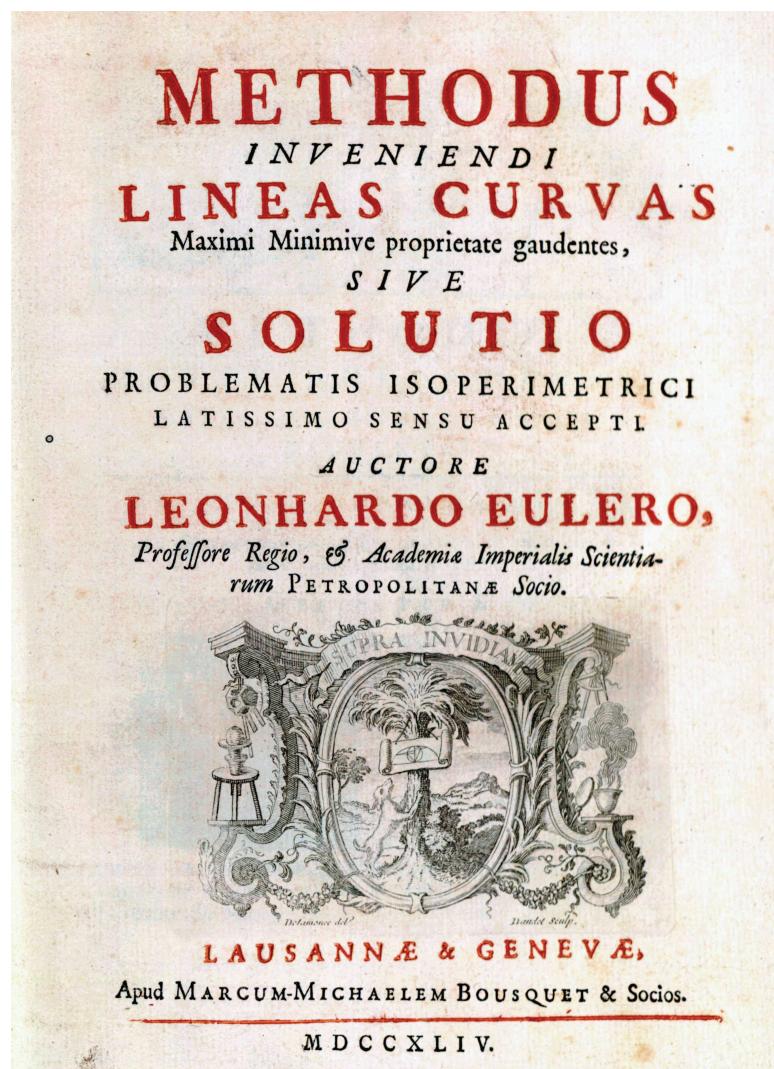


圖 2

《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》
的扉頁，洛桑－日內瓦，1744年

貢獻。他用類比法研究三次曲線，還討論了高次平面曲線。但是，歐拉的主要貢獻是第一次在相應的變換裡應用歐拉角，徹底地研究了二次曲面的一般方程。

在微分幾何方面，歐拉於 1736 年首先引進了平面曲線的內在坐標概念，即以曲線弧長這一幾何量作為曲線上點的坐標，從而開始了曲線的內在幾何的研究。他將曲率描述為曲線的切線方向和一固定方向的交角相對於弧長的變化率。歐拉關於曲面測地線的研究是衆所周知的。然而，更重要的是他在曲面論方面的開拓性研究。1760 年，歐拉在《關於曲面上曲線的研究》(*Recherches sur la courbure des surfaces*) 中建立了曲面的理論。這本著作是歐拉對微分幾何最重要的貢獻，是微分幾何發展史上的里程碑。G. 蒙日 (Monge) 和其他幾何學家後來的研究就是從曲面論開始的。十八世紀六十年代和七十年代，歐拉繼續研究並得到了用主曲率表示任意法截面上截線曲率的著名公式以及曲面可展性的、分析的必要充分條件。1775 年，他還成功地重新闡述了空間曲線的一般理論。

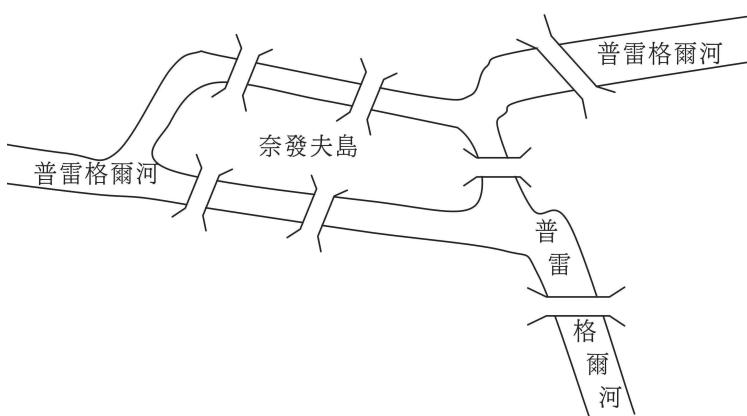


圖 3a
哥尼斯堡七橋遊戲問題

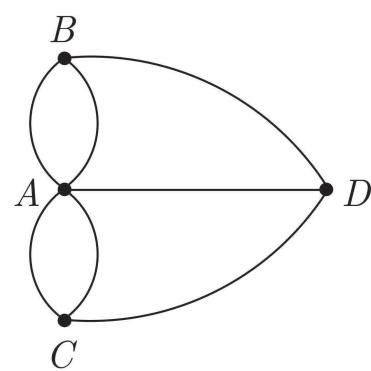


圖 3b
哥尼斯堡七橋遊戲問題抽象簡化圖

歐拉對拓撲學的研究也具有第一流的水準。1735 年，歐拉用簡化 (或理想化) 的表示法解決了著名的哥尼斯堡七橋遊戲問題 (如圖 3，有七座橋，問是否可一次走遍，不許重複也不許遺漏。) 他得到具有拓撲意義的河 - 橋圖的判斷法則，即今網絡論中的歐拉定理。1750 年，歐拉在給哥德巴赫的一封信中列舉了多面體的一些性質。其中，有一條是：如果用 V 、

E 和 F 分別表示閉的凸多體的頂點數、稜數和面數，則有 $V - E + F = 2$ 。次年他給出了這條性質的一個證明。儘管 100 年後人們發現笛卡兒早就知道這一性質，但是，第一個認識 $V - E + F$ 這個“交錯和”的重要意義的人似乎是歐拉。他之所以對這一關係感興趣，是要用它來作多面體的分類。歐拉示性數 $V - E + F$ 以及由 H. 龐加萊 (Poicaré) 提出的在多維複形中的推廣是現代拓撲學的主要不變量之一。陳省身言簡意賅地說過：“歐拉示性數是大量幾何課題的源泉和出發點。”他用圖形(圖 4)表示了這各種關係。

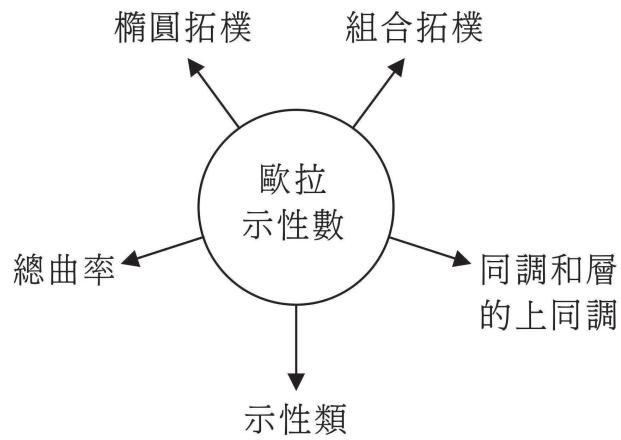


圖 4

歐拉示性數是整體不變量的一個源泉

力學

歐拉在 1736 年的《力學》導言中，概述了對這門科學各個分支的巨大研究計劃。與其前輩採用綜合法、幾何法來研究力學不同，歐拉第一個意識到把分析方法引入力學的重要性。歐拉系統而成功地將分析學用於力學的全面研究。他的《力學或運動科學的分析解說》(圖 5)的書名就清楚地表達了他的這一思想。歐拉在力學的各個領域都有突出貢獻，他是剛體力學和流體力學的奠基者，彈性系統穩定性理論的創始人。

1. 一般力學

《力學或運動科學的分析解說》研究質點的運動學以及動力學，是用分析的方法來發展牛頓質點動力學的第一本教科書。此書共分兩卷：第一卷研究質點在真空中和有阻力的介質中的自由運動；第二卷研究質點的強迫運動。歐拉的這本著作與以往的著作

迥然不同，他試圖通過定義和論證的結合，來證明力學是一門能一步一步推演出的許多命題的“合理的科學”。他所提供的基本概念和定律接近我們今天所知道的力學體系。他利用解析形式給出了運動方程，並確認它們構成整個力學的基礎。因此，具有重要的歷史意義。

1765年，歐拉的著作《剛體運動理論》(*Theoria motus corporum solidorum*) 出版。此書與上述《力學》相互關聯。歐拉得到剛體運動學和剛體動力學的最基本的結果，其中包括：剛體定點運動可以用三個角度，即歐拉角的變化來描述；剛體定點轉動時角速度變化和外力矩的關係；定點剛體在不受外力矩時的運動規律，以及自由剛體的運動微分方程等等。歐拉先用橢圓積分解決了剛體在重力下繞固定點轉動的問題的一種可積情形，即歐拉情形。此後一個多世紀，拉格朗日於1788年、C.B. 柯瓦列夫斯卡婭(Ковалевская)於1888年才相繼完成全部可積情況的工作，徹底解決了經典力學中的這一著名難題。

2. 流體力學

歐拉根據早期積累的經驗而寫成的兩卷集《航海學》(*Seientia*

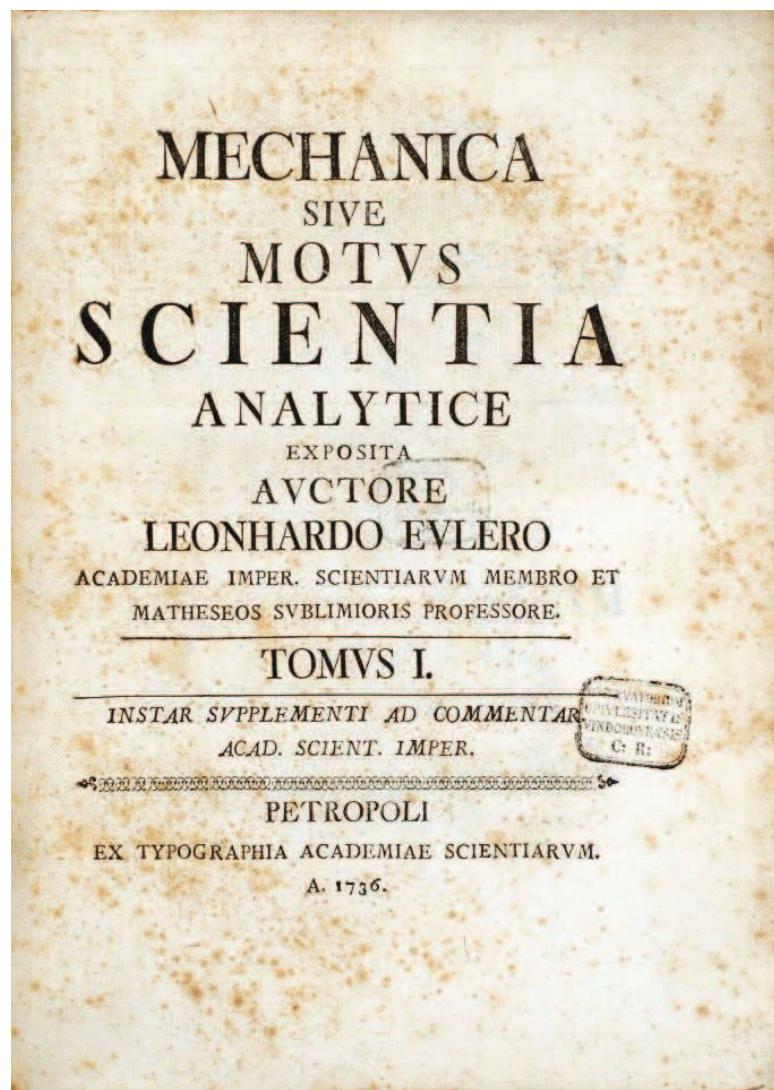


圖 5

《力學或運動科學的分析解說》的扉頁，
聖彼得堡，1736年

navalis)，1749 年在聖彼得堡出版。其中，第一卷論述浮體平衡的一般理論，第二卷將流體力學用於船舶。該書對浮體的穩定和浮體在平衡位置附近的輕微擺動問題作了獨創性的闡述。1752 年至 1755 年，歐拉相繼寫了“流體運動原理”(*Prinapia motus fluidorum*，1761) 和另外三篇詳細闡述流體力學解析理論的權威論文，即“流體平衡的一般原理”(*Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides*)、“流體運動的一般原理”(*du mouvement des fluides*) 和“流體運動理論續篇”(*Continuation des recherches sur la théorie du mouvement des fluides*)。這三篇論文於 1757 年同時發表。歐拉創造性地用偏微分方程解決數學物理問題。他在這些論著中給出了流體運動的歐拉描述法，提出了理想流體模型，建立了流體運動的基本方程，即連續介質流體運動的歐拉方程，奠定了流體動力學的基礎。此外，他還仔細地研究了管內液體和氣體的運動，管內空氣的振動和聲音的傳播等許多具體問題，以及水力技術問題。

除了在一般力學、流體力學方面的上述工作外，歐拉在《尋求具有某種極大或極小性質的曲線的方法》一書的附錄一中，應丹尼爾·伯努利的請求，將變分演算應用於研究彈性理論的某些問題。這些問題，歐拉從 1727 年就開始研究。這個附錄是第一部應用數學來研究彈性理論的著作。歐拉率先從理論上研究了細壓桿的彈性穩定問題。他提出了柱的穩定概念，以及一端固定、另一端自由的柱的臨界壓力公式。在同書的附錄二中，歐拉還與莫佩蒂幾乎同時獨立地得出了力學中的最小作用原理。歐拉為力學和物理學的變分原理的許多研究奠定了數學基礎。這種變分原理至今仍在科研中應用。

天文學

對自然界的深刻研究是數學最富饒的源泉。十八世紀的數學

家對天體運行規律的探索極為重視。歐拉對天文學作過大量的研究，他最出色的著作都和天體力學有關。這些論著特別吸引當時的科學家，並多次榮獲英、法等國的獎金。

十七世紀，牛頓提出著名的萬有引力定律，從力學原理上解釋了月球運動的規律。此後，“三體問題”，特別是太陽、地球和月亮，成了十八世紀科學家十分關注的重要課題。三體問題的攝動理論是先應用於月球的運動。歐拉、克萊羅等人曾試圖求得一般三體問題的精確解，終因困難至甚轉而採用近似方法。1745年，克萊羅和達朗貝爾用萬有引力定律算得月球繞地球運轉的近地點的週期為 18 年，而實際觀察則表明它應該是 9 年。這曾使得人們從總體上對牛頓力學體系的正確性產生懷疑，甚至歐拉和其他一些科學家也認為牛頓萬有引力定律須要作某些修正。1749年，克萊羅確認：理論值和觀察值之間的誤差，是由於求解相應微分方程局限於第一次逼近所致。當他作第二次逼近演算後，結果是令人滿意的。為此，歐拉向聖彼得堡科學院舉薦克萊羅的論文，使之獲得該院 1752 年獎金。不過，歐拉仍不滿意並繼續研究。1753 年，他的《月球運動理論》(*Theoria motus lunae exhibens omnes ejus inaequalitates*) 一書出版。在這部著作中，歐拉闡述了求三體問題近似解的新穎方法，亦稱“歐拉第一月球理論”。他得到的數值結果也與牛頓萬有引力理論一致。

歐拉的第一月球理論對當時的天文學和航海事業產生了很重要的影響。1755 年，格丁根大學的天文學家 T. 邁爾 (Mayer) 根據歐拉的理論制成了第一張月球運行表。它對艦船導航極有價值。經過十年的航海實踐，1765 年英國國會終於將半個世紀前懸賞的獎金授予邁爾的遺孀。同時，也獎給歐拉三百英鎊獎金，以表彰他為此所作的開創性的理論工作。

1772 年，歐拉的另一本天文學著作《月球運動理論和計算方法》在聖彼得堡出版。他在此書中詳細闡述了“歐拉第二月球理

論”。由於種種原因，直到十九世紀末，當 G.W. 希爾 (Hill) 發展了歐拉月球理論中關於以直角坐標為基本變量和旋轉坐標系的概念，建立了一種新的月球運動理論後，人們才可能對歐拉的這種新方法的價值作出正確的評價。

歐拉一生還寫了許多關於彗星和行星軌跡計算的論著。1748年，他在一篇論文中最先用參數變值法研究木星和土星運動的攝動，獲得了巴黎科學院的獎金。1769 – 1771 年，歐拉已雙目失明，他以堅強的毅力和永不懈怠的進取精神，繼續研究木星和土星、地球和其它行星的相互引力引起的攝動。“春蠶到死絲方盡”，歐拉對天文學的研究一直延伸到其生命最後的一瞬。

物理學

十八世紀物理學的進展並不像十七世紀前八十年那樣不尋常，它很少產生偉大的實驗物理學家。歐拉作為一位物理學家，與丹尼爾·伯努利也不一樣，其主要貢獻是從數學的角度詳盡地闡述前面已討論過的那些類問題。歐拉所涉及的各種物理問題，當時多半與數學分析無緣。他渴望創造一種與物理學界取得一致的數學理論。他廣泛地將數學應用到整個物理領域，並在力學、聲學、光學和電磁學等方面做出了許多重要貢獻。

1644 年，笛卡兒曾經假定星際空間充滿著物質，並且它們在很大的漩渦中運動。這在歐洲大陸人們的思想中，直到近十八世紀中葉時還保持著它的地位。1724 年，歐拉被授予哲學碩士學位，他發表的演講就是對牛頓和笛卡兒的哲學思想進行比較。歐拉不是笛卡兒自然哲學體系的代表人物，但是，他更接近於這個自然哲學體系。歐拉否認空虛空間中的運動和遠距離作用的可能性，他認為宇宙中充滿了以太，並且用以太的力學性質來解釋觀察到的現象的多樣性是可能的。他還將單磁流的概念引入電磁學。

歐拉在廣為流傳的《關於物理學和哲學問題給德韶公主的信》中，提出了一切物理現象都是以太與物質相互作用的結果的思想，企圖建立物理世界的統一圖形。這一思想對十八世紀、十九世紀物理學的發展是重要的。歐拉關於電的本質的觀點是 M. 法拉第 (Faraday) 和 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 電磁場理論的雛形。他的以太理論影響了黎曼。

歐拉在物理學方面建立的人造模型和提出的一些假設，壽命都不長。但是，他的光學著作在十八世紀的物理學中起了重要作用。他否定權威的光粒子論，他是這個世紀提倡波動說的唯一的傑出科學家。他認為光的起因是以太特有的振盪的結果。歐拉 1746 年發表的《光和色彩的新理論》(*Nova theoria lucis et colorum*) 解釋了一些光學現象。他同倫敦的光學儀器商多倫在色散理論上發生過爭論，雙方都有正誤之處。1758 年，多倫創造消色差望遠鏡送交英國皇家學會，轟動了整個歐洲。這是光學技術上的一個轉折點。而歐拉的三大卷本《屈光學》(*Dioptrica*，1771) 則奠定了光學體系的計算基礎。此書第一卷論述光學原理，第二、三卷分別論述望遠鏡和顯微鏡的構造，只是書中的數學模型超出了實驗光學家的理解力。值得一提的是，歐拉 1739 年的音樂新理論也有超出音樂家理解力的地方。人們說，它對數學家“太音樂”了，而對音樂家“太數學”了。有人認為，歐拉的某些思想在現代音樂家的著作中得到了發展。

歐拉給後人留下了極其豐富的科學遺產和為科學獻身的精神。歷史學家把歐拉同阿基米德 (Archimedes)、牛頓、高斯並列為數學史上的“四傑”。數學家 J.R. 紐曼 (Newman) 1956 年稱歐拉是“數學家之英雄”。現在，英雄歐拉安詳地躺在俄羅斯的土地上。1983 年，在歐拉逝世 200 週年之際，各國學者在列寧格勒 (即聖彼得堡)、西柏林、東柏林和莫斯科先後隆重集會紀念其豐功偉績。而在歐拉的故鄉——巴塞爾，則出版了各國著名科學

家和科學史家研究、紀念他的巨型文集《列昂哈德·歐拉——生活事業文獻集》(Leonhard Euler, 1707–1783, Berträge zu Leben und Werk, 1983)。法國科學家 L. 巴斯德 (Pasteur) 說得好：“科學沒有國籍。但是科學家有祖國，他對於祖國的光榮應當盡心竭力，死而後已。熱烈的愛國心會使他有勇氣和毅力承擔艱難而偉大的工作；而這工作，正是對人類有益的。”(在丹麥哥本哈根萬國醫學會上的講話，1884) 以此讚美歐拉，他是當之無愧的。

文 獻

原始文獻

歐拉撰寫和出版的論著之多，歷史上堪列數學家之首。他一生中總共出版了 560 部(篇)著作和論文。歐拉曾與實際掌管彼得堡科學院事務的部監 V.G. 奧爾洛夫 (Orlov) 伯爵談過他死後要給該院院刊留下足夠刊登二十年的論文。實際上，他留下的論著直到 1862 年才出版完。N. 富斯出版了 200 種，然後，由 В. Я. 布尼亞柯夫斯基 (Буняковский)、П. Л. 切比雪夫和 П. Н. 富斯 (Фусс) 繼續此項工作。其餘的論著和信件，更遲才陸續發現。

1907 年，瑞士自然科學協會倡議並決定出版現代版的歐拉著作全集。G. 德奈斯特羅姆 (d' Eneström) 從分散發表在不同著作和大量雜誌或科學院叢書中的歐拉的文章中，整理出他的著作全集的初步清單，發表在文獻 [25] 中。這篇文獻表明有 856 種出版物是歐拉親自撰寫的，另外 31 種是在他的授意下寫成，以其長子約翰·阿爾勃蘭克的名義發表的。從 1726 年起直至去世，歐拉大約和三百名學者通信，寫下了大量信件，但只發表了其中的一部分。文獻 [36] 內有歐拉所寫信件的概要和索引。

[1] Leonhardi Euleri Opera omnia, Berlin–Göttingen–Leipzig–Heidelberg, 1911 – 。此全集均用原文出版，每一卷都經現代有關學科的專家校訂過，許多引言包括了十七、十八世紀科學的有關分支的豐富史料。全集現仍在編輯出版過程中。1967 年

以前，全集共分三個系列，含 72 卷 (74 部分)。第一系列 (數學)，共分 29 卷 (分為 30 部分)，已於 1956 年完成；第二系列 (力學和天文學)，共 31 卷 (分為 32 部分)，尚有 5 卷待出版；第三系列 (物理學、雜錄和正式信件)，共 12 卷，僅剩 1 卷須編輯。特別應該指出的是：《歐拉全集》出版之初是計劃用第三系列的三個卷來編輯、出版歐拉的手稿和書信的。可是後來感到這種作法過分拘謹，於是 1967 年決定在出版過程中增加一個第 IV 系列並分為 A、B 兩個分系列：A 分系列 (書信往來) 預計出 7 卷，B 分系列 (手稿) 預計出 4 至 6 卷。A 分系列的編輯、出版情況見文獻 [39]。

- [2] L. Euler, *Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente*, Acta eruditorum, 1726 [II, 6, 1] (即《歐拉全集》第二系列第 6 卷第 1 頁，下仿此)。
- [3] L. Euler, *Dissertatio physica de sono*, 1727 [III, 1, 181]。
- [4] L. Euler, *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, St. Petersburg, 1736 [II, 1 – 2]。
- [5] L. Euler, *Einleitung zur Rechen-Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in St. Petersburg*, St. Petersburg, 1738 – 1740 [III, 2, 1 – 303]。
- [6] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne–Geneva, 1744 [I, 24]。
- [7] L. Euler, *Theorie motuum planetarum et cometerum*, Berlin, 1744 [II, 28, 105 – 251]。
- [8] L. Euler, *Neue Grundsätze der Artillerie aus dem Englischen des Herrn Benjamin Robins Übersetzt und mit vielen Anmerkungen Versehen*, Berlin, 1745 [II, 14]。
- [9] L. Euler, *Nova theoria lucis et colorum*, 1746 [III, 5, 1 – 45]。
- [10] L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, 2 vols, Lausanne, 1748 [I, 8 – 9]。
- [11] L. Euler, *Scientia navalis*, 2 vols, St. Petersburg, 1749 [II, 18 – 19]。
- [12] L. Euler, *Theoria motus lunae*, Berlin, 1753 [II, 23, 64 – 336]。
- [13] L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Berlin, 1755 [I, 10]。

- [14] L. Euler, *Principes généraux de l'état d'équilibre*, *Principes généraux du mouvement des fluides*, *Continuation des recherches sur la théorie du mouvement de fluides*, 1757 ; *Principia motus fluidorum*, 1761 [II, 12, , 2 – 132 ; 133 – 168] 。
- [15] L. Euler, *Theoria motus corporum solidorum Seu rigidorum ex primis nostrae cognitionis stabilitate* . . ., Rostock–Greifswald, 1765 [II, 3 – 4] 。
- [16] L. Euler, *Institutiones calculi integralis*, 3 vols, St. Petersburg, 1768, 1769, 1770 [I, 11 – 13] 。
- [17] L. Euler, *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, 3 vols, St. Petersburg, 1768, 1769, 1772 [III, 11 – 12] 。這部三卷本著作包括 234 封信 。
- [18] L. Euler, *Dioptrica*, 3 vols, St. Petersburg, 1769, 1770, 1771 [III, 3 – 4] 。
- [19] L. Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, St. Petersburg, 1770 [I, 1] 。
- [20] L. Euler, *Theoria motuum lunae, nova methodo pertractat*, St. Petersburg, 1772 [II, 22] 。
- [21] L. Euler, *Scientia navalis—Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux*, St. Petersburg, 1773 [II, 21] 。

研究文獻

- [22] N. Fuss, *Eloge de Monsieur Leonhard Euler*, St. Petersburg, 1783 。德文譯本見 [I, 1] 。
- [23] M. Condorcet, *Eloge de M. Euler*, 見 *Histoire de l'Academie royale des sciences pour l'année*, 1783, Paris, 1786, 37 – 68 。
- [24] R. Wolf, *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz*, IV, Zurich, 1862, 87 – 134 。
- [25] G. Eneström, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 見 *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Ergänzungsband 4, Leipzig, 1910 – 1913 。這是關於歐拉著作的一個十分出色的重要文獻。它分三部分，分別按歐拉著作的出版日期順序、寫作日期和學科進行登記 。
- [26] F. Cajori, *A history of physics*, Macmillan Company, 1928 (中譯本：弗·卡約里，物理學史，內蒙古人民出版社，1981) 。

- [27] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937 (中譯本：E.T. 貝爾，數學精英，商務印書館，1991)
- [28] D.J. Struik, *A concise history of mathematics*, 2 vols, New York, 1948 (中譯本：D.J. 斯特洛伊克，數學簡史，科學出版社，1956)
- [29] C.B. Boyer, *The history of the calculus and its conceptual development*, Hafner Pub. Com., 1949 (中譯本：C.B. 波耶，微積分概念史，上海人民出版社，1977)。
- [30] Ф. П. Отрадных, Математика XVIII Века и академик Леонард Эйлер, Государственное издательство 《Советская наука》, Москва, 1954。
- [31] G. Polya *Mathematics and plausible reasoning*, 2 vols, Princeton University Press, 1954 (中譯本：G. 波利亞，數學與猜想，科學出版社，1984)。
- [32] 嚴敦傑，早期輸入中國的歐拉學說(歐拉誕生 250 週年紀念)，見《科學史集刊》第 1 期，科學出版社，1958。
- [33] J.F. Scott, *A history of mathematics*, Taylir and Francis, 1958 (中譯本：J.F. 斯科特，數學史，商務印書館，1981)。
- [34] А. П. Юшкевич, И. Г. Башмакова, Леонард Эйлер, 見 Люди Русской, Москва, 1961, с. 41 – 63。
- [35] К. А. Рыбников, История Математиким, I–II, Издательство Московского Университета, 1961 – 1963。
- [36] V.I. Smirnov and A.P. Youschkevitch, eds., *Leonard Euler, Perepisika Annotirovannye ukazateli*, Leningrad, 1967。
- [37] A.P. Youschkevitch, *Euler, Leonhard*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. IV, 1971, 467 – 484。
- [38] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford. Univ. Press, New York, 1972。
- [39] R. 塔東，萊奧納爾・歐勒通信集的編輯出版情況，科學史譯叢，1983，2，第 90 – 92 頁。這是法國 René Taton 提交第十六屆國際科學史大會的論文的中譯文。原文載大會論文集 C – D 卷第 307 – 312 頁。它介紹了《歐拉全集》第 IV 系列的部分情況。
- [40] Leonhard Euler, 1707 – 1783, *Beiträge zu Leben Werk*, Birkhäuser

Verlag Basel, 1983 。

- [41] 文學宓，蘇聯等國紀念歐拉活動簡報，科學史譯叢，1986，1，第79—80頁。
- [42] 應重徹，物理學史，上海教育出版社，1986(中譯本)。
- [43] 陳省身文選——傳記、通俗演講及其它，科學出版社，1989
(本文得到國家自然科學基金資助，謹此鳴謝。)