拉　格　朗　日

拉格朗日，J. L. (Lagrange，Joseph-Louis) 1736 年 1 月 25 日生於義大利都靈；1813 年 4 月 10 日卒於法國巴黎。數學、力學、天文學。

拉格朗日之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lagrange.html

拉　格　朗　日

易 照 華

(南京大學)

拉格朗日， J. L. (Lagrange， Joseph-Louis) 1736 年 1 月 25 日生於義大利都靈； 1813 年 4 月 10 日卒於法國巴黎。 數學、 力學、 天文學。

拉格朗日父姓拉格朗日亞 (Lagrangia)。 拉格朗日在都靈出生受洗記錄上的正式名字為約瑟普・洛德維科・拉格朗日亞 (Giuseppe Lodovico Lagrangia)。 父名約瑟普・弗朗切斯科・洛德維科・拉格朗日亞 (Giuseppe Francesco Lodovico Lagrangia)； 母名泰雷薩・格羅索 (Teresa Grosso)。 他曾用過的姓有德・拉・格朗日 (De la Grange)、 拉・格朗日 (La Grange) 等。 去世後， 法蘭西研究院給他寫的頌詞中， 正式用現在姓名。

父系為法國後裔。 曾祖是法國騎兵上校， 到義大利後與羅馬家族的人結婚定居； 祖父任都靈的公共事務和防務局會計， 又同當地人結婚。 父親也在都靈同一單位工作， 共有 11 個子女， 但大多數夭折， 拉格朗日最大。

據拉格朗日本人回憶， 如幼年家境富裕可能不會作數學研究。 父親有一條家規： 必須有一子繼任他的職業， 拉格朗日也不反對。 但到青年時代， 在數學家 F.A. 雷維里 (Revelli) 指導下學幾何後， 萌發了他的數學天才。 十七歲開始專攻當時迅速發展的數學分析。

十八歲時 (1754)， 他曾用義大利語寫出第一篇論文， 是用牛頓二項式定理處理兩函數乘積的高階微商。 寄給數學家 G. 法尼亞諾 (Fagnano)， 並用拉丁語寫出寄給在柏林的 L. 歐拉 (Euler)， 可

是當年 8 月他看到了公佈的 G. 萊布尼茨 (Leibniz) 同 J. 伯努利 (Bernoulli) 的通信， 正是這個內容， 即後來的萊布尼茨公式。 此不幸開端並未使拉格朗日灰心， 9 月給法尼亞諾的信中說， 他正研究等時曲線， 並於年底開始研究變分極值問題。

拉格朗日在 1755 年 8 月 12 日寫給普魯士科學院數學部主任歐拉的信中， 給出了用純分析方法求變分極值的提要； 歐拉在 9 月 6 日回信中稱此工作很有價值。 他本人也認爲這是第一篇有意義的論文， 對變分法創立有貢獻。 此成果使他在都靈出名。 9 月 28 日， 年僅十九歲的拉格朗日被任命名都靈皇家炮兵學校教授。 從此走向數學研究的道路， 逐步成爲當時第一流的科學家， 在數學、 力學和天文學中都做出了歷史性的重大貢獻。 其學術生涯自然地可分爲三個時期。

都靈時期 (1766 年以前)。 拉格朗日任數學教授後， 積極進行研究。 1756 年給歐拉的信中， 開始把變分法用於力學， 還把歐拉關於有心力的一個定理推廣到一般動力學問題。 歐拉把信送交上級 P. 莫佩蒂 (Maupertuis) 和科學院院長。 莫佩蒂看到拉格朗日是他的最小作用原理的支持者、 建議拉格朗日來普魯士任講座教授， 條件比都靈優越， 但拉格朗日謝絕。 同年 8 月， 他被任命爲普魯士科學院通訊院士， 9 月 2 日選爲副院士。

1757 年， 以拉格朗日爲首的一批都靈青年科學家， 成立了一個科學協會， 即都靈皇家科學院的前身。 並從 1759 年開始， 用拉丁語和法語出版學術刊物《都靈科學論叢》(*Miscellanea Taurinensia*， 法語名 *Mélanges de Turin*)。 前三卷刊登了拉格朗日幾乎全部在都靈時期的論文。 其中有關變分法、 分析力學、 聲音傳播、 常微分方程解法、 月球天平動、 木衛運動等方面的成果都是當時最出色的， 爲後來他在這些領域內更大貢獻打下了基礎。 此外他在歲差章動， 大行星運動方面有也重要貢獻。

1763 年 11 月， 都靈王朝代表去倫敦赴任時， 帶拉格朗日到

巴黎。受到巴黎科學院的熱烈歡迎，並初次會見 J. R. 達朗貝爾 (D’Alembert)。在巴黎停留六週後病倒，不能去倫敦。康復後遵照達朗貝爾意見，回國途中在日內瓦拜訪了當時著名數學家 D. 伯努利 (Daniel Bernoulli) 和文學家 F. 伏爾泰 (Voltaire)，他們的看法對拉格朗日以後的工作有啓發。

回到都靈後，拉格朗日的聲望更高。朝野都認爲他在都靈不能發揮才能。1765 年秋，達朗貝爾寫信給普魯士國王腓特烈二世，熱情讚揚拉格朗日，並建議在柏林給拉格朗日一個職位。國王同意後通知拉格朗日。但他回信表示不願與歐拉爭職位。1766 年 3 月，達朗貝爾來信說歐拉決定離開柏林，並請他擔任留下的職位。拉格朗日決定接受。待 5 月 3 日歐拉離開柏林去聖彼得堡後，拉格朗日正式接受普魯士邀請，於 8 月 21 日離開都靈。

柏林時期 (1766 – 1787)。去柏林途經巴黎時，拉格朗日與達朗貝爾合作兩週，於 10 月 27 日到達柏林。11 月 6 日任命他爲普魯士科學院數學部主任。他很快就與院內主要骨幹友好相處，如 J. 伯努利 (Johann Bernoulli III) 等。

1767 年 9 月，拉格朗日同維多利亞 • 孔蒂 (Vittoria Conti) 結婚，他給達朗貝爾的信中說：“我的妻子是我的一個表妹，曾與我家人一起生活很長時期，是一個很好的家庭婦女。” 但她體弱多病，未生小孩，久病後於 1783 年去世。

在普魯士科學院，拉格朗日的任務是每月宣讀一篇論文，內容一般在《科學院文獻》(*Mémoires des l’Academie royale des sciences*) 以及《柏林科學院新文獻》(*Nouveaux memoires de l’Academie des Berlin*) 上發表。他還接受達朗貝爾的建議，經常參加巴黎科學院競賽題研究，並獲得 1772、1774、1776、1780 年度的獎金。

拉格朗日在柏林期間完成了大量重大研究成果，爲一生研究中的鼎盛時期，多數論文在上述兩刊物中發表，少量仍寄回都

靈。其中有關月球運動 (三體問題)、行星運動、軌跡計算、兩個不動中心問題、流體力學、數論、方程論、微分方程、函數論等方面的成果，成爲這些領域的開創性或奠基性研究。此外，還在概率論、循環級數以及一些力學和幾何學課題方面有重要貢獻。他還翻譯了歐拉和 A. 棣莫弗 (De Moivre) 的著作。1782 年給 P. 拉普拉斯 (Laplace) 的信中說："我幾乎寫完《分析力學論述》(*Traité de Mécanique Analytique*)，但無法出版。" 拉普拉斯安排在巴黎出版，出書時已是 1788 年，拉格朗日已到巴黎了。此書成爲分析力學的奠基著作。

1783 年，老家建立 "都靈科學院"，任命拉格朗日爲名譽院長。原出版刊物改爲《都靈科學院綜合論叢》(*Mélanges des l'Academie des sciences des Turin*)。拉格朗日也常寄論文回去發表。到 1786 年 8 月，因支持他的普魯士國王腓特烈二世去世，決定離開柏林。他於 1787 年 5 月 18 日應巴黎科學院邀請動身去法國。

巴黎時期 (1787 − 1813)。拉格朗日 1787 年 7 月 29 日正式到巴黎科學院工作。由於他從 1772 年起就是該院副院士，這次來工作受到了更熱情的歡迎，可惜達朗貝爾已在 1783 年去世。

到巴黎的前幾年，他主要學習更廣泛的知識，如形而上學、歷史、宗教、醫藥和植物學等。1789 年爆發資產階級革命，他只是有興趣地旁觀。1790 年 5 月 8 日的制憲大會上通過了十進位的公制法，科學院建立相應的 "度量衡委員會"，拉格朗日爲委員之一。8 月 8 日，國民會議決定對科學院專政，三個月後又決定把 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier)、拉普拉斯、C.A. 庫倫 (Coulomb) 等著名院士淸除出科學院。但拉格朗日被保留，並任度量衡委員會主席。

1792 年，喪偶九年的拉格朗日同天文學家勒莫尼耶 (Le Monnier) 的女兒何蕾−弗朗索瓦−阿德萊德 (Renée–Françoise–Adélaide)

結婚， 雖未生兒女， 但家庭幸福。

1793 年 9 月政府決定逮捕所有在敵國出生的人， 經拉瓦錫竭力向當局說明後， 把拉格朗日作爲例外。 1795 年成立國家經度局， 統一管理全國航海、 天文研究和度量衡委員會， 拉格朗日是委員之一。 同年成立的兩個法國最高學府： 師範學校和綜合工科學校中， 拉格朗日等爲首批教授。 在取消對科學院的專政後， 1795 年建立了法國最高學術機構 — 法蘭西研究院， 選舉拉格朗日爲第一分院 (即科學院) 的數理委員會主席。 此後他才重新進行研究工作。 但主要是整理過去的工作， 並結合教材編寫完成一批重要著作。

《分析力學論述》於 1788 年出版後， 拉格朗日就著手把書中的原理和方法推廣到一般的情況。 他在 1810 年前發表的一些論文中， 如在《法蘭西學院文獻》(*Memoires de l'Institute*) 中刊登的 "關於任意常數變異法在所有力學問題中的一般理論"(*Memoire sur la théorie génèrale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique*， 1809 年 3 月宣讀) 等， 都是爲修改出第二版作準備。 第二版更名爲《分析力學》(*Mécanique analytique*)， 分兩卷， 上卷於 1811 年出版， 下卷直到 1816 年才印出， 拉格朗日已去世三年。

他在師範學校的教材《師範學校數學基礎教程》(*Les lecons élèmentaires sur les Mathématique donnés à l'École Normale*) 於 1796 年出版， 後來收進《拉格朗日文集》(*Oeuvres de Lagrange*， 下面簡稱《文集》)， 第七卷的內容他在 1812 年作過大量充實。

1798 年出版的《論任意階數值方程的解法》(*Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*)， 總結了早年在方程論方面的成果， 並加以系統化， 充實後於 1808 年再版。

關於函數論方面他出版兩本歷史性著作。 一是《解析函數論， 含有微分學的主要定理， 不用無窮小， 或用在消失的量，

或極限與流數等概念， 而歸結爲代數分析藝術》(*Theorie des fonctions analytiques, contenant les principe du calcul diffèrentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'éranouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique de quantités finies*)， 1797 年出版， 1813 年再版； 另一本《函數計算教程》(*Lecons sur le calcul des fonctions*)， 1801 年出版， 由師範學校講義改編。

1799 年霧月政變後， 拿破侖 (Napoleon) 提名拉格朗日等著名科學家爲上議院議員及新設的勳級會榮譽軍團成員， 封爲伯爵； 還在 1813 年 4 月 3 日授予他帝國大十字勳章。 此時拉格朗日已重病在身， 終於在 4 月 10 日晨逝世。 在葬禮上， 由議長拉普拉斯代表上議院， 院長拉賽佩德 (Lacépède) 代表法蘭西研究院致悼詞。 義大利各大學都舉行了紀念活動， 但柏林大學未進行任何活動， 因當時普魯士加入反法聯盟。

主要貢獻評述

拉格朗日在數學、 力學和天文學三個學科中都有重大歷史性貢獻， 但他主要是數學家， 研究力學和天文學的目的是表明數學分析的威力。 全部著作、 論文、 學術報告記錄、 學術通訊超過五百篇。

拉格朗日的學校生涯主要在十八世紀後半期。 當時數學、 物理學和天文學是自然科學主體。 數學的主流是由微積分發展起來的數學分析， 以歐洲大陸爲中心； 物理學的主流是力學； 天文學的主流是天體力學。 數學分析的發展使力學和天體力學深化， 而力學和天體力學的課題又成爲數學分析發展的動力。 當時的自然科學代表人物都在此三個學科做出了歷史性重大貢獻。 下面就拉格朗日的主要貢獻分別評述。

數學分析的開拓者　牛頓和萊布尼茨以後的歐洲數學分裂爲

兩派。 英國仍堅持牛頓在《自然哲學中的數學原理》中的幾何方法， 進展緩慢； 歐洲大陸則按萊布尼茨創立的分析方法 (當時包括代數方法)， 進展很快， 當時叫分析學 (analysis)。 拉格朗日是僅次於歐拉的最大開拓者， 在十八世紀創立的主要分支中都有開拓性貢獻。

(1) 變分法　　這是拉格朗日最早研究的領域， 以歐拉的思路和結果爲依據， 但從純分析方法出發， 得到更完善的結果。 他的第一篇論文 “極大和極小的方法研究”(*Recherches sur la méthode de maximis et minimies*) 是他研究變分法的序幕； 1760 年發表的 “關於確定不定積分式的極大極小的一種新方法” (*Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima de formules integrales indéfinies*) 是用分析方法建立變分法的代表作。 發表前寫信給歐拉時， 稱此文中的方法爲 “變分方法” (the method of variation)。 歐拉肯定了， 並在他自己的論文中正式將方法命名爲 “變分法” (the calculus of variation)。 變分法這個分支才眞正建立起來。

拉格朗日方法是對積分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y,\ y')dx \quad (y'=\frac{dy}{dx}) \tag{1}$$

進行極値化， 函數 $y=y(x)$ 待定。 他不像歐拉和前人用改變極大或極小化曲線的個別坐標的辦法， 而是引進通過端點 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ 的新曲線

$$y(x)+\delta y(x)\text{，}$$

$\delta y(x)$ 叫曲線 $y(x)$ 的變分。 J 相應的增量 ΔJ 按 δy、$\delta y'$ 展開的一、二項叫一次變分 δJ 和二次變分 $\delta^2 J$。 他用分析方法證明了 δJ 爲零的必要條件就是歐拉方程

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0\text{。} \tag{2}$$

他還繼續討論了端點變動時的情況以及兩個自變量的重積分的情

況， 使這個分支繼續發展。 1770 年以後， 拉格朗日還研究了被積函數 f 包含高階導數的單重和多重積分時的情況， 現在已發展成爲變分方法的標準內容。

(2) 微分方程　早在都靈時期， 拉格朗日就對變係數常微分方程研究做出重大成果。 他在降階過程中提出了以後所稱的伴隨方程， 並證明了非齊次線性係數方程的伴隨方程， 就是原方程和齊次方程。 他還把歐拉關於常係數齊次方程的結果推廣到變係數情況， 證明了變係數齊次方程的通解可用一些獨立特解乘上任意常數相加而成； 而且在知道方程的 m 個特解後， 可以把方程降低 m 階。

在柏林時期， 他對常微分方程的奇解和特解做出歷史性貢獻。 在 1774 年完成的 "關於微分方程特解的研究" (*Sur les intégrales particulieres des equations différentielles*) 中系統地研究了奇解和通解的關係， 明確提出由通解及其對積分常數的偏導數消去常數求出奇解的方法； 還指出奇解爲原方程積分曲線族的包絡線。 當然， 他的奇解理論還不完善， 現代奇解理論的形式是由 G. 達布 (Darboux) 等人完成的。

常微分方程組的研究在當時結合天體力學中的課題進行。 拉格朗日在 1772 年完成的 "論三體問題" (*Essai sur le probléme des trois corps*) 中， 找出三體運動的常微分方程組的五個特解： 三個是三體共線情況； 兩個是三體保持等邊三角形； 在天體力學中稱爲拉格朗日平動解。 他同拉普拉斯一起完善的任意常數變異法， 對多體問題方程組的近似解有重大作用， 促進了攝動理論的建立。

拉格朗日是一階偏微分方程理論的建立者， 他在 1772 年完成的 "關於一階偏微分方程的積分" (*Sur l'integration des équation au differences partielles du premier order*) 和 1785 年完成的 "一階線性偏微分方程的一般積分方法" (*Méthode génèrale pour intégrer les equations partielles du premier order lorsque ces differences ne sont* *que linéaires*) 中， 系統地完成了一階偏微分方程的理論和解法。

他首先提出了一階非線性偏微分方程的解分類爲完全解、奇解、通積分等， 並給出它們之間的關係。還對形如

$$q = Q(x,\ y,\ z,\ p) \quad \left(q = \frac{\partial z}{\partial y}\text{、}p = \frac{\partial z}{\partial x}\right) \tag{3}$$

的非線性方程， 化爲解線性方程

$$\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(Q - p\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial x} - p\frac{\partial Q}{\partial z} = 0\text{。} \tag{4}$$

後來又進一步證明了解線性方程

$$P_p + Q_q = R \quad (P\text{、}Q\text{、}R\text{ 爲 }x\text{、}y\text{、}z\text{ 的函數}) \tag{5}$$

與解

$$P\frac{\partial f}{\partial x} + Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

等價， 而解 (6) 式又與解常微分方程組

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \tag{7}$$

等價。(5) 式至今稱爲拉格朗日方程。有趣的是， 由上面已可看出， 一階非線性偏微分方程， 可以化爲解常微分方程組。但拉格朗日自己卻不明確。他在 1785 年解一個特殊的一階偏微分方程時， 還說不能用這種方法， 可能他忘記了自己在 1772 年結果。現代也有時稱此方法爲*拉格朗日方法*， 又稱爲柯西 (Cauchy) 特徵方法。因拉格朗日只討論兩個自變量情況， 在推廣到 n 個自變量時遇到困難， 而後來由柯西在 1819 年克服。

(3) *方程論*　十八世紀的代數學從屬於分析， 方程論是其中的活躍領域。拉格朗日在柏林的前十年， 大量時間花在代數方程和超越方程的解法上。

他在代數方程解法中有歷史性貢獻。 在長篇論文 “關於方程的代數解法的思考” (*Réflexions sur le resolution algébrique des equations*, 全集、III, 205 − 421) 中, 把前人解三、四次代數方程的各種解法, 總結爲一套標準方法, 而且還分析出一般三、四次方程能用代數方法解出的原因。 三次方程有一個二次輔助方程, 其解爲三次方程根的函數, 在根的置換下只有兩個值; 四次方程的輔助方程的解則在根的置換下只有三個不同值, 因而輔助方程爲三次方程。 拉格朗日稱輔助方程的解爲原方程的根的預解函數 (是有理函數)。 他繼續尋找五次方程的預解函數, 希望這個函數是低於五次的方程的解, 但沒有成功。 儘管如此, 拉格朗日的想法已蘊含著置換群概念, 而且使預解 (有理) 函數值不變的置換構成子群, 子群的階是原置換群階的因子。 因而拉格朗日是群論的先驅。 他的思想爲後來的 N.H. 阿貝爾 (Abel) 和 E. 伽羅瓦 (Galois) 採用並發展, 終於解決了高於四次的一般方程爲何不能用代數方法求解的問題。

拉格朗日在 1770 年還提出一種超越方程的級數的解法。 設 p 爲方程

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0 \tag{7'}$$

的解, 其中 α 爲參數, $\varphi(x)$ 爲 x 的任意可微函數 (包括超越函數), 則 p 的任意函數 $\psi(p)$ 可表爲下面級數

$$\psi(p) = \psi(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[\varphi^n(x) \frac{d\psi(x)}{dx} \right] \right\}_{x=\alpha} 。 \tag{8}$$

這就是後來在天體力學中常用的拉格朗日級數。 他自己沒有討論收斂性, 後來由柯西求出此級數的收斂範圍。

(4) 數論　拉格朗日到柏林初期就開始研究數論, 第一篇論文 “二階不定問題的解” (*Sur la solution des problémès in détèrminés du seconde degrés*) 和送交都靈《論叢》的 “一個算術問題的解”

(*Solution d'un problème d'arithmetique*) 中， 討論了歐拉多年從事的費馬 (Fermat) 方程

$$x^2 - Ay^2 = 1\ (x、y、A \text{ 爲整數}) \tag{9}$$

第一次證明 A 不是平方數， $y \neq 0$ 時有解。 後來又在 1770 年的 "整數不定問題解的新方法" (*Nouvelle méthode pour resoudve les problèmes indéteminés en nombres entiers*) 中得到更一般的費馬方程

$$x^2 - Ay^2 = B\ (B \text{ 也爲整數}) \tag{10}$$

的解。 還討論了更廣泛的二元二次整係數方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0， \tag{11}$$

並解決了整數解問題。

拉格朗日還在 1772 年的 "一個算術定理的證明" (*Demonstration d'un théorème d'arthmétique*， 《文集》III， 189 − 201) 中， 把歐拉四十多年沒有解決的費馬另一猜想 "一個正整數能表示爲最多四個平方數的和" 證明出來。 在 1773 年發表的 "質數的一個新定理的證明" (*Démonstation d'un theorem nouveau concernant les nombres premiers*) 中， 證明了著名的定理： n 是質數的充要條件爲 $(n-1)!+1$ 能被 n 整除。

拉格朗日不僅有大量成果， 還在方法上有創新。 如在證明 (9) 式的解存在時， 成功地用 $\sqrt{A}$ 的連分式表達。 另外在 1775 年發表的 "算術研究" (*Recherches d' arithmétiques*， 《文集》III， 695 − 795) 中， 研究 (11) 式解時採用的方法和結果， 是二次型理論的基本文獻。

(5) 函數和無窮級數　同十八世紀的其他數學家一樣， 拉格朗日也認爲函數可以展開爲無窮級數， 而無窮級數則是多項式的推廣。 他還試圖用代數建立微積分的基礎。 在他的《解析函數

論 ⋯⋯ 》(《文集》IX) 中， 書名上加的小標題 “含有微分學的主要定理， 不用無窮小， 或正在消失的量， 或極限與流數等概念， 而歸結爲代數分析藝術”， 表明了他的觀點。 由於迴避了極限和級數收斂性問題， 當然就不可能建立眞正的級數理論和函數論。 但是他們的一些處理方法和結果仍然有用， 他們的觀點也在發展。

拉格朗日就在《解析函數論 ⋯⋯ 》中， 第一次得到微分平均值定理 (書中第六章)

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad (a\le c\le b)\text{，} \tag{12}$$

後面並用它推導出泰勒 (Taylor) 級數， 還給出餘項 R_n 的具體表達式 (第二十章)

$$\left.\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+f'(x)h+\frac{h^2}{2!}f''(x) \\ &\quad +\frac{l_1^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n\text{，} \\ R_n &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h)(0\le\theta\le 1)\text{。} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

R_n 就是著名的拉格朗日餘項形式。 他還著重指出， 泰勒級數不考慮餘項是不能用的。 雖然他還沒有考慮收斂性， 甚至各階導數的存在性， 但他強調 R_n 要趨於零。 表明他已注意到收斂問題。

他同歐拉、 達朗貝爾等在任意函數能否表爲三角級數的長期爭論， 雖未解決， 但爲以後三角級數理論的建立打下了基礎。

最後要提一下他在《師範學校數學基礎教程》中， 提出了著名的拉格朗日內插公式

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}y(a)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}y(b) \\ &\quad +\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c) \end{aligned} \tag{14}$$

直到現在計算機計算大量中點內插時仍在使用。另外在求多元函數相對極大極小及解微分方程中的拉格朗日任意乘子法，至今也在用。

除了對數學分析在十八世紀建立的主要分支有開拓性貢獻外，他對嚴格化問題也開始注意。儘管迴避了極限概念，但他仍承認可以在極限基礎上建立微積分 (《文集》I，325)。但正是對嚴格化重視不夠，所建立的分支到一定階段就很難深入。這可能是他晚年研究工作少的原因。他在 1781 年 9 月 21 日給達朗貝爾的信中說：“在我看來，似乎 (數學) 礦井已挖掘很深了，除非發現新的礦脈，否則勢必放棄它 $\cdots$。” (《文集》XIII，368) 這說出了他和其他同事們的心情。事實表明，十九世紀在建立數學分析嚴格基礎後，數學更迅速地發展。

分析力學的創立者　牛頓的力學理論仍用幾何方法討論。到十八世紀中期，歐拉和達朗貝爾開始用分析方法，而拉格朗日在使力學分析化方面最出色，他在 1788 年出版的《分析力學》一書，就是分析力學這門學科建立的代表作。他一生的全部力學論文以及同時代人的力學貢獻，都歸納到這部著作中。他的研究目的是使力學成爲數學分析的分支。他在《分析力學》的序言中說：“$\cdots$ 我在其中闡明的方法，既不要求作圖，也不要求幾何的或力學的推理，而只是一些按照一致而正規的程序的代數 (分析) 運算。喜歡分析的人將高興地看到，力學變成了它的一個新分支，並將感激我擴大了它的領域。” 實際情況正是這樣。

拉格朗日在這方面的最大貢獻是把變分原理和最小作用原理具體化，而且用純分析方法進行推理，成爲拉格朗日方法。

他首先引入廣義坐標概念，故廣義坐標又稱爲拉格朗日坐標。一個力學系統可用有限個坐標 $q_j(j = 1、2、\cdots、N)$ 表示；$\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$ 爲相應的廣義速度。力學系統總動能 (拉格朗日稱之

爲活力) 表爲 $q_i \cdot \dot{q}_i$ 和時間 t 的函數後， 定義

$$I = \int_{t_0}^{t_1} T dt \tag{15}$$

爲作用， 最小作用原理成爲 $\delta I = 0$。 拉格朗日用變分法討論 $\delta J = 0$ 時， 導出了力學系統的運動方程爲

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = Q_j \text{，} \tag{16}$$

其中 Q_j 爲力學系統受到的作用力在廣義坐標中的表達式， 稱爲廣義力。 如力爲保守的， 則存在勢函數 V， (16) 式成爲

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial V}{\partial q_j} \text{，} \tag{17}$$

(16) 或 (17) 式就是第二類拉格朗日方程。 後來 S.D. 泊松 (Poisson) 等引入函數

(17) 式成爲
$$\left.\begin{aligned} &L = T + V, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \text{。} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

L 就取名爲拉格朗日函數。

拉格朗日還把這些方法用於研究質點組、 剛體和流體。 在流體力學中討論流體內各點的運動方法仍稱爲拉格朗日方法。

最後收集到《文集》中的《分析力學》是第二版， 共分兩卷， 785 頁。 第一卷中一半講述 “靜力學”， 主要討論質點組和流體的平衡問題。 從分析靜力學原理開始， 討論了質點組和流體的平衡條件， 並用於研究行星的形狀。 第一卷後半和第二卷全部討論 “動力學”。

力學部分共分爲十三章， 前四章講述動力學原理和建立質點系統運動方程的拉格朗日方法， 包括 (16)、 (17) 式的推導以及運動的一般性質。 第五章 “用任意常數變化解動力學問題的一般近

似方法” 中， 把他在微分方程解法中的任意常數變異法用於解動力學方程。 後面討論了一階近似的求積方法。 第七章 “關於能看作質點的自由物體系統在引力作用下的運動” 主要講天體力學的基本問題。 第八、 九章討論不動中心吸引問題和剛體動力學。 第十章討論地球自轉和月球天平動。 最後三章討論流體動力學基本問題， 作爲拉格朗日方法的應用。

拉格朗日創立分析力學使力學發展到新的階段。 拉格朗日方程 (16)、 (17) 式推廣了牛頓第二運動定律； 使得在任意坐標系下統一形式的運動方程， 便於處理各種約束條件等優點， 至今仍爲動力學中的最重要的方程。 在《分析力學》第二版印出 (第二卷 1816 年) 後不久， W.R. 哈密頓 (Hamilton) 於 1834 年提出廣義動量並建立哈密頓正則方程， 又同 K.G. 雅可比 (Jacobi) 一起建立哈密頓－雅可比方法 (1837) 後， 分析力學正式奠基建成， 很快用到各學科領域。

天體力學的奠基者 天體力學是在牛頓發表萬有引力定律 (1687) 時誕生的， 很快成爲天文學的主流。 它的學科內容和基本理論是在十八世紀後期建立的。 主要奠基者爲歐拉、 A.C. 克萊羅 (Clairaut)、 達朗貝爾、 拉格朗日和拉普拉斯。 最後由拉普拉斯集大成而正式建立經典天體力學。 拉格朗日一生的研究工作中， 約有一半同天體力學有關， 但他主要是數學家， 他把力學作爲數學分析的一個分支， 而又把天體力學作爲力學的一個分支對待。 雖然如此， 他在天體力學的奠基過程中， 仍有重大歷史貢獻。

首先在建立天體運動方程上， 拉格朗日用他在分析力學中的原理和 (16)、 (17) 式， 建立起各類天體的運動方程。 其中特別是根據他在微分方程解法的任意常數變異法， 建立了以天體橢圓軌跡根數爲基本變量的運動方程， 現在仍稱作拉格朗日行星運動方程， 並在廣泛應用。 此方程對攝動理論的建立和完善起了重大作用， 方程在 1780 年獲巴黎科學院獎的論文 “彗星在行星作用下的

攝動理論研究” (*Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peuvent éprouver par l’action des planètes*) 中給出，得到達朗貝爾和拉普拉斯的高度評價。另外在一篇有關三體問題的獲獎文章中，把三體問題的運動方程組第一次降到七階。

在天體運動方程解法中，拉格朗日的重大歷史性貢獻是發現三體問題運動方程的五個特解，即拉格朗日平動解。其中兩個解是三體圍繞質量中心作橢圓運動過程中，永遠保持等邊三角形。他的這個理論結果在一百多年後得到證實。1907 年 2 月 22 日，德國海德堡天文台發現了一顆小行星 (後來命名爲希臘神話中的大力士阿基里斯 (Achilles)，編號 588)，它的位置正好與太陽和木星形成等邊三角形。到 1970 年前，已發現 15 顆這樣的小行星，都以希臘神話中特洛伊 (Troy) 戰爭中將帥們的名字命名。有 9 顆位於木星軌跡上前面 60° 處的拉格朗日特解附近，名爲希臘人 (Greek) 群；有 6 顆位於木星軌跡上後面 60° 處的解附近，名爲脫羅央 (Trojan) 群。1970 年以後又繼續發現 40 多顆小行星位於此兩群內，其中中國紫金山天文台發現四顆，但尚未命名。至於爲什麼在特解附近仍有小行星，是因爲這兩個特解是穩定的。1961 年又在月球軌跡前後發現與地月組成等邊三角形解處聚集的流星物質，是拉格朗日特解的又一證明。至今尚未找到肯定在三個拉格朗日共線群 (三體共線情況) 處附近的天體，因爲這三個特解不穩定。另外，拉格朗日在一階攝動理論中也有重要貢獻，提出了計算長期攝動方法 (《文集》V，125－414)，並與拉普拉斯一起提出了在一階攝動下的太陽系穩定性定理 (參見 “拉普拉斯” 條)。此外，拉格朗日級數 (8) 式在攝動理論中有廣泛應用。

在具體天體的運動研究中，拉格朗日也有大量重要貢獻，其中大部分是參加巴黎科學院徵獎的課題。他的月球運動理論研究論文多次獲獎。1763 年完成的 “月球天平研究” (*Recherches sur la Libration de la lune*) 獲 1764 年度獎，此文較好地解釋了月球自轉

和公轉的角速度差異， 但對月球赤道和赤道面的轉動規律解釋得不夠好。 後來在 1780 年完成的論文解決得更好 (參見《文集》V， 5 − 123)。 獲 1772 年度獎的就是著名的三體問題論文， 也是針對月球運動研究寫的。 獲 1774 年度獎的論文爲 “關於月球運動的長期差” (*Sur l'equation séculaire de la lune*)， 其中第一次討論了地球形狀和所有大行星對月球的攝動。 關於行星和彗星運動的論文也有兩次獲獎。 1776 年度獎的是他在 1775 年完成的三篇論文， 其中討論了行星軌跡交點和傾角的長期變化對彗星運動的影響。 1780 年度的獲獎論文就是提出著名的拉格朗日行星運動方程的那篇。

獲 1766 年度獎的論文是 “木星的衛星運動的偏差研究 ...” (*Recherches sur les inégualités des satellites de Jupiter*··· ， 其中第一次討論了太陽引力對木星的四個衛星運動的影響， 結果比達朗貝爾的更好。

拉格朗日從事的天體力學課題還有很多， 如在柏林時期的前半部分， 還研究了用三個時刻的觀測資料計算彗星軌跡的方法 (《文集》IV， 439 − 532)， 所得結果成爲軌跡計算的基礎。 另外他還得到了一種力學模型 — 兩個不動中心問題的解， 這是歐拉已討論過的， 又稱爲歐拉問題。 是拉格朗日推廣到存在離心力的情況， 故後來又稱爲拉格朗日問題 (《文集》II， 67 − 121)。 這些模型現在仍在應用。 有人用作人造衛星運動的近似力學模型。 此外， 他在《分析力學》中給出的流體靜力學的結果， 後來成爲討論天體形狀理論的基礎。

總的看來， 拉格朗日在天體力學的五個奠基者中， 所做的歷史性貢獻僅次於拉普拉斯。 他創立的 “分析力學” 對以後天體力學的發展有深遠的影響。

結束語

拉格朗日是十八世紀的偉大科學家， 在數學、 力學和天文學三

個學科中都有歷史性的重大貢獻。但他主要是數學家，他最突出的貢獻是在把數學分析的基礎脫離幾何與力學方面起了決定性的作用。使數學的獨立性更爲清楚，而不僅是其它學科的工具。同時在使天文學力學化、力學分析化上也起了歷史性作用，促使力學和天文學 (天體力學) 更深入發展。由於歷史的局限，嚴密性不夠妨礙著他取得更多的成果。

拉格朗日的著作非常多，未能全部收集。他去世後，法蘭西研究院集中了他留在學院內的全部著作，編輯出版了十四卷《拉格朗日文集》，由 J.A. 塞瑞特 (Serret) 主編，1867 年出版第一卷，到 1892 年才印出十四卷。第一卷收集他在都靈時期的工作，發表在《論叢》第一到第四卷中的論文；第二卷收集他發表在《論叢》第四、五卷及《都靈科學院文獻》第一、二卷中的論文；第三卷中有他在《柏林科學院文獻》1768 – 1769 年，1770 – 1773 年發表的論文；第四卷刊有他在《柏林科學院新文獻》1774 – 1779 年、1781 年、1783 年發表的論文；第五卷刊載上述刊物 1780 – 1783 年、1785 – 1786 年、1792 年、1793 年、1803 年發表的論文；第六卷載有他未在巴黎科學院或法蘭西研究院的刊物發表過的文章；第七卷主要刊登他在師範學校的報告；第八卷爲 1808 年完成的《各階數值方程的解法論述及代數方程的幾點說明》(*Traité des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des equations algébriques*) 一書；第九卷是 1813 年再版的《解析函數論，含有微分學的主要定理，不用無窮小，或正在消失的量，或極限與流數等概念，而歸結爲代數分析藝術》一書；第十卷是 1806 年出版的《函數計算教程》一書；第十一卷是 1811 年出版的《分析力學》第一卷，並由 J. 貝特朗 (Bertrand) 和 G. 達布 (Darboux) 作了註釋；第十二卷爲《分析力學》的第二卷，仍由上述二人註釋，此二卷書後來在巴黎重印 (1965)；第十三卷刊載他同達朗貝爾的學術通訊；第十

四卷是他同孔多塞，拉普拉斯，歐拉等人的學術通訊，此二卷都由 L. 拉朗 (Lalanne) 作註釋。還計劃出第十五卷，包含 1892 年以後找到的通訊，但未出版。

文　　獻

原始文獻

[1] *Oeuvres de Lagrange*(拉格朗日文集, 以下簡稱《文集》), edited by J.A. Serret, Vol. I–XIV, 1867 – 1892。

[2] *Recherches sur la méthode de maximis et minimies*,《文集》, Vol. I, 3 – 20。

[3] *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules integrales indefinies*,《文集》, Vol. I, 334 – 362。

[4] *Application de la méthode présédante à solution differens problèmes de dynamique*,《文集》, Vol. I, ， 365 – 468。

[5] *Recherches sur la nature et la propagation du son*,《文集》, Vol. I, 39 – 148。

[6] *Recherches sur la Libration de la lune*,《文集》, Vol. VI, 5 – 61。

[7] *Recherches sur les inéqualités des satellites de Jupite···*,《文集》, Vol. VI, 67 – 225。

[8] *Essai sur le problème des trois corps*,《文集》, Vol. VI, 229 – 324。

[9] *Sur l'equation séculaire de la lune*,《文集》, Vol. VI, 335 – 399

[10] *Recherches sur les équations séculaires des mouvements de noeuds et des inclinaisons des orbites des planètes*,《文集》, Vol. VI, 635 – 709。

[11] *Sur le mouvement des noeuds des orbites planètaires*,《文集》, Vol. IV, 11 – 148。

[12] *Sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique*,《文集》, Vol. VII, 517 – 532。

[13] *Recherches sur la théorie des perturbations que les comètes peu-*

vent éprouver par l'action des planètes,《文集》, Vol. VI, 403 − 503。

[14] *Sur la solution des problèmès indétèrminés du seconde degrés*,《文集》, Vol. II, 377 − 535。

[15] *Solution d'un problème d'arithmetique*,《文集》, Vol. I, 671 − 731。

[16] *Nouvelle méthode pour resoudre l'es problèmes indéterminés en normbres entiers*,《文集》, Vol. II, 655 − 726。

[17] *Démonstration d'un théorem nouveau concernant les nombres premiers*,《文集》, Vol. III, 425 − 438。

[18] *Recherches sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les equations litterales*,《文集》, Vol. IV, 343 − 374

[19] *Sur une nouvelle espéce relatif à la differentiation et à l'intégration des quantités variables*,《文集》, Vol. III, 441 − 476。

[20] *Sur une nouvelle méthode de calcul integral pour les différentielles affectés d'un radical carré sous lequel la variable ne passe-pas le quatrieme degré*,《文集》, Vol. II, 253 − 312。

[21] *Sur l'integration des équation au differences partielles du premier order*,《文集》, Vol. III, 549 − 575。

[22] *Sur les intégrales particulieres des equations différentielles*,《文集》, Vol. IV, 5 − 108。

[23] *Méthode générale pour intégrer les equations partielles du premier ordre lorsque ces differences ne sont que linéaires*,《文集》 Vol. V, 544 − 562。

研究文獻

[24] J. Itard, *Lagrange, Joseph Louis*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 7, 559 − 573。

[25] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern time*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[26] S.F. Lacroix, *Liste des ouvrages de M. Lagrange, supp. to Mécanique analytique*, Paris, 1855, 383 − 389。

[27] G. Sarton, *Lagrange's personality (*1736 − 1813*)*, Proceedings of the American Philosophical Society, 88 (1944), 457 − 496。