

達朗貝爾

達朗貝爾，J.L.R. (D'Alembert, Jean Le Rond) 1717 年 11 月 17 日生於法國巴黎；1783 年 10 月 29 日卒於巴黎。物理學、數學。

達朗貝爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/D'Alembert.html>

達朗貝爾

易照華

(南京大學)

達朗貝爾，J.L.R. (D'Alembert, Jean Le Rond) 1717 年 11 月 17 日生於法國巴黎；1783 年 10 月 29 日卒於巴黎。物理學、數學。

達朗貝爾是私生子，母親德唐姍夫人 (Madame de Tencin) 當過修女，當時是一位著名的沙龍女主人；爲了她自己的名譽而將出生不久的嬰兒遺棄在巴黎的聖・讓勒龍 (Saint Jean le Rond) 教堂的石階上。後被一憲兵發現，臨時用該教堂的名字作爲嬰兒的教名。姓氏達朗貝爾是他長大後自己取的。他的父親名爲謝瓦里埃 (Chevalier)，姓德杜歇－卡農 (Detouches-Canon)，是騎兵軍官。他得到消息後很快把嬰兒找回來，寄養於工匠盧梭 (Rousseau) 夫婦處。達朗貝爾同養父母的感情很好，47 歲以前一直在他們家。

達朗貝爾少年時被父親送入一個教會學校 (由路易十三時代的教皇馬薩林創建)，主要學習古典文學、修辭學和數學。他對數學特別有興趣，爲後來成爲著名的數理科學家打下了基礎；雖然在教會學校中受到很多宗教教育，但後來仍不信神，成爲反對宗教的著名啓蒙學者和“百科全書派”的主要骨幹。

達朗貝爾沒有受過正規的大學教育，靠自學掌握了 I. 牛頓 (Newton) 和當代著名數理科學家們的著作。1739 年 7 月，他完成第一篇學術論文，內容是批評 C. 雷諾 (Reyneau) 神父的數學教程。以後兩年內又向巴黎科學院提交了五篇學術報告，內容是研究微分方程的積分方法和物體在介質內的阻尼運動。這些報告

由 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 院士回覆。經過幾次聯繫後，達朗貝爾於 1741 年 5 月正式進入科學院。當時科學院的職稱分四個等級：榮譽院士，只有聲望很高的人擔任；終身院士，每個學部（當時有六個）只有三名；副院士，或稱通訊院士；助理院士。嚴格來講只有前兩種才是正式院士，但有些文獻中把這四種統稱為院士。達朗貝爾剛進入科學院時任天文學助理院士；1746 年提為數學副院士；1754 年提為終身院士。

在 1741 年至 1743 年間，達朗貝爾對理論力學的大量課題進行了研究，並在 1743 年底出版了歷史性名著《動力學》(*Traité de dynamique*)，1744 年又出版《流體的平衡和運動》(*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*)。1747 年發表了兩篇重要論文：其中一篇關於噴流反射的文章獲普魯士科學院獎金，文中首先在數學物理中應用偏微分方程；另一篇是關於弦振動的，其中第一次正式採用波動方程。1749 年又發表了有關春分點、歲差和章動的論文，對天體力學發展作出重要貢獻。

達朗貝爾的研究工作和論文寫作都以快速聞名。他進入科學院後，就以克萊洛作為競爭對手，克萊洛研究的每一個課題，達朗貝爾幾乎都要研究，而且盡快發表。多數情況下，達朗貝爾勝過了克萊羅。這種競爭一直到克萊羅去世 (1765) 為止。

自 1750 年開始，達朗貝爾中斷了數理研究工作，加入了“百科全書派”，與啟蒙運動成員一起編輯出版宣傳啟蒙思想的《百科全書》。由 D. 狄德羅 (Diderot) 主編，達朗貝爾任科學副主編，但工作已超出科學範圍。達朗貝爾為《百科全書》寫的長篇序言，成為啟蒙運動的主要文件。在序言中，全面討論了科學和道德問題，並用唯物主義觀點闡明了科學史和哲學史。雖然達朗貝爾為了應付書刊審查員，口頭承認宗教的真理性，但在序言中仍然明確指出，科學的基礎是實際的感受；道德的基礎是激情、同情和傾向等，而這些都是人們自身能夠弄清的。正因為如

此，序言出版後經常受到攻擊。此外，達朗貝爾還撰寫了不少數學和其它知識條目，刊載於《百科全書》。

由於牽涉到的知識面很廣，達朗貝爾在這幾年內的著作超出了數理方面的研究。1752 年出版的《M. 拉莫 (Rameau) 原理下的音樂理論和實用基礎》，屬於心理物理學領域；1753 年出版的《文學和哲學論叢》兩卷集，是關於音樂、法律和宗教的小品文集。

1757 年，達朗貝爾訪問住在瑞士的文學家 M.A. de 伏爾泰 (Voltaire) 後，寫了一個“日內瓦”條目，刊登在《百科全書》第七卷上。他在文中表面讚美，實質上是詛咒這個城市。而《百科全書》正好在瑞士出版，結果被當局吊銷了《百科全書》的出版許可證。達朗貝爾這樣作違背了《百科全書》的編輯方針，受到啓蒙運動內部人員的攻擊，著名哲學家 J.J. 盧梭 (Rousseau) 攻擊得最厲害。達朗貝爾引咎辭去副主編職務。

1760 年以後，達朗貝爾繼續從事數理研究，主要專著是八卷巨著《數學手冊》(*Opuscules Mathematiques*)，到 1780 年才出齊。1770 年以後發表的論文不多，1777 年發表的有關流體阻尼的論文，是以合作者 A. 波蘇 (Bossut) 和 J.A. de 孔多塞 (Condorcet) 為主。

達朗貝爾終生未婚，但長期與沙龍女主人 J. de 勒皮納斯 (Lespinasse) 在一起。他的生活與當時哲學家們一樣，上午到下午工作，晚上去沙龍活動。達朗貝爾很少旅行，最長的一次是 1764 年應普魯士國王腓特烈之邀，到柏林王宮住了三個月。雖然國王再三請他移居德國，就任普魯士科學院院長，達朗貝爾仍婉言謝絕，並推薦 L. 歐拉 (Euler) 擔任，但國王始終未委任歐拉。1762 年，俄皇卡捷琳娜二世曾邀請達朗貝爾任皇太子監護人，被他謝絕。由於他在數理學科中的重要貢獻，1772 年被選為巴黎科學院的終身秘書，成為影響最大的院士；歐洲多數國家的科學院聘請他為國外院士。達朗貝爾還是青年科學家的良師益友，著名

科學家 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 在青年時代，都得到他的鼓勵和支持，他推薦拉格朗日去普魯士科學院，推薦拉普拉斯去巴黎科學院，以後還一直進行學術討論。

1765 年，達朗貝爾因病離開養父母的家，住到勒皮納斯小姐處。在她的精心照料下恢復了健康，以後就繼續住在那裡。任科學院秘書後，他組織編輯和出版巴黎科學院已故院士的文集，但因院內意見分歧而進展緩慢。1776 年，勒皮納斯小姐去世，達朗貝爾非常悲痛；再加上工作的不順利，他的晚年是在失望中度過的。達朗貝爾去世後被安葬在巴黎市郊墓地，由於他的反宗教表現，巴黎市政府拒絕為他舉行葬禮。

達朗貝爾是個多產科學家，他對力學、數學和天文學的大量課題進行了研究；論文和專著很多，還有大量學術通信。僅 1805 年和 1821 年在巴黎出版的達朗貝爾《文集》(*Oeuvres*) 就有 23 卷。

達朗貝爾作為數學家，同十八世紀其他數學家一樣，認為求解物理（主要是力學，包括天體力學）問題是數學的目標。正如他在《百科全書》序言中所說：科學處於從十七世紀的數學時代到十八世紀的力學時代的轉變，力學應該是數學家的主要興趣。他對力學的發展作出了重大貢獻，也是數學分析中一些重要分支的開拓者。

1. 力學基礎研究

(1) 動力學基礎的建立 牛頓力學體系的建立，是十八世紀的科學家們完成的。達朗貝爾是這批學者的傑出代表之一。他在力學基礎上的貢獻，集中反映在他的《動力學》中。

《動力學》於 1743 年出版，1758 年再版。全書分為兩部分，前面還有很長的哲學序言。該書是他的科學工作中最有名的作品。

在哲學序言裡，他首先指出科學革命已經發生，需要很多人長期努力才能完成。他自己的任務是把力學這門新科學系統化和公式化。他主張以感覺論的認識論作為科學的基礎，但也保留了R. 笛卡兒 (Descartes) 的觀點：真理就是明白和簡單的。序言中發揮了他對力學的哲學觀點，強調基本概念必須符合明白和簡單的原則。他認為運動是時間和空間概念的一種組合；他根據物體不能互相穿透的事實，定義物質的不可入性，認為物質由原子組成，原子是堅硬不可入的，原子間由某種彈簧聯結。但這些彈簧是什麼？不見得比牛頓用的以太 (ether) 更高明。限於當時的物理學水準，不可能更深入了解物質的結構。

《動力學》第一部分中，達朗貝爾提出自己的運動三大定律：第一定律與牛頓的慣性定律相同，但給出一個幾何學證明；第二定律為運動的合成，給出一個利用平行四邊形法則的數學證明；第三定律為平衡定律，但不是講作用力與反作用力，而是用動量在撞擊前後的守恆來表示，其中撞擊時間為離散間隔。動量守恆中隱含質量定義，而不用力來定義質量。

《動力學》第二部分中闡述了著名的達朗貝爾原理，並用不同形式的例子來說明。下面以現代語言和符號簡述此原理：

作用於一個物體的外力與動力的反作用力之和等於零。即

$$F + (-ma) + N = 0 , \quad (1)$$

其中 m 、 a 為物體質量和加速度， F 為物體受到的直接外力， N 為物體受到的約束反作用力（也是外力）。在沒有約束時，相應有 $N = 0$ ，(1) 式成爲

$$F - ma = 0 , \quad (2)$$

與牛頓的運動第二定律一致，只是進行了移項。但這是概念上的變化，有下列重要意義：

① 用 (2) 式表達的平衡關係，可以把動力學問題轉化爲靜力

學問題來處理。

② 在有約束情況下，用(1)式非常有利；它與虛功原理結合後，可列出動力學的普遍方程。

③ 用於剛體的平面運動時，可利用平面靜力學方法，使問題簡化。

實際上，達朗貝爾原理還為不久後創立的分析力學打下了基礎。

(2) 流體力學研究 流體的力學研究從牛頓開始，但作為一門學科——流體力學，則是由十八世紀的歐拉、D. 伯努利 (Bernoulli)、克萊羅和達朗貝爾打下的基礎。

在提出達朗貝爾原理後，他自己就用於研究流體運動的一些主要問題，包括笛卡兒提出的行星系統運動的漩渦理論以及克萊羅的有關地球形狀理論。

1752年發表的“流體阻尼的一種新理論” (*Essai d'un nouvelle théorie de la resistance des fluides*) 一文，第一次用流體動力學的微分方程表示場，並提出了著名的達朗貝爾詭論 (*D'Aembert's paradox*)。它實際上是流體力學中的一個定理：物體在大範圍的靜止或勻速運動的不可壓縮、無粘性流體中作等速運動時，它所受到的外力之和為零。這是達朗貝爾從理論上導出的結果，看起來有矛盾，因為物體在流體中運動總會受到阻尼，這是一種耗散力，總和不會為零。達朗貝爾在文中對此未作解釋。按現在的觀點，這個定理並沒有錯，只是現實中不存在無粘性流體。即使粘性非常小的流體，對其中運動的物體都會起重要的作用，因為粘性使流體在物體表面產生切向應力，即摩擦阻尼。

雖然文中還有些其它問題，如有些假定破壞了連續性定律，後人仍公認該論文對流體力學基礎理論有重大貢獻。H. 勞斯 (Rouse) 和 S. 英斯 (Ince) 曾說：“是達朗貝爾第一次引入了流體速度和加速度分量概念。”

達朗貝爾在流體力學上的建樹，與當時歐拉、克萊羅、伯利努等齊名。其中歐拉的貢獻最大，但其餘幾個人很難排名次，因為他們不斷地相互討論，很難說哪一個想法是誰先提出來的。

(3) 天體力學的奠基者之一 達朗貝爾把力學理論用於研究天體運動，成為天體力學的奠基者之一。其貢獻主要集中在兩部著作中：一是 1749 年出版的《分點歲差和地球章動的研究》(*Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de la terre*)，在此書中雖然採用了與克萊羅相似的方法，但在運動方程的積分過程中，用了更多的攝動項，使得結果更符合觀測；二是《宇宙體系的幾個要點研究》(*Recherches sur différens points importants du système du monde*)，共分三卷，1754 年出版前兩卷，1756 年出第三卷。其中貢獻最大的是下面兩個課題：

一是月球運動理論。在十八世紀四十年代，歐拉、克萊羅和達朗貝爾幾乎同時研究月球運動理論；因為按牛頓理論，已不能解釋月球運動的現象，而且理論計算和觀測之間的差愈來愈大。1747 年，達朗貝爾與克萊羅在同一天向巴黎科學院提交了關於月球運動的報告。他們都解釋了月球近地點移動的現象，並在 1749 年提供了更詳細的結果。1754 年，他們兩人又幾乎同時發表了各自的月球運動數值表，成為最早的月球曆表之一。達朗貝爾的月球運動研究成果，載於《宇宙體系的幾個要點研究》第三卷。

二是關於地球形狀和自轉的理論。這也是達朗貝爾同克萊羅競爭的課題之一，是牛頓時代就存在的老課題。達朗貝爾給出了流體自轉時平衡形狀的一般結果，克萊羅立即用來研究地球的自轉，首先在 1743 年出版了《地球的形狀理論》(*Theorie de la figure de la Terre*)。達朗貝爾對克萊羅關於不均勻流體自轉時的形狀理論進行推廣和補充，研究結果載於《宇宙體系的幾個要點的研究》第 2 卷。他以此為基礎，更準確地研究了歲差和章動現象，以及相

似的月球天平動，為天體力學的奠基作出貢獻。

2. 數學分析的開拓者

自牛頓和 G.M. 萊布尼茨 (Leibniz) 發現微積分後，數學發展到一個新階段。英國數學界由於堅持幾何方法而進展緩慢；歐洲大陸數學家卻繼續在分析方法上不斷探索而迅速發展，進入數學分析的開拓時期。達朗貝爾是重要的開拓者之一，其成就僅次於歐拉、拉格朗日、拉普拉斯和 D. 伯努利 (Bernoulli)。

達朗貝爾的數學成果後來全部收入《數學手冊》。下面介紹其主要貢獻。

(1) **極限概念** 達朗貝爾在《百科全書》的“微分”條目中寫道：“微分學是作為最初比和最終比的方法，即求出這些比的極限的一種方法。”文中還把導數看成極限，並論證 $\frac{0}{0}$ 可等於任何量。

在其它一些文章中，他說極限論是微積分學的真正抽象，不是微分學中無窮小量的一個問題，而是有限量的問題。他給出了極限的較好定義：“一個變量趨於一個固定量，趨近程度小於任何給定量，且變量永遠達不到固定量。”但他沒有把這種表達公式化。

正如 C. 波耶 (Boyer) 指出：沒有逃脫傳統的幾何方法影響，不可能把極限用嚴格形式闡述；但他是當時幾乎唯一把微分看成是函數極限的數學家。

(2) **級數理論** 無窮級數在十八世紀中，形式討論佔主導地位，一般都作為多項式的推廣，只有少數人區別開收斂級數和發散級數。達朗貝爾是其中之一，他在《百科全書》中的“級數”條寫道：當級數的項數增加而級數值愈來愈趨向某有限量，則稱此級數為收斂級數。”接著他提出了一個判別無窮級數絕對收斂的辦法：若級數

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

的相鄰兩項之比的絕對值 $|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$ ，在 n 大於某固定正整數 N

時，永遠小於一個與 n 無關的正數 r ，且 $r < 1$ ，則上述級數為絕對收斂。這就是至今仍在應用的著名的達朗貝爾判別式。

對於發散級數，當時一般人照樣採用，達朗貝爾在 1768 年出版的《數學手冊》第 5 卷中說：“所有基於不收斂級數的推理，在我看來都是十分可疑的。”可是他的看法在當時並未引起重視。

十八世紀已出現三角級數，達朗貝爾就是否所有函數都能表示為三角級數的問題，同歐拉和拉格朗日等進行了熱烈的討論，為十九世紀建立三角級數理論打下了基礎。

(3) 微分方程 隨著十八世紀中的力學和天體力學課題的廣泛深入研究，常微分方程得到迅速發展。達朗貝爾在這方面的貢獻集中在求解上。

解高階常微分方程的一種基本方法是降階法，達朗貝爾首先把二階方程降階為一般形式方程

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2, \quad (3)$$

並且命名為“里卡蒂 (Riccati) 方程”(1763)。

在常微分方程奇解的討論中，達朗貝爾的貢獻是加強了歐拉在 1768 年提出的判別法，即在未知通解時，從一個特殊積分鑑別奇解的判別法 (1769)。

在達朗貝爾以前，常微分方程的解只用初等函數表示，歐拉和達朗貝爾開始研究用求積形式的函數作為解。達朗貝爾在 1767 年指出，橢圓積分可以作為常微分方程的解。

達朗貝爾也為偏微分方程的誕生做出了重大貢獻。早在 1743 年出版的《動力學》中，已出現偏微分方程；1746 年發表的《張緊的弦振動時形成的曲線研究》(*Recherches des courbes formé par*

vibration de la corde tendue) 中，首先提出了波動方程

$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} \quad (4)$$

其中 a 為常數，與弦的密度和張力有關。達朗貝爾證明了它的解為 $at + x$ 的函數與 $at - x$ 的函數之和，並討論了這兩個函數在初始條件下的關係。

1750 年，達朗貝爾引入了分離變量的方法，把 (4) 式的解表示為

$$y(t, x) = g(t)h(x) \quad (5)$$

代入 (4) 式後，可化為 $g(t)$ 和 $h(x)$ 的兩個常微分方程，並證明在弦振動的初始條件下， $g(t)$ 、 $h(x)$ 分別為 t 和 x 的週期函數。這是現在仍在採用的一種解偏微分方程的基本方法。

1763 年，達朗貝爾進一步討論了不均勻弦的振動，得出廣義的波動方程

$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = A(x) \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2} \quad (6)$$

在用分離變量求解過程中，出現了常微分方程的邊值和特徵值問題，但未深入下去。

達朗貝爾堅持偏微分方程的解是自變量的解析函數，這就局限了他取得更多的成果；他首先區別了偏微分方程的特解和通解，但認為通解更重要，沒有認識到在解決實際問題（如弦振動）時，滿足初始和邊界條件的特解才有作用。

達朗貝爾在數學上還有很多其它成果：他是早期研究複數性質的人；還是證明代數學基本定理的最早數學家之一，雖然證明不完全；他對概率論也有研究。

由於十八世紀的歷史特點，達朗貝爾同其他數學家們一樣，儘量從力學、天文學、光學和聲學的各種課題研究中，開拓出數學分析的各分支。但因未能從嚴密和系統化方面深入，故在晚年同意拉格朗日的看法，認為數學的思想差不多快窮盡了。實際上，在他們的貢獻基礎上，十九世紀的數學發展得更快。

文 獻

原始文獻

- [1] A. Bastien (editor), *Oeuvres philosophiques, historiques et littéraires de D'Alembert*, Vols 1 – 18, Paris, 1805 。
- [2] G. Bossange et L. Bélin (editors), *Oeuvres complètes de D'Alembert*, Vols 1 – 5, Paris, 1821; Reprints, 1967 。
- [3] J.L.R. D'Alembert, *Opuscules mathématiques*, Vols 1 – 8, Paris, 1761 – 1780 。

研究文獻

- [4] J. Morton Briggs, *Jean Le Rond D'Alembert*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 1, 1976, 110 – 117 。
- [5] C. Boyer, *The history of calculus and its conceptional development*, New York, 1949 。
- [6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972 。