拉　普　拉　斯

拉普拉斯，P.-S. (Laplace，Pierre-Simon) 1749 年 3 月 23 日生於法國諾曼底地區的博蒙昂諾日；1827 年 3 月 5 日卒於法國巴黎。數學、天體力學、物理學。

拉普拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Laplace.html

拉　普　拉　斯

易　照　華

(南京大學)

拉普拉斯， P.-S. (Laplace， Pierre-Simon) 1749 年 3 月 23 日生於法國諾曼底地區的博蒙昂諾日；1827 年 3 月 5 日卒於法國巴黎。 數學、 天體力學、 物理學。

生平和事蹟

拉普拉斯的父親皮埃爾•拉普拉斯 (Pierre Laplace) 是下諾曼底省的一個教區官員， 兼做蘋果汁生意。 母親馬里耶－安娜 (Marie-Anne) 的娘家爲圖熱維爾 (Tourgéville) 富有的農場主。 拉普拉斯還有一個比他大四歲的姐姐， 與母同名。

近親中未發現有名氣的知識界人物， 只有一個叔父路易 (Louis) 是未正式任命的神父， 據說是數學家， 但早在拉普拉斯十歲時就去世了， 對拉普拉斯的成長影響不大。

拉普拉斯十六歲時在家鄉唸完小學和中學。 按當地習俗， 孩子們中學畢業後一般去教堂或軍隊工作。 父親希望他到教堂任職。 他在 1766 年考入卡昂大學藝術系，後轉到神學系，準備當教士。 大學裡的教師們對他的影響最大， 一位是 C. 伽布勒 (Gadbled)， 另一位是 P. 勒卡呂 (Le Canu)。

爲了發揮自己的數學專長， 拉普拉斯放棄了在卡昂大學取得碩士學位的機會， 帶著勒卡呂寫給巴黎科學院負責人 J. L. 達朗貝爾 (D'Alembert) 的推薦信， 於 1768 年到了巴黎。

第一次見面時， 達朗貝爾給了拉普拉斯一個題目， 要他一周

後再來， 但他一夜之間就完成了。 達朗貝爾又給了他一個關於打結的難題， 他當場就解出來了。 達朗貝爾非常賞識他的數學才能， 推薦他到巴黎科學院任職。 但當時科學院內的保守勢力強大， 不願接受這位沒有學位的十九歲青年。 達朗貝爾只好介紹他暫時到軍事學校教書， 講授中等數學、 基礎數學分析、 靜力學等課程。 這樣他可以繼續留在巴黎， 等待進入科學院的機會。 誰知一等就是五年。

拉普拉斯在二十一歲生日後五天 (1770 年 3 月 28 日) 完成第一篇數學論文 “曲線的極大和極小研究” (*Recherches sur le maxima et minima des lignes courbes*)。 其中除了對極值問題進行綜合評述以外， 還對當時已著名的 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 做出的有關結果提出某些改進。 此後三年內共完成十三篇論文， 課題涉及到當時數學、 天文學的最新領域： 極值問題、 差分方程、 循環級數、 機會對策、 微分方程的奇異解、 行星軌跡傾角的變化、 月球運動理論、 衛星對行星運動的攝動、 行星的牛頓運動理論等。 雖然在 1773 年以前只刊出四篇， 但全都向巴黎科學院提出報告， 逐漸受到科學界重視。

當時巴黎科學院接受研究人員要經過院士們投票決定， 儘管有達朗貝爾等人的支持， 但不少院士認爲拉普拉斯太年輕， 不投贊成票。 結果在 1771 年投票時， 接受了比拉普拉斯年長十四歲的 A. 范德蒙得 (Vandermonde)； 在 1772 年投票時又接受了比他大十歲的 J.-A.-A 庫辛 (Cousin)。 達朗貝爾經這兩次挫折後失去信心， 在 1773 年元旦寫信給柏林的普魯士學院數學部主任拉格朗日， 希望能在那裡給拉普拉斯找一個職位， 並在信中氣憤地說： “巴黎科學院寧願接受一個才能比他低得多的人”[參看《拉格朗日文集》第 13 卷， 254 − 256 頁 (*Oeauvres de Lagrange*， XIII， 1882， 254 − 256)]。 拉普拉斯尙未接到回信， 1773 年 2 月 J.A. de 孔多塞 (Condorcet) 出任巴黎科學院執行秘書， 在他的堅決支持下， 終於

在同年 3 月 31 日通過了接受拉普拉斯進入科學院的決議。孔多塞在給拉普拉斯的第一個論文集 (即上述十三篇論文，1774 年出版) 所寫的序言中熱情地說：“巴黎科學院第一次接受了這樣年輕，並在這樣短的時期內對多種難題寫出重要論文的人”。由於拉普拉斯已有較高聲望，一開始就成爲副院士。

此後，拉普拉斯眞正開始他的科學研究生涯，逐步成爲當時數理學科中貢獻最大且在科學史上最負盛名的科學家之一。他是天體力學的主要奠基者，是首先在科學上提出宇宙在演化的學者，是分析概率論的創始人，是應用數學的先驅，也是當時最著名的物理學家。他的一生大致可分爲四個時期：二十九歲以前的青少年時期，初露鋒芒，受到科學界的重視；二十九到四十歲爲鼎盛時期，完成多數重大成果；四十到五十六歲爲革命變革時期，主要進行科學組織和教育工作，仍繼續研究和整理成果；五十六歲以後爲晚年時期，主要總結成果和做組織管理工作。

拉普拉斯一生工作的主要單位是科學院。1773 年被接受進行的科學院叫 “在巴黎的皇家科學院”，簡稱巴黎科學院。當時在歐洲很多國家的首都都設有皇家科學院，故巴黎科學院就是法國皇家科學院，是 1666 年路易十四時代建立的。1793 年 8 月 8 日，當時的國民議會發出解散皇家科學院的公告，拉普拉斯離開巴黎下鄉。1795 年，共和國政府建立了全國統一的學術文化機構，即歷史上著名的法蘭西研究院，下面劃分爲五個學院或分院。其中研究自然科學的分院就叫法國科學院或法蘭西研究院的科學分院。此外，法蘭西研究院中還有語文學院、倫理學和政治學院、藝術學院、金石學和文學院。1816 年，路易十八又把其中的科學院改名爲法蘭西科學院。

拉普拉斯在 1773 年進入巴黎科學院後，實現了自己的願望，全力對數學、力學和天文學進行研究。不僅得到科學院內學者們的支持和鼓勵，還同在柏林的拉格朗日經常通信，討論學術問

題。到 1780 年前後，拉普拉斯的學術地位已得到公認，受到國內外學術界和政府部門的重視。

1784 年，當時的路易十六政府任命拉普拉斯三個重要職務：皇家炮兵學校考官、巴黎科學院特別委員會 (就前幾年的市政問題進行審查，提出勸告) 負責人、巴黎市立大醫院的審查委員會成員。1785 年 4 月，當勒魯瓦 (Le Roy) 院士去世而出現空缺時，拉普拉斯被選爲巴黎科學院院士。1786 年，拉普拉斯簽署特別委員會決定：科學院每年出版人口資料，作爲國家制訂政策的參考。

1788 年 5 月 15 日，拉普拉斯同比他小二十歲的馬里耶－夏洛特 (Marie-Charlotte) 結婚。她是貝桑松 (Besançon) 家族的女兒。婚後生一子一女，在 1789 年生的兒子取名查爾斯－埃米爾 (Charles-Émile)，他後來在軍隊工作成爲將軍，於 1874 年去世。女兒名蘇菲－蘇珊 (Sophie-Suzanne)，後與波特 (Portes) 侯爵結婚，1813 年死於難產，遺女後來同科爾貝爾－夏邦內 (Colbert-Chabannais) 伯爵結婚。這一支的後代爲了紀念祖先，改姓爲科爾貝爾－拉普拉斯 (Colbert-Laplace)。

1789 年 7 月 14 日，法國資產階級革命開始，法國政局動盪。因巴黎科學院爲皇家機構，革命政府於秋天就提出要求，科學院在機構和程序上都要實現自由原則，與制憲會議等級一致。並任命拉普拉斯組織一個委員會，按此方針提出建議。拉普拉斯會同孔多塞、博爾達 (Borda) 等人一起商量，於 1790 年 3 月 1 日提出了相應建議上交。其實拉普拉斯在革命前夕，即 7 月 4 日就提出科學院的 “更新” 建議，要求正式研究人員具有基本的數學物理知識 (參看 1789 年 7 月 4 日科學院備忘錄)。但在 7 月 8 日的決議中，只通過要求正式研究人員了解數學、物理學的課題就行了。當然拉普拉斯這個建議並不符合制憲會議方針，因而未包含在 1790 年 3 月的建議中。

1789 年 11 月 2 日，革命政府推選拉普拉斯等十五位院士組成一個 “技術與職業咨詢局”，取代原由拉普拉斯領導的特別委員會，作爲政府的一般專利和技術政策的咨詢機構。拉普拉斯積極主動參加活動，首先決定繼續出版人口資料；然後爲十進位的度量衡公制系統的實現而努力。

革命前不久，巴黎科學院在 1789 年 6 月就成立了以拉普拉斯和 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier) 爲首的專門小組，研究制定公制系統。由於早有準備，故咨詢局剛成立他們就在 1790 年 4 月 14 日提出了長度單位和容積、重量單位間的關係。1790 年 5 月 8 日的制憲大會上通過了公制法。1791 年 3 月 25 日，巴黎科學院任命了由院士拉普拉斯、拉格朗日 (1787 年從普魯士到巴黎)、蒙日 (Monge)、博爾達、孔多塞等人組成的 “度量衡委員會”，最後確定了長度單位。他們根據從法國敦克爾克到西班牙巴塞羅那的大地測量結果，正式決定長度單位 “米” 爲巴黎子午線全長的四千萬分之一。這個長度單位比過去定義的秒擺 (即擺動週期爲 2 秒的單擺) 長度要更科學可靠，因秒擺長度隨時間和地點不同而有改變。然後用十進制確定更小和更大的長度單位的平方、立方來定義；重量單位用相應單位體積的水重來定義。這就是至今使用的世界公制系統。

1793 年 8 月 8 日，當時國民議會在羅伯斯比爾的雅各賓派控制下，發出解散巴黎科學院的公告。拉普拉斯、拉瓦錫、博爾達、庫倫 (Coulomb) 等人都被解職。拉普拉斯早得到消息，於解職前就攜全家逃離巴黎，同妻子和兩子女一起搬到巴黎東南 30 英里處的默倫。到 1794 年 7 月 27 日 (熱月 9 日) 政變，羅伯斯比爾的雅各賓派下台以後才回到巴黎。共和國政府在 1795 年 6 月 25 日通過法律條文，決定組建法國經度局，統一領導全國的天文和航海工作，包括原巴黎科學院的度量衡委員會和巴黎天文台等單位。拉普拉斯是經度局的領導成員。1795 年 12 月 27 日，在法

蘭西研究院中的科學院組建會上， 拉普拉斯被任命爲副院長， 並於 1796 年 4 月 6 日被選爲院長。 同時爲法蘭西研究院院士和科學院院士。

拉普拉斯在此時期內對法國的高等教育也有重大貢獻。 1795 年初成立的高等師範學校，9 月 1 日重建改名的巴黎綜合工科學校是法國的最高學府。 他是這兩所學校的第一批教授和組織者。 他強調學校要系統地教授數學和物理學知識， 並要嚴格挑選學生。 十九世紀前半期最著名的數學家、 物理學家如 A.M. 安培 (Ampére)、 S. 卡諾 (Carnot)、 A.J. 菲涅爾 (Fresnel)、 É.L. 馬呂 (Malus) 和 S.-D 泊松 (Poisson) 等都畢業於這兩所學校。 在 1796 年出版的歷史性名著《宇宙體系論》(*Exposition du système du monde*)， 就是他在這些學校的講稿。

拉普拉斯在這幾年內還很不情願地參加了所謂 “法蘭西共和曆法” 的制訂工作。 以 1793 年爲共和曆 I 年， 以熱、 霧、 霜等爲月名。 在他再三建議下， 直到拿破侖帝國的 1806 年初才恢復使用格里曆。

拿破侖對拉普拉斯非常重視， 他們早在 1785 年 9 月就認識。當時拉普拉斯是軍事學校考官， 而青年拿破侖是該校炮兵學員，參加拉普拉斯主持的數學考試。 1799 年 10 月， 即霧月政變 (11 月 9 日) 前三週， 拉普拉斯把新出版的《天體力學》(*Mécanique céléste*) 第一、 二卷送給拿破侖。 拿破侖高興地說：“近六個月內較空， 一定拜讀”。 還邀請他們夫婦第二天去吃飯。 霧月政變後， 拿破侖成爲最高執政官， 很快就提名拉普拉斯擔任內政部長。 當時內政部的職責是處理除經濟和警務以外的全部國內事務。 拉普拉斯在任期間， 曾於 1799 年 12 月 16 日發佈重組巴黎綜合工科學校以及教育改革的法令。 把重組後的巴黎綜合工科學校的學制改爲二年， 以學基礎課爲主。 畢業後再上專業性工科學校， 如巴黎礦業學校、 巴黎橋樑公路學校、 炮兵工程學校等。

在擔任內政部長六週後，拿破侖認爲他不適宜任行政官員，任命自己的弟弟呂西安 (Lucien) 任內政部長。又提名拉普拉斯爲上議院 (元老院) 議員，並於 1803 年當選爲議長。給予拉普拉斯最高薪金，年收超過十萬法郎。拿破侖稱帝後，1805 年又提名拉普拉斯爲勳級會榮譽軍團成員，這是拿破侖在 1802 年成立的表彰重大功勳者的榮譽團體。雖然拿破侖如此重視拉普拉斯，但他們之間的私人交往很少，因爲拉普拉斯主要精力仍在學術工作上。在動盪的革命變革時期，儘管他參加了大量社會活動和組織工作，但仍堅持研究和整理成果。攻下巴士底獄後第四天，拉普拉斯就在科學內宣讀他關於黃道傾角變化的論文，還在 1805 年前完成了歷史性名著《宇宙體系論》和《天體力學》前四卷以及大量論文。

1806 年，拿破侖帝國授予拉普拉斯伯爵銜。他在巴黎南郊阿爾克伊村購買土地，與物理學家 C.L. 貝托萊 (Berthollet) 爲鄰。以他們兩人爲核心，在那裡聚集了一批年輕的物理學家，形成一個沙龍，被大家非正式地稱爲阿爾克伊協會。拉普拉斯晚年的天文學和物理學研究工作，都同此協會有關。

1810 年以後，拉普拉斯又重新研究概率論，並且在 1812 年出版了歷史性的名著《概率分析理論》(*Theorie analytique des probabilités*)。還提出了一些有關應用數學的方法。

1813 年，拿破侖又授予拉普拉斯留尼汪勳章。拿破侖下台後，1815 年前後有不少人指責拉普拉斯在政治上無原則，過去討好拿破侖，現在又支持新王朝。實際上，拉普拉斯雖然對拿破侖也很尊重，但對他稱帝後的戰爭政策並不支持。1814 年，他在上議院投票時支持波旁 (Bourbon) 王朝推翻拿破侖帝國。正因如此，在拿破侖復辟的百日期間，他被迫離開巴黎。1816 年，路易十八把法蘭西研究院中的科學院改名爲法蘭西科學院，拉普拉斯被選爲院士，次年任院長。1817 年，路易十八還晉封拉普拉斯爲侯爵。

阿爾伊協會是拉普拉斯的物理學活動中心， 到 1809 年達到高峰， 世人稱之爲拉普拉斯學派。 那裡集中了當時物理學界的精英， 從事熱學、 電學、 磁學、 流體力學和光學方面的研究。 拉普拉斯在法蘭西研究院中設立了 “競爭獎”， 1816 年以前， 得獎者都是拉普拉斯學派的成員， 論文中都有拉普拉斯的觀點。 第一次打破這種壟斷的是女物理學家 S. 熱爾曼 (Germain)， 她在 1816 年 1 月提出的 “彈性表面理論” 論文獲獎， 是對拉普拉斯學派的第一次挑戰。 拉普拉斯的弟子菲涅爾在 1819 年發表的論文 “光的折射理論” 獲競爭獎， 支持了光的波動理論。 而拉普拉斯是終生堅持光的微粒理論的。 到 1820 年， 拉普拉斯學派的骨幹 J.B. 畢奧 (Biot) 也發表支持波動理論的論文。 自此以後， 拉普拉斯學派在物理學界的影響逐漸由他的弟子們代表， 而他本人已達七十高齡， 雖能堅持工作， 但只能做些天體力學的補充性研究， 直到去世爲止。

根據著名數學家 J. 傅里葉 (Fourier) 在 1829 年所撰紀念文章中的描述 (見文 [36])， 拉普拉斯的記憶力一直到垂老時都非常好， 雖然飲食很少， 但不衰弱。 拉普拉斯在 1827 年 3 月 5 日去世， 先葬於巴黎附近的大拉謝斯， 後在 1878 年遷回老家博蒙昂諾日， 那時他的後裔已搬走了。 現存主要畫像爲 1803 年任上議院議長時的官方像， 由畫家 P.-N. 蓋蘭 (Guérin) 所繪製。 由於他的學術聲望， 晚年還擔任倫敦和格丁根皇家學會會員； 俄國、 丹麥、 瑞士、 普魯士、 義大利等國的科學院院士。

各個時期的重要研究成果

拉普拉斯一生共研究了一百多個課題， 大部分在前兩個時期完成； 後兩個時期還完成了歷史性名著《天體力學》等。

1. **青少年時期 (1778 年以前)** 　他在二十九歲以前寫出了六十多篇論文和報告， 涉及到當時的數學和天文學最新領域， 主要成果有：

(1) 有限差分方法　為了解決天體運動和概率論方面的數學問題， 他把無窮小的微分概念推廣到有限的差分； 從而建立了差分方程及其積分法。 他從第二篇論文 “關於有限差分的積分學的某用途”(*Sur quelques usages du calcul intégrale appliqué aux differences finies*) 開始， 得到一系列結果。 為了解出差分方程， 還建立了循環級數和多變量的循環迭代級數方法， 用它們可定出展開式係數。

(2) 發展概率論　在十七世紀由賭博產生的概率論， 經 J. 伯努利 (Bernoulli) 和棣莫弗 (de Moivre) 等人的工作， 到十八世紀七十年代已初具規模。 拉普拉斯從 1772 年開始對事件的概率及機會對策進行深入研究， 於 1774 年正式提出概率的嚴格定義：

如果每種情況都是等可能的， 則一個事件的概率等於有利情況的數目除以所有可能情況的數目。

這實質上就是概率的古典定義， 由此使概率論向公理化和公式化方向發展。 此外， 他還提出計算某些特殊事件概率的分析公式， 為以後建立 “分析概率論” 打下了基礎。 在此時期內提出的各種平均值的定義和概念， 不僅在天文學中得到應用， 也為統計學和後來 C.F. 高斯 (Gauss) 建立 “最小二乘法” 創造了條件。

(3) 萬有引力定律　牛頓是萬有引定律的發現者， 但他只討論了質點和密度為球狀對稱的天體之間的吸引。 拉普拉斯經過多次研究天體運動的具體情況後， 逐漸對萬有引力加深理解， 於 1776 年提出 “萬有引力原理” (見原始文獻 [1])， 可歸納為四條： 第一， 吸引力與質量成正比， 與距離平方成反比； 第二， 一個物體的引力是它各部分引力的合力； 第三， 引力是瞬時傳播的 (即速度為無窮大)； 第四， 物體在靜止時和在運動時， 引力作用相同。

第四條原理加快了用萬有引力定律研究天體運動的進展。 特別是第二條， 可用於研究各種形狀天體的吸引問題， 為後來天體力

學的奠基、 位勢理論的建立以及地球形狀和潮汐理論的發展打下了基礎。 第三條是拉普拉斯根據自己的引力爲 “微粒” 的觀點， 由月球平均運動的加速現象估計出來的。 從當時的觀測資料分析， 月球平均約二千年加速一度， 不能用天體之間的引力來解釋。 有人認爲這是由於引力傳播速度爲有限所產生的結果。 拉普拉斯根據觀測到的月球加速數值， 具體計算出萬有引力傳播速度應爲光速的萬倍， 因而可認爲是無窮大。 當然， 從現代物理學觀點看來， 第三和第四條都有問題。 但對於太陽系這個局部空間中的慢速運動天體而言， 根據這些原理建立的運動理論， 與當時觀測結果符合得很好。

(4) *彗星分佈研究*　　結合對概率和萬有引力的討論， 拉普拉斯從 1776 年開始發表關於彗星軌跡分佈的論文 (見原始文獻 [2])。 其中根據當時 63 個已知軌跡的彗星， 統計出它們的軌跡同黃道面的傾角平均值爲 $46°16'$， 大大超過當時所知大行星和衛星的軌跡傾角。 拉普拉斯用統計方法試圖證明， 在太陽的引力範圍內， 隨機地拋出大量質點， 它們繞太陽的軌跡相對某固定平面的傾角平均值應接近 $45°$； 並試圖計算傾角在某兩個界限內的概率。 儘管具體結果無應用價值， 但所用的統計方法和概率算法都有意義。

(5) *偏微分方程的解法*　　在研究天體運動時， 拉普拉斯於 1777 年提出一種解線性偏微分方程的一般方法 (見原始文獻 [3])， 即以後文中所說的級聯法。 拉普拉斯證明， 一般二階偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x^2}+\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\beta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+r\frac{\partial z}{\partial x}+\delta\frac{\partial z}{\partial y}+\lambda z+T=0 \tag{1}$$

其中因變量 $z = z(x, y)$ 及 α、β、γ、δ、λ、T 均爲自變量 x、y 的函數；可找到變換使 x、y 變爲新變量 ω、θ 後，相應的 (1) 式能簡化爲

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\omega\partial\theta}+m\frac{\partial z}{\partial\omega}+n\frac{\partial z}{\partial\theta}+lz+T=0 \tag{2}$$

其中 m、n、l、T 爲 ω、θ 的函數。拉普拉斯還給出了求出方程 (2) 的全積分和奇積分的方法。

(6) 常數變易法　　爲了討論大行星運動中某些軌跡根數的長期變化，拉普拉斯在 1774 − 1778 年間寫出了一系列論文 (見原始文獻 [4 − 6])，與拉格朗日相互獨立地建立了常數變易法。開始主要用作行星運動方程的近似解法，後來逐漸成爲常微分方程的一種通用解法。

(7) 地球形狀和潮汐理論　　在這段時期內，拉普拉斯還廣泛地研究了有關地球物理學的各種課題，包括大地測量學、流體靜力學中均勻流體自轉時的平衡形狀、潮汐、地面重力公式等。

拉普拉斯根據十八世紀前半期的多次大地測量結果，試圖較準確地定出地面子午線方程。但因地面高低不平，很難實現。1776 年，他在近似地假定地球是均勻旋轉橢球時，給出表面各處的重力公式爲：

$$P = P'\left(1 + \frac{5}{4}\alpha_m \cos^2\theta\right) \tag{3}$$

其中 P' 爲赤道上的重力大小，α_m 爲所討論地點的離心與引力之比，θ 爲該處的餘緯度 (見原始文獻 [7])。後在 1778 年又作了改進，增加了一些改正項 (見原始文獻 [8])。

拉普拉斯在大地測量方面的貢獻還在於提出 “方位角” 的嚴密概念。爲加強大地網、控制三角鎖網的方位，使之具有同一等級的誤差，並消除誤差傳播。在大地點上對天文方位角作垂線偏差影響歸算後得出：

$$A_m = \alpha_m - (\lambda - L)\sin\varphi$$

A_m 爲大地方位角，α_m 爲天文方位角，λ 爲天文經度，φ 爲天文緯度；L 爲大地經度，該公式爲拉普拉斯導得。測有天文經、緯度和方向角的大地點稱拉普拉斯點；由此而算出的大地方位角稱爲拉普拉斯方位角。

在同時完成的另外幾篇論文中 (見原始文獻 [9、10])，拉普

拉斯討論了潮汐和海流問題以及大氣潮，都是開創性課題；此外，他還把潮汐同地軸在空間中的歲差和章動結合起來討論。

在拉普拉斯的青少年時期中，眞正做研究工作的時間只有八年 (1770 − 1778)，但研究的課題涉及到天文學和數學的前沿領域，得到了大量成果。不僅提高了他在科學界的聲望，同時也爲下一時期的重大貢獻作了準備。

2. **鼎盛時期** (1778 − 1789)　二十九歲以後的拉普拉斯已是一個成熟的科學家，進入他科學創作的鼎盛時期，具有重大貢獻的研究成果爲：

(1) 拉普拉斯算子　此時期最初完成的兩篇論文中，一篇完善了微分方程近似解所用的常數變易法 (見原始方面 [11])；另一篇討論級數理論，是他在 1779 年 6 月在科學院提出的報告，於 1780 年正式發表 (見原始文獻 [12])，其中提出的微分算子，成爲後來十九世紀出現的 “運算微積” 萌芽。他推廣了拉格朗日的想法，即算子的正指數與微商的階數對應，負指數與積分的重數對應。拉普拉斯提出的算子形式爲：

$$\left\{\begin{array}{lcl} \Delta^n u & = & (e^{\alpha du/dx}-1)^n \\ \sum^n u & = & \dfrac{1}{(e^{\alpha du/dx}-1)^n} \end{array}\right. \tag{4}$$

對任一函數 $u=u(x)$，則有關係

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha^n \dfrac{d^n u}{dx^n} & = & \Delta^n u + s\Delta^{n+1}u + s'\Delta^{n+2}u + \cdots \\ \dfrac{1}{\alpha^n}\displaystyle\int^n u dx^n & = & \sum^n u + f\sum^{n-1} u + f'\sum^{n-2} u + \cdots \end{array}\right. \tag{5}$$

其中 s、s'、$\cdots$、f、f'、$\cdots$ 爲與 α 和函數無關的常數，可根據一些具體的函數 $u(x)$ 定出來。

(2) 概率和人口論　從 1780 年起，拉普拉斯進一步研究事件的概率和原因。特別對重複試驗事件的概率問題作了深入討

論， 並用於計算巴黎和倫敦的男孩和女孩的出生概率 (見原始文獻 [13])。

拉普拉斯先作一般討論。 根據以前若干年內的記錄， 設共出生 p 個男孩、 q 個女孩。 則過去生男孩的概率爲 $\dfrac{p}{p+q}$ ， 但今後怎樣? 他用 P 表示今後生男孩的可能性在界限

$$\frac{p}{p+q}+\theta\text{、}\ \frac{p}{p+q}-\theta$$

之間， 其中 θ 爲非常小的量。 拉普拉斯推出用定積分計算 P 值的公式， 在 p、 q 趨於無窮時， P 趨於 1。 此結果與伯努利的大數定律是一致的。

他根據巴黎和倫敦的具體人口資料算出， 巴黎每年生男孩的概率比生女孩大 $\dfrac{1}{259}$ ， 而倫敦則大 $\dfrac{1}{12416}$ 。

1786 年以後， 拉普拉斯進一步研究人口統計學。 他從 1771 − 1784 年的法國人口資料進行統計研究後表明， 人口的年出生平均數， 乘上某個因子後可得近似的人口總數 (見原始文獻 [14])。 抽樣調查證明此因子爲 26 。

(3) *生成函數*　拉普拉斯在研究概率論和級數理論過程中， 要用到一些特殊函數族 $y_n(x)$， 而且需要 n 很大時的函數值。 他在 1782 年的論文中 (見原始文獻 [15])， 正式提出生成函數的想法：

“若 $y_n(x)$ 爲 x 的函數族， 而函數 $u(x,t)$ 爲無窮級數

$$y_0(x)+y_1(x)t+y_2(x)t^2+\cdots+y_n(x)t^n+\cdots$$

的和， 則我稱 $u(x,t)$ 爲函數族 $y_n(x)$ 的生成函數。”

生成函數的提出對特殊函數的發展起了非常重要的作用， 由此容易求出特殊函數的遞推公式和微分關係。

(4) *拉普拉斯軌跡計算方法*　行星和彗星繞太陽運動的軌跡， 要由六個積分常數確定。 爲方便起見， 常取空間圓錐曲線軌跡的 6 個軌跡根數： 半主徑 a、 偏心率 e、 軌跡面對黃道面的傾角

i、軌跡對黃道面升交點 (由南向北) 黃經 Ω、軌跡近日點角距 ω 以及通過近日點的時刻 t_0 作爲軌跡根數。所謂軌跡計算方法，就是用地面上對行星 (或彗星) 的位置觀測資料，算出這 6 個軌跡根數。從理論上說，用三個時刻的 6 個球面坐標的觀測資料，可以算出 6 個軌跡根數。但因地球也在運動，計算相當困難。自牛頓以來的一百年間，只有一些很粗略的方法。拉普拉斯早期討論彗星軌跡傾角分佈時，是靠助手用彗星的大量觀測資料繪出視運動曲線，再從經驗定出軌跡傾角。由於彗星的軌跡變化快，經常要重新計算。

1784 年，拉普拉斯正式提出了用三個時刻的六個觀測資料計算軌跡根數的方法 (見原始文獻 [16])。基本原理是根據運動方程和幾何關係，利用迭代法算出慧星在第二個觀測時刻 t_2 時的坐標 (x_2, y_2, z_2) 和速度分量 (x_2', y_2', z_2')。再用它們容易算出 6 個軌跡根數。

他的這種方法雖然存在缺點，但經過很多改進後，至今在人造衛星軌跡計算中還在應用，現在仍然稱爲 “拉普拉斯軌跡計算方法”。

(5) 橢球形天體的引力，拉普拉斯方程　由於大行星的形狀都接近於橢球體，拉普拉斯從 1784 年起，研究橢球狀天體對其外一質點的引力問題，並開始發表論文 (見原始文獻 [17])。文中用積分定義出一個函數 V：

$$V(a,b,c) = \int \frac{dM}{\sqrt{(a-x')^2+(b-y')^2+(c-z')^2}} \tag{6}$$

其中 (a,b,c) 爲天體外所討論質點的坐標，(x',y',z') 爲天體內任一質點的坐標，dM 爲此處的體積元質量；積分符號表示對整個天體的體積積分，則天體對其外一質點的引力分量與偏導數

$$A = -\frac{\partial V}{\partial a}\text{、}B = -\frac{\partial V}{\partial b}\text{、}C = -\frac{\partial V}{\partial c} \tag{7}$$

成比例。 若行星表面爲橢球， 滿足方程

$$x^2 + my^2 + nz^2 = k^2 \text{，} (m > 0 \text{、} n > 0) \tag{8}$$

則拉普拉斯得出定積分形式的結果：

$$A = \frac{2a\pi}{\sqrt{mn}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(1 + \frac{1-m}{m}x^2\right) + \left(1 + \frac{1-n}{n}x^2\right)}} \tag{9}$$

B 、 C 有相似的式子。

拉普拉斯還證明：“共焦橢球體對外面一質點的引力與橢球體質量成正比”。 以後常稱之爲 “拉普拉斯定理”。

由 (6) 式定義的函數， 後來乘上一些常數因子， 稱爲天體對其外一質點引力的勢函數。 拉普拉斯用勒讓德多項式對它進行展開， 具體討論勢函數的性質， 成爲位勢理論的先驅。 他還導得將橢球體的位理論變爲球層位理論的定理， 也稱拉普拉斯定理。

拉普拉斯在 1785 年的另一篇論文 (見原始文獻 [18]) 中， 討論橢球狀行星的引力時， 採用球坐標 (r, ω, θ) 表示勢函數 V ：

$$V(r, \omega, \theta) = \int \frac{R^2 \sin\theta' dR d\omega' d\theta'}{\sqrt{\begin{aligned} &r^2 - 2rR[\cos\theta\cos\theta' \\ &\qquad + \sin\theta\sin\theta'\cos(\omega - \omega')] + R^2 \end{aligned}}} \tag{10}$$

其中 (r, ω, θ) 、 (R, ω', θ') 分別表示行星外質點及行星內質點的球坐標， 積分是對整個行星體進行的。 若令 $\mu = \cos\theta$， 則可求出關係：

$$\frac{\partial\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right]}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2} + r\frac{\partial^2(rV)}{\partial\theta^2} = 0 \tag{11}$$

此式變換成直角坐標後就是現在的拉普拉斯方程。 但他當時未作此變換， 只用此式對 V 的展開式作研究。 直到 1789 年， 他在討論

土星環的引力勢時，才第一次用直角坐標得出著名的拉普拉斯方程 (見原始文獻 [19])：

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{12}$$

此方程對以後的數學、物理學的發展有巨大作用。二階微分算子 Δ 又稱爲 “拉普拉斯調和算子”。

(6) 行星軌跡的長期變化，太陽系穩定的拉普拉斯－拉格朗日定理　行星的軌跡根數，特別是橢圓軌跡的半長徑 a 和偏心率 e 是否有長期變化 (即隨著時間無限增大或無限減小)，是太陽系動力穩定性的基本課題，也是牛頓以後天文學家們所從事的主要課題之一。拉普拉斯在中晚年的天文學研究工作，大部分與此題有關。

早在 1776 年，拉普拉斯在很簡略的討論中，就認爲 “行星軌跡半長徑 a 沒有長期變化” (見原始文獻 [1])。有些文獻稱此結果爲 “拉普拉斯定理”。但因過於粗略，意義不大。1783 年，他看到拉格朗日的論文 “行星運動的長期變化” (參看 *Oeauvres de Lagrange*，V，381－414) 後，重新對此問題進行系統研究，寫出了一系列論文。他把 a、e 同軌跡傾角一起討論，主要結果在 1784 年發表 (見原始文獻 [20])，後人稱此結果爲拉普拉斯－拉格朗日定理，共有兩個：

定理一：若把每個行星的質量 m_i 乘上軌跡半長徑的平方根 $\sqrt{a_i}$，再乘上偏心率平方 e_i^2，則所有行星的這些乘積的總和去掉週期變化後爲常數。用公式可表爲

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \sqrt{a_i}\, e_i^2 = \text{常數} + \text{週期項} \tag{13}$$

其中 n 爲行星總數。

定理二：若把每個行星質量乘軌跡半長徑平方根，再乘上軌跡傾角正切的平方 $\tan^2 i$，則所有行星的這些乘積的總和去掉週期變

化後爲常數， 亦即

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\sqrt{a_j}\,\tan^2 i_j = \text{常數} + \text{週期項} \tag{14}$$

雖然這些結果只是在一階攝動下求出的， 有局限性， 以後有很大改變， 但未得出相反的結論； 故此定理在討論太陽系穩定性研究中仍有意義。

(7) *木星和土星的運動* 因木星和土星是太陽系中質量最大， 又很靠近的行星， 相互攝動很大。 它們的運動理論是天文學中長期未解決的難題。 拉普拉斯從青年時期就開始研究， 但到 1786 年才得到重要結果。

拉普拉斯首先從木星和土星運動的攝動項中， 分離出隨時間無限增減的 “長期項” 和只有週期變化的 “週期項”。 而且還找出振幅大， 週期很長的 “長週期項”。 在 1788 年定出了這兩個行星的黃經表達式中的長週期項爲 (見原始文獻 [21])：

$$\begin{cases} \text{木星} \quad : \quad 20'49''\sin(5n't-2nt+49°8'40'') \\ \text{土星} \quad : \quad -48'44'\sin(5n't-2nt+49°8'40'') \end{cases} \tag{15}$$

其中 n、 n' 爲木星和土星的平均角速度， t 爲時間。 加上這些項後， 可以很好解釋觀測現象。 同時， 他對攝動項的這種劃分， 促進了攝動理論的發展。

另外， 他還對產生長週期項的原因進行了分析。 (15) 式中時間 t 的係數 $(5n'-2n)$ 是很小的量， 即木星、 土星的平均角速度 $\dfrac{n}{n'}$ 接近於簡單分數 $\dfrac{5}{2}$。 對時間 t 進行積分後， $(5n'-2n)$ 出現在分母上， 使振幅很大。 這些討論後來發展成爲 “共振理論”。

(8) *月球和衛星的運動* 月球運動也是天文學中的難題， 特別是月球平均角速度的加速現象。 以往提出的各種解釋如以太阻

尼、彗星作用、引力傳播速度有限等都失敗了。巴黎科學院爲此問題設立了獎金。拉普拉斯首先討論地球軌跡偏心率的變化對月球運動的影響，取得部分成功 (見原始文獻 [22])。所提出的方法後來成爲攝動理論的基礎。

其它行星的衛星，特別是自 1676 年丹麥的 O. 羅默 (Rϕmer) 測定光速後，木星的衛星運動也成爲各界重視的課題。拉格朗日因爲詳細討論了木星形狀、太陽引力、衛星間的相互影響而獲得巴黎科學院 1766 年度獎金 (參見 *Oeuvres de Lagrange*，VI，67 − 225)。拉普拉斯首先注意到了木星三個最亮衛星的軌跡共振現象。設 n_1、n_2、n_3 爲木衛一、木衛二和木衛三的平均角速度，則它們幾乎嚴格滿足關係：

$$n_1 + 2n_3 = 3n_2 \tag{16}$$

1787 年，拉普拉斯經詳細討論後得到了兩個重要結果 (見原始文獻 [20])：第一，在太陽和木星形狀以及衛星間的相互作用下 (16) 式仍幾乎嚴格成立；第二，量 $s = n_1 + 2n_3 - 3n_2$ 及 $V = st + 180°$ 只有微小的週期振動，即木衛一、木衛二和木衛三的軌跡共振狀態是鞏固的。

這兩個結果在有些文獻中稱爲 (木衛運動的) 拉普拉斯定理。所提出的方法對其它天體的軌跡共振研究也適用。

(9) 物理學問題　從 1777 年起，拉普拉斯開始同著名化學家 A.L. 拉瓦錫 (Lavoisier) 等合作研究熱學問題。在 1781 年研究的毛細作用，玻璃和水銀等物質的熱膨脹率等所得的結果，已用於設計氣壓計 (見原始文獻 [23])。1783 年他們計劃研究四個熱學課題，即熱的性質和熱量、某些物質的比熱測定以及化學反應中的熱學問題、化學物理的理論建立、在燃燒和呼吸方面的應用。

在前兩個課題中，拉普拉斯建立了熱的力學理論，把熱量同物體 (或微粒) 的動能聯繫起來 (見原始文獻 [24])；定義出比熱，並

給出兩種可混合物質的比熱關係：

$$\frac{q}{q'} = \frac{m'(b-a')}{m(a-b)} \tag{17}$$

其中 q、q' 爲兩種物質的比熱、m、m' 爲它們的質量、a、a' 爲它們在混合前的溫度、b 爲混合後的溫度。拉瓦錫根據這些結果造出了兩種溫度計。

對後兩個課題，拉普拉斯從理論上作了很多嘗試，但因熱力學尙未建立，他的結果僅有參考價值。

此外，拉普拉斯還研究了蒸發現象；還在 1782 年後同 A. 伏打 (Volta) 合作研究大氣中由水汽帶入電荷的理論。

3. **革命變革時期** (1789－1805)　儘管社會活動和整理著作花費大量時間，但他在此時期內仍堅持研究，有重要成果的課題爲：

(1) *黃道傾角的變化，拉普拉斯不變平面*　拉普拉斯認爲黃道相對固體平面是在變化的，且使得黃道同赤道的交角在不斷減小。原因是其它行星對地球的引力作用，變化率和週期與地球的形狀無關。他首先用黃道傾角的變化值來改進歲差 (行星歲差的一部分)。

每個行星的軌跡平面都在不斷變化。拉普拉斯首先提出，太陽系內存在一個通過太陽中心的平面；當所有行星的軌跡投影到此平面上，則行星運動的動量矩總和不變 (見原始文獻)。這個平面後來稱爲“拉普拉斯不變平面”。

(2) *地球形狀和大地測量*　爲了確定公制中的長度單位，並驗證他提出的地球爲橢球體的結論；除了利用他人結果外，拉普拉斯還親自組織參加了大地測量工作。爲了比較，還同時用秒擺在各地進行重力測量。1792 年，拉普拉斯派出兩個測量隊，由他的兩個主要助手帶隊並作計算。根據測量結果，拉普拉斯改進了地面重力表達式，還在處理資料過程中改善了誤差理論，對統計學有重要貢獻。

(3) 木衛運動　1790 年以後，拉普拉斯又對木衛運動進行深入研究，完成了一系列論文。其中主要的一篇題目爲 “木衛理論” (*Theories des satellites de Jupiter*) (見原始文獻 [26])，給出了四個大衛星的完整攝動理論，並可從理論給出運動表。還具體地給出了木星形狀對衛星運動的影響。然後根據觀測資料反過來計算木星形狀扁率和四個衛星的質量 (見原始文獻 [27])。下面給出第一次由拉普拉斯算出的結果：

木星形狀扁率：$\frac{5}{72}$，

木衛質量 (木星質量 = 1)：

$$\begin{cases} \text{木衛一} & : & 0.184113 \times 10^{-4}，(0.468943 \times 10^{-4}) \\ \text{木衛二} & : & 0.258325 \times 10^{-4}，(0.2563 \times 10^{-4}) \\ \text{木衛三} & : & 0.865185 \times 10^{-4}，(0.7842 \times 10^{-4}) \\ \text{木衛四} & : & 0.5590808 \times 10^{-4}，(0.5605 \times 10^{-4}) \end{cases}$$

與括號內現代結果比較，數量級相同，而木衛二和木衛四結果的誤差不到 $\frac{1}{100}$。

他還根據木衛蝕 (木衛近入木星影中) 的計算和觀測結果，算出週年光行差値爲 $20''.5$，與光行差發現者 J. 布拉得雷 (Bradley) 的結果一樣。拉普拉斯由此認爲至少在地球軌跡範圍內，光速是均匀的，並堅持光的 “微粒說”。

(4) 潮汐　1790 年以後，因航海的實際需要，拉普拉斯又重新研究潮汐理論，並進行實測。法國布雷斯特港從十八世紀初就有潮汐觀測記錄，拉普拉斯對高潮的時刻和高度進行了統計分析，發現高潮時刻分佈中有三個週期，分別爲 1 年、1 日和半日 (見原始文獻 [28])。後又對半日週期進行了詳盡討論，發現潮汐週期中的 “日” 要比 24 小時長些，應爲太陰日。他還從理論上解釋了這種週期的原因。

(5) 聲速　　拉普拉斯同助手 J.-B. 畢奧從 1801 年起研究聲速問題。根據牛頓的公式有 $v=\sqrt{\frac{P}{\rho}}$，其中 P、ρ 爲介質的壓力和密度。但從實驗數據知，此式算出的空氣中聲速有 10% 的偏差。拉普拉斯猜想是同溫度有關，牛頓公式要在恆溫時才成立。1802 年，畢奧考慮了空氣的密度和壓力的溫度效應，認爲 P 和 ρ 隨溫度變化的速率不同，牛頓公式應改爲 (參看 *Journale de physique*，55，1802，173－182)：

$$v=\sqrt{\frac{P}{\rho}(1+k)}=\sqrt{r\frac{P}{\rho}} \tag{18}$$

其中 $(1+k)$ 或 r 稱爲畢奧常數。當時尚未證明，但與實驗符合而得到公認。二十年後，拉普拉斯才給出了較滿意的證明 (見原始文獻 [29])。

4. **晚年時期** (1805－1827)　　五十六歲以後的拉普拉斯仍堅持科學研究和整理成果工作，這裡著重介紹他在下面兩個領域中的貢獻。

(1) 拉普拉斯變換　　這是拉普拉斯在數學中的重要貢獻之一，現在已成爲解常微分方程、偏微分方程、積分方程和差分方程的一種基本方法。它有一個發展過程，按現在的定義，對滿足一定條件的複値實函數 $f(t)$ (自變量 t 爲實數，但函數値可爲複數)，經拉普拉斯變換後的函數 $L(s)$ 爲

$$L(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{19}$$

其中 s 爲複數，但實部爲正。它的逆變換爲

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C L(s)e^{st}ds \tag{20}$$

其中 C 爲 s 平面上的某個閉路。

早在 1744 年， L. 歐拉 (Euler) 就設想用積分變換

$$z = \int X(x) e^{ax} dx \tag{21}$$

來表示微分方程的一種形式解 (參看歐拉全集即 *Opera Omnia serie I*， XXII， 150 − 161)。 到 1769 年， 又提出另一形式

$$z = \int X(x) x^{\lambda} dx \tag{22}$$

但都未進一步討論。 拉格朗日在求觀測資料的平均值過程中， 於 1773 年在估計誤差處於兩個界限中的概率時， 引出了積分形式

$$\int X(x) e^{-ax} a^{x} dx \tag{23}$$

其中 $X(x)$ 爲有理函數， 可以表示爲無窮級數 (參看 *Oeuvres de Lagrange*， II， 171 − 234)。 這種積分形式對拉普拉斯啓發很大。 他自己第一次使用這種形式的積分是在 1782 年 (見原始文獻 [16])， 更明確提出這樣變換是在 1785 年討論函數族中， 指標很大的函數近似值時， 採用了線性差分方程

$$S(s) = \sum_{r} A_r(s) \Delta^r y(s) \tag{24}$$

其中 s 爲實變量 (見原始文獻 [30])。 文用引用了兩種變換：

$$y(s) = \int x^s \phi(x) dx \tag{25}$$

和

$$y(s) = \int e^{-sx} \phi(x) dx \tag{26}$$

(25) 式在 s 爲複數時， 發展成爲現在的梅林變換， 而 (26) 式就接近於拉普拉斯變換 (19) 式。 拉普拉斯用 (26) 式導出基本公式

$$\Delta^r y(s) = \int e^{-sx} (e^x - 1)^r \phi(x) dx \tag{27}$$

得到很多應用。

(26) 式就是拉普拉斯變換的原始形式。 經後來很多人的改進，特別是傅里葉、 A.-L. 柯西 (Cauchy)、 泊松等人的工作， 才逐漸出現 (19)、 (20) 式的現代拉普拉斯變換。 第一次較系統的研究者爲 N.H. 阿貝爾 (Abel)， 在 1839 年發表 (參看他的全集 *Oeuvres Complétes de Abel*， II， 77 − 88)。 複變函數的逆變換 (20) 式是由迪尼 (Dini) 在 1880 年給出的， 並用傅里葉分析給予說明。 至於 “拉普拉斯變換” 這個術語第一次在何處出現， 尚未查清。 有可能首先出現在 G. 布爾 (Boole) 的《微分方程論述》(*A treatise on differential equations*， Cambridge， 1865， 2nd edition) 的第十八章中。 但引起大家重視的是由於 H. 龐加萊 (Poincaré) 在他的《微分方程近似分析》(1885)(參看 *Oeuvres de Poincaré*， I， 226 − 289) 中的介紹。 但他在書中誤用爲 “巴塞耳變換”， 已在書末更正爲拉普拉斯變換。 有關現代拉普拉斯變換的全面理論的證明和應用， 是隨著二十世紀以來 “運算微積” 的發展而逐漸完善的。 由此也可看出， 拉普拉斯也是運算微積的先驅者之一。

(2) 短程力　拉普拉斯的物理學研究是按牛頓的傳統進行的， 只是更數學化， 1805 年以後的工作更是如此。 但物理學的特點是要在大量實驗基礎上建立理論， 而當時實驗條件差， 大量物理現象尚未發現， 故拉普拉斯的數學化在多數物理問題上並不成功。 因此不能說他是理論物理學的奠基人。 他的基本觀點是把引力看作一切物理現象 (包括化學現象) 的根源。 相距很遠的天體之間有引力， 叫 “長程力”， 是天體運動的根源； 地上各大小物體， 甚至分子之間也有引力， 即短程力。 他認爲光的折射、 毛細現象、 熱的產生以及化學反應， 都是短程力的結果。 這個觀點現在看來當然是錯的， 但在當時條件下也是很自然的。 拉普拉斯學派在前兩個課題上還是作出了有價值的結果。

他在天文學課題的研究中， 要用到天體的觀測資料， 它們都要

作大氣折射改正。拉普拉斯把光線在空氣中的折射作爲經度局的一個實用和理論課題。他和同事們從光的微粒理論出發，認爲光粒子與不同層次的大氣分子之間的引力有差異，產生光的折射。他們稱這種力爲 “折射力”，大小與 $(\mu^2 - 1)$ 成正比，μ 爲折射率。從光粒子受這種力作用的運動方程出發，解出光粒子的軌跡。後來又加上 “折射力與空氣密度成正比” 的假設，又建立了大氣密度的模型，得到較滿意的結果，從而導得大氣差的拉普拉斯公式。

$$R = \alpha_0(1 - \beta_0)\tan z_0 - \alpha_0\left(\beta_0 - \frac{\alpha_0}{2}\right)\tan^3 z_0$$

式中 $\alpha_0 = \mu - 1$、μ 爲大氣折射率、$\beta_0 = \dfrac{l_0}{r_0}$、$l_0$ 爲大氣高度、r_0 爲地球半徑；z_0 爲觀測天頂距。爲了進一步研究光的性質，他在 1806 年以後安排畢奧和 D.F.J. 阿拉戈 (Arago) 對光在不同氣體中的折射力進行實驗。他還認爲光粒子與不同氣體分子之間有不同的親和力 (Affinity)，類似於化學反應。1808 年，他把 “光的雙折射理論研究” 作爲一個競爭獎課題，1810 年由拉普拉斯學派的馬呂獲得。但無論微粒理論和 C. 惠更斯 (Huygens) 的波動理論都不能滿意地解釋雙折射現象。英國人 W.H. 沃拉斯頓 (Wollaston) 的實驗傳入法國後，支持波動理論，用正常光線 (球面波) 和異常光線 (橢球波) 能解釋雙折射現象。拉普拉斯仍武斷地認爲波動理論不利於解釋雙折射。而且還不讓刊登馬呂在 1808 年 12 月發現的偏振實驗。後來經過拉普拉斯學派內很多人的實驗和理論工作，到 1819 年以後，學派內都支持波動理論。

毛細現象是牛頓以來未解決的課題。A.C. 克萊羅 (Clairaut) 等曾在 1765 年提出用引力與距離四次方成反比，才能解釋液體在毛細血管中的上升現象。拉普拉斯在 1805 年用短程力觀點來研究，建立液體表面在很窄的管中受力變化的微分方程，找出平衡狀態解。得出了液體表面在毛細管內上升高度與管直徑成反比

的結論， 大體符合實驗結果。 他還求出液體表面是凸、 凹的條件。 1819 年， 他考慮熱效應對毛細現象的影響。 此問題後來由他的學生泊松在 1831 年較好地解決， 其中考慮了液體表面與管壁接近處的密度變化。

除上述兩方面工作外， 拉普拉斯在最小二乘法中的貢獻也值得一提。 他在早年就對大量觀測資料的各種平均值有深入研究， 而在 1810 年根據中心極限定理用最小二乘法導出求一系列觀測值的平均值的公式 (見原始文獻 [31])。 可是高斯已在 1809 年從正態分佈分析中導出最小二乘法。 他們是獨立進行的。

主要代表作評述

拉普拉斯一生發表了大量數學、 天文學和物理學著作， 計有論文和記錄在案的報告共 276 篇， 專著四千多頁， 以及大量的學術通信。 獲得重要成果的課題和主要結果已在上面介紹， 下面著重對他在科學史上有重大影響的三部代表作《天體力學》(*Mécanique céleste*)《宇宙體系論》(*Exposition du systéme du monde*) 和《概率分析理論》(*Théorie analytique des probabilités*) 進行評述。

1. **經典天體力學的主要代表作《天體力學》** 古老的天文學幾千年來都在研究天體在天球上的視運動規律， 直到牛頓提出萬有引力定律和運動三大定律後， 才認識到天體的眞運動。 天文學從研究天體的視運動規律發展到研究眞運動， 是一次重大的質的飛躍。 1687 年牛頓正式發表歷史性名著《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 是這次飛躍的起點， 也是天文學的新分支 “天體力學” 誕生之期。 但是這次飛躍的完成， 也就是經典天體力學的建成， 經過了一百年中很多的人努力， 特別是當時的主要數學和力學家歐拉、 達朗貝爾、 拉格朗日、 克萊羅等人的傑出貢獻， 最後由拉普拉斯集其大成。 天體力學這個學科名詞， 也是拉普拉斯在 1798 年首先正式提出的。 這一

百多年爲天體力學的奠基階段， 這裡提到的有傑出貢獻的專家都是天體力學的奠基者， 而由於下面兩個原因， 拉普拉斯是主要奠基者。

首先是拉普拉斯在經典天體力學， 即攝動理論的各個環節中都有重大貢獻。 正是他最早根據力學原理建立了天體的受攝運動方程。 由於牛頓只討論了質點和球形物體間的萬有引力， 經拉普拉斯推廣後， 才能討論各種形狀大小的天體對外面一質點的吸引。 這對討論具有橢球形狀的行星和特殊形狀的土星環等的吸引問題有決定性作用。 通過對這些不同形狀天體的引力的勢函數討論， 爲位勢理論的建立打下了基礎； 並由此導出了著名的拉普拉斯方程， 對以後的數學和物理學發展作出了重大貢獻。

受攝方程列出後， 一般無法解。 如直角坐標表示的行星受攝方程爲：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{G(m_0+m)}{r^3}x = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{G(m_0+m)}{r^3}y = \dfrac{\partial R}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{G(m_0+m)}{r^3}z = \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{cases} \tag{28}$$

其中 (x, y, z) 爲所討論行星的坐標， m_0 、 m 爲太陽和行星質量； r 即 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， R 爲行星所受各種攝動力相應時勢函數。 這是一個六階非線性常微分方程組， 根本無法解出。 拉普拉斯在拉格朗日的常數變異法基礎上， 將 (28) 式變換成以行星 6 個軌跡根數爲變量的受攝方程組， 形式爲：

$$\frac{dp_i}{dt} = m'f(p,q,t) \text{、} \frac{dq_i}{dt} = mg(p,q,t) \tag{29}$$

其中 p_i 、 q_i $(i=1$ 、 2 、 $\cdots$ 、 $6)$ 爲兩個行星的軌跡根數； m 、 m' 爲兩行星質量， 在討論行星運動中， 都是小於 10^{-3} (太陽質量)

的小量。用 (29) 式就便於求近似級數解。(29) 式中只列出兩個行星相互攝動的受攝方程，如同時討論多個行星，則方程數目相應增加，右端的攝動項也要增加。

解 (29) 式的時候，要作兩次級數展開。先按照質量小參數 m、m'、$\cdots$ 的冪級數展開。拉普拉斯主要討論了含 m 或 m' 等一次冪項，相應的理論稱爲一階攝動理論。然後再按時間 t 展開。但因時間 t 在 (29) 式中是隱含在行星的近點角內，故應展開爲近點角及其組合的三角級數。由於還要對好幾個小量進行冪級數展開，故展開式爲冪級數和三角級數的混合級數。展開過程中有一基本式子，即把

$$\Delta^{-s} = (1+\alpha^2 - 2\alpha\cos H)^{-s} \tag{30}$$

展開爲 H 的三角級數，其中 α 爲參數、$s=\dfrac{2k+1}{2}$、k 爲正整數。展開結果爲：

$$\Delta^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^s(\alpha)\cos nH \tag{31}$$

係數 $B_n^s(\alpha)$ 就稱爲拉普拉斯係數，爲 α 的一種特殊函數。值得提出的是，傅里葉的三角級數展開方法是 1807 年才正式提出的，而 (31) 式在 1799 年出版的《天體力學》中已經有了。事實上，傅里葉級數是在拉普拉斯影響下形成的。

上面討論的展開式要結合具體天體情況進行，相應建立各個天體的運動理論。拉普拉斯側重討論了木星、土星、月亮、木衛、土衛、彗星的運動。在展開後的積分過程中，拉普拉斯第一個把積分後的攝動項分爲長期項、週期項和長週期項。不僅解釋了木星和土星運動中的異常問題，還給出了有關太陽系穩定性的兩個定理 (13)、(14) 式。

積分時用到的天體軌跡根數初值要從觀測值算出。拉普拉斯首

先提出了用三個時刻的觀測資料計算天體在第二時刻的軌跡根數方法，即現存的拉普拉斯軌跡計算方法。

除上述以外，他對天體形狀理論、潮汐理論、觀測資料處理方法、地球自轉理論、大氣折射理論和計算方法以及某些恆星運動問題都有貢獻。同時他還總結了歐拉、達朗貝爾、拉格朗日等人的工作，使這門新的學科系統化，成爲一門相對獨立的學科。再一個原因是，拉普拉斯完成了名著《天體力學》，這是集經典天體力學之大成的代表作。沒有記載表明他開始寫作的確切日期，但多認爲是在 1793 年被迫離開科學院到鄉下時動筆的。全書共分五卷十六册，三千多頁。

拉普拉斯在 1798 年出版的一本題爲《天體力學論述》(*Traité de mécanique celeste*) 的書中，第一次對這門學科的目標和內容下了定義："牛頓發現萬有引力定律已有一百年。從那時起，學者們就把這個偉大的定律用於研究一切已知自然現象，並由此給出了天體運動理論和意外準確的天文曆表。我在自己的大多數著作中用同樣的觀點提出了有關理論。這些理論，包括用萬有引力定律研究太陽系和宇宙中其它類似系統裡的固體與流體運動和平衡形狀的全部結果，組成了天體力學"。這是天體力學學科名詞的首次出現。

1799 年出版了《天體力學》第一、二卷。其中對天體力學的研究對象說得更明確："天體力學是研究所有固態、液態和氣態天體在各種自然力作用下運動和學科"。

第一及第二卷有一個總書名：《天體運動和形狀的一般理論》。第一卷分爲兩册，第一册書名爲《關於運動和平衡的一般理論》。內容爲理論力學原理，包括運動學、動力學的一般原理和定律，剛體動力學以及流體靜力學和動力學初步。

第二册《關於萬有引力定律和天體的質心運動》，講述了天體力學的基本問題。書中有牛頓從刻卜勒定律所導出的萬有引力定

律； 拉普拉斯推出的天體在相互引力作用下的運動方程， 以及用直角坐標表示的運動方程的首次積分； 連通物體對外面一質點的力函數和它所滿足的偏微分方程 — 拉普拉斯方程； 用球坐標和柱坐標表示的運動方程 (柱坐標的方程即所謂克萊羅 − 拉普拉斯方程)； 運動方程的第一次近似解， 即無攝運動爲圓錐曲線軌跡； 拉普拉斯軌跡計算方法； 一階攝動理論的細節； 攝動函數的展開方法； 有關長期攝動的著名定理 (太陽系穩定性的拉格朗日 − 拉普拉斯定理)。

第二卷分爲三册， 第三册 (從第一卷的册數起算)《關於天體的形狀》。 書中著重討論均勻橢球體的平衡形狀， 其中給出了拉普拉斯關於行星爲自轉流體時的平衡形狀理論； 等密度層接近於圓球的橢球體平衡形狀； 理論結果用於地球和土星環。

第四册《關於地球大氣和海洋的振動》， 講述了地球海洋和大氣的潮汐理論。

第五册《天體繞自己質心的轉動》中主要講述地球自動理論， 包括歲差和章動理論； 月球自轉理論， 主要是月球的天平動； 土星環的運動問題， 其中把環看作固體和流體的混合。

1802 年出版的第三卷書名爲《特殊天體的運動理論》， 分兩册。 值得提出的是在 1801 年 1 月 1 日義大利天文學家 G. 皮亞齊 (Piazzi) 發現第一號小行星 — 谷神星。 這種新天體的發現， 對以後天體力學的發展有重要意義。

第六册《行星運動理論》， 主要講述行星在相互引力作用下的受攝運動。 作者從第一卷的受攝運動方程出發， 考慮了二階攝動力 (即含有行星質量二次冪的攝動項。) 他還初步討論了太陽的橢球扁率和衛星對行星運動的影響， 結果證明這兩種影響可以忽略。 接著討論了 1750 年所給有關行星數據 (質量、 軌跡根數初值等) 的偏差， 然後給出當時所有大行星 (水星到天王星) 的運動理論， 以及它們各自的向徑、 黃經和黃緯的三角級數展開式係數數

值。 最後還討論了行星質量的確定， 並在此提出太陽系的不變平面 (拉普拉斯平面)； 還估計了恆星引力對行星運動的影響。

第七冊《 月球運動理論 》， 主要講拉普拉斯自己的工作。 書中給出月球運動微分方程的積分方法和各種較大的攝動項， 其中特別詳細討論了地球和月球的非球形形狀對月球的攝動。 書中還根據理論和觀測值的比較來確定地球形狀的橢率， 並認爲比直接地面測量的結果更準。 書末討論了地球和月球運動的長期變化， 他認爲可能是太陽周圍有流體 “以太” 產生阻尼的結果。 雖然他具體計算後得到否定結論， 但所提出的方法是很有用的， 與現在用人造衛星的運動理論和觀測值來定出大氣密度的方法大體相同。

第四卷沒有統一書名， 於 1805 年出版， 共分爲三冊。

第八冊《 木星、 土星和天王星的衛星運動理論 》，其中著重討論了木星的四顆伽利略衛星即木衛一、 木衛二、 木衛三、 木衛四。 拉普拉斯特別注意前三個衛星的軌跡共振關係 (16) 式， 它在衛星相互攝動下幾乎不變。 書末簡單地討論了土星和天王星的衛星運動。

第九冊《 彗星運動理論 》， 主要討論了週期彗星的受攝運動問題， 包括彗星軌跡分佈的統計研究。

第十冊《 同宇宙體系有關的各種問題 》。 書中講述了三體問題的特解的存在性； 天體在阻尼介質中的運動問題； 以及木星、 土星和月球運動理論的補充。 另外還有天文大氣折射理論和重力測量理論等非天體力學課題。

以上四卷幾乎包括經典天體力學的全部內容。 二十年後 (1825 年)， 又出版了第五卷，包含拉普拉斯晚年的天體力學研究成果以及各領域的歷史考證。 這些歷史考證是很有價值的，也很詳細， 闡明了天體力學到十九世紀二十年代爲止的發展情況。 第五卷分爲六冊。

第十一冊《 關於地球的形狀和自轉 》， 主要是對地球形狀問題

的補充。第十二册《關於球形物體的吸引和排斥以及彈性流體的平衡和運動規律》，這同天體力學的關係不大。第十三册《覆蓋在行星上流體的漲落》，講述有關海洋和大氣潮汐的新結果。第十四册《關於天體繞自身質心的運動》是拉普拉斯關於這個問題的補充。第十五册《關於行星和彗星的運動》是對第一卷所講述的攝動理論的補充。第十六册《關於衛星的運動》是對月球和其它大行星的衛星運動理論的補充。在第五卷的附錄中，敍述拉普拉斯於 1827 年研究 n 爲大數而且假設 x 爲純虛數的巴塞耳函數近似展式：

$$\frac{x^n \exp\{n\sqrt{(1-x^2)}\}}{(2\pi n)^{1/2}(1+\sqrt{1-x^2})^n(1-x^2)^{1/4}}$$

這對天體力學中相關問題，起良好的分析作用。

《天體力學》是經典天體力學的奠基著作。在這部巨著中，拉普拉斯歸納出經典天體力學的基本課題爲：太陽系大行星的運動問題、月球運動問題 (考慮地球和太陽的引力以及其它大行星的影響)、衛星運動問題 (考慮所屬行星、太陽以及衛星間引力)、彗星運動問題、行星的自轉運動，特別是地球和月球、行星形狀理論、潮汐理論。除潮汐理論現已劃歸海洋學外，其它幾個至今仍然是現代天體力學的課題。

《天體力學》的出版情況也值得一提。法國科學院在十九世紀內共印刷過四版，前三次出版都沒有任何修改。第四版在 1878 年印出第一、二、三卷；1880 年印出第四卷，1882 年出第五卷。只是在第五卷末增加了拉普拉斯去世後的天體力學發展情況。有三個內容：其一，“兩個行星距離倒數的級數展開”，給出用勒讓德多項式表示的近似公式；其二，“橢圓坐標的展開式”，包含有軌跡偏心率的上限，即後來稱爲“偏心率的拉普拉斯極限”；其三，關於“大氣潮汐”問題。

十九世紀就有三個國家翻譯出版了《天體力學》。第一、二卷

剛出版， 就由 J.K. 伯克哈特 (Burckhardt) 譯爲德文， 於 1800 年在柏林出版第一卷， 1802 年印出第二卷。 前四卷出版不久， 美國人 N. 鮑迪奇 (Bowditch) 就將它們譯爲英語。 在譯者去世 (1816 年) 後在波士頓出版， 1829 年出第一卷， 1832 年出第二卷， 1834 年出第三卷， 1839 年出第四卷。 經俄國人 Ф. И. 舒別爾特 (Шуберт) 的整理推薦， 1822 年在聖彼得堡用法語出版了《理論天文學論述》(*Traité d' astronomie thérique*)。 內容主要是拉普拉斯《天體力學》的前四卷， 但有些增刪。 前面增加了歷史發展和球面天文學內容， 中間增加了拉格朗日和其他人的貢獻。 全書分爲三卷共七册。

由拉普拉斯所奠基的天體力學十九世紀發展十分迅速， 當時大多數著名數學家、 天文學家、 物理學家都重視天體力學。 其中貢獻較大的有： 勒讓德把球函數 (如勒讓德多項式等) 用於天體力學中的展開式、 泊松推出天體對內一質點吸引的勢函數滿足的方程， 即泊松方程、 高斯在位勢理論、 軌跡計算 (高斯方法) 和長期攝動計算以及觀測資料處理方法中都有重大貢獻、 K.G. 雅可比 (Jacobi) 和 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 建立的哈密頓－雅可比方法對攝動理論的進一步發展有決定性作用、 U. 勒威耶 (Le Verrier) 等用天體力學理論計算預言新行星位置， 於 1846 年 9 月 23 日發現海王星， 標誌天體力學已經成熟。

2. **《宇宙體系論》和其中提出的 “星雲說”** 1796 年， 拉普拉斯根據自己在巴黎綜合工業學校等處的講稿， 整理出版了歷史性名著《宇宙體系論》， 在自然科學和哲學界都產生了巨大影響。 書中全面闡述了他從分子到整個宇宙的看法。 在他生前已出過五版， 直到他去世前幾日， 還在病床上修改第六版底稿。 現按 1835 年出版的第六版 (有中譯本) (見原始文獻 [32]) 作介紹。 全書五篇和七個附錄， 附錄七即 “星雲說”。

第一篇名爲 “天體的視運動”， 共分十六章。 從天體的週日

視運動談起，然後是太陽視運動和時間測量，月球視運動和日蝕、月蝕；接著介紹行星及其衛星、土星環、四個小行星。第十一章中講“行星圍繞太陽的運動”，其中闡述了科學應通過現象發現自然界定律的想法。他說：“如果我們只是收集事實，科學將會成爲貧乏的詞彙，決不會發現自然界的偉大定律。由許多事實的比較，尋找其間關係，再將現象的範圍推廣，最後才能發現定律。這些定律常隱藏在它們對現象的千變萬化的影響中”。這一章實際上是以行星視運動現象推出它們繞太陽運動規律作爲例子，表達出他的哲學觀點。此外，本篇還介紹了彗星、恆星的視運動、地球形狀大小及重力變化、十進位公制、潮汐、地球大氣和天文折射等。

第二篇講“天體的眞運動”，是用在上篇視運動現象基礎上分析出來的結果，來研究太陽系範圍的眞實體系。共分六章，主要講地球自轉和公轉的規律以及由此產生的各種現象。還講了彗星和衛星的軌跡和運動規律。

第三篇爲“運動定律”，共分五章。主要介紹力學原理、質點和物體系統的運動；還有物體系統和流體的平衡。其中談到力的表示時，牽涉到十八世紀中的討論。認爲力是質量乘速度，又叫做物體的“有限力”；而質量乘加速度叫“加速力”，動能叫“活力”。最後都可以自洽，仍用動量、角動量及它們的守恆定律。

第四篇講“萬有引力理論”，實際上爲天體力學綱要，但表達用的是儘可能通俗的語言。共分爲十八章。本篇前言中又闡明他的觀點：“宇宙中存在普遍適用的定律”，萬有引力定律就是其中之一。書中講述萬有引力原理從天體運動中歸納出來，然後根據萬有引力定律和力學原理推導出各種天體的運動規律。不僅行星繞太陽的無攝運動符合，而且行星的受攝運動也符合萬有引力定律。因此他說：“這一偉大定律能夠解釋一切天象，乃至最小的細節”。後面又說明地球和行星的形狀、土星環、天體的大

氣、潮汐、歲差和章動、月球天平動及恆星中雙星運動、星團運動等也符合此定律。

在第十七章“萬有引力定律的回顧”中，重申了他在 1776 年的觀點 (見原始文獻 [1])，但在這裡作了解釋。並把靜電力、磁力等同引力作比較，說明反平方定律的普遍性。書中還提出電流應在異體表面通過，並解釋尖端放電現象。

第十八章“分子間的引力”是拉普拉斯關於短程力觀點的全面闡述。他把萬有引力原理用於一切自然現象，包括流體凝固、固體結晶、光線彎曲、毛細管中的液體升降以及一切化學反應現象。但他還是提出這些現象的作用力是另外一種力，他說：“物體受到各種引力的作用，其中之一延伸到無限的空間，控制地球和天體的運動；與組成物體的物質結構有關的力，主要是另外一種力，其作用只在小到不能覺察的範圍內方才顯著”。

第五篇講“天文學史綱要”，共分六章。主要介紹天文學的發展過程，其中反映出作者的兩個觀點：一是天文學同其它學科一起並肩發展，在當時主要是數學和力學；二是天文學發展不是順利的，眞理和謬誤混在一起，在不斷淘汰謬誤中發展。他把天文學到當時的發展分爲三個時期：哥白尼以前爲了解現象時期，即根據觀測提出某些假說；哥白尼到牛頓爲提出支配現象的定律時期，主要爲有關地球自轉和行星公轉的刻卜勒定律；牛頓以後第三時期，即找到天體運動定律的原因是萬有引力，並用於解釋一切天文現象。他認爲一切自然科學發展都應有這三個階段。他在第六章“宇宙體系的研究與天文學將來的進展”中，進一步闡明了對宇宙認識的觀點，可歸納如下：

第一，太陽系邊界應比現在所知 (到天王星) 更遠，還有更多的行星和衛星；

第二，地球不特殊，其它行星、其它行星系中都可能有生物，有適於它們生存的環境；

第三， 太陽系規律應同恆星世界聯繫研究， 太陽系和恆星都有起源；

第四， 對暫時無法解釋的現象和規律， 老實承認我們無知， 不要爲了自我安慰去找想像的原因來說明。 這裡他對牛頓在不能解釋行星和彗星和軌跡規律時， 認爲 “全智全能的上帝創作”， 提出了尖銳批評。 指出牛頓 “陷入了歧途”。

書後有七個附錄。 前六個附錄都是天文學史補充， 其中附錄一是談中國古代周公測量的某些結果， 附錄六是介紹過去觀測 (包括周公和郭守敬的) 所定出黃赤交角的結果。 附錄七即他的 “星雲說”。

雖然德國哲學家 I. 康德 (Kant) 在 1755 年已提出太陽系起源於星雲的假說， 但拉普拉斯與他是相互獨立提出的， 而且在科學論證上是更具體詳盡。 由於他們的基本觀點相近， 故後來通稱 “康德 – 拉普拉斯的星雲假說”。

拉普拉斯在第五篇的第六章中已提出這一學說的基本觀點， 但他自認爲這僅爲假說， 不是從觀測或計算得到的結論， 因此只能有保留地放在附錄中。

他首先分析了太陽系天體運動中的規律， 這是一切有關太陽系起源假說的根據。 從當時獲得的觀測結果分析出的規律爲：

(1) 行星按相同的方向， 且差不多在同一個平面上繞太陽運動；

(2) 衛星運動的方向與行星相同；

(3) 行星、 衛星和太陽的自轉運動與行星公轉方向一致， 而且它們的赤道面也相近；

(4) 行星和衛星的軌跡偏心率都很小；

(5) 彗星的軌跡偏心率大， 與黃道面的交角也大， 而且沒有規則。

拉普拉斯分析這些規律後提出： 產生行星的物質應爲比現在太

陽系更大的， 與太陽大氣相似的稀薄流體， 且與太陽自轉方向相同地轉動。 他認爲就像星空中觀測到的星雲。 太陽系以前的原始星雲只有一個核心， 以後凝聚成太陽。 如更大的星雲， 有多個核心則疑成星團。

形成太陽系的原始星雲體積很大、 高溫 、 接近球形， 並在緩慢自轉。 後因熱量不斷輻射而逐漸冷卻收縮。 由於角動量守恆， 星雲收縮時自轉加快， 離心力也隨著加大。 在離心力同中心引力結合下， 星雲愈來愈扁， 逐漸成扁盤狀。 星雲繼續收縮， 轉動速度愈來愈大； 到一定時候， 星雲赤道面最外部質點的離心力與中心吸引力相平衡， 不再收縮而停留形成一個轉動著的氣體環。 裡面星雲繼續收縮， 加速自轉， 又分離出第二個轉動氣體環。 如此繼續下去， 形成與行星數目相同的， 大致位於現在行星軌跡處的各氣體環 — 拉普拉斯環。

星雲中心部分收縮爲太陽。 各環內物質分佈不均勻， 密度大的部分把密度小的吸引過去， 形成一些凝聚物， 在大致相同的軌跡上繞中心運動。 由於相互吸引， 小凝聚物逐漸集結爲大凝聚物， 最後結合成爲原行星。 原行星開始也是最高氣體球， 後來才逐漸冷卻收縮而成現在的行星。 較大的原行星冷卻時也會像前面過程分離出一些小氣體環而形成衛星系統。 土星環是由未結合成衛星的許多小質點構成的。 環上外部質點轉動線速度快， 因而集聚成行星後爲正向自轉。

拉普拉斯的星雲說可以解釋太陽系的五條規律， 其中認爲彗星是從太陽系外跑進來的天體， 因此彗星偏心率大， 傾角也無規則。 從現在的觀點和研究成果看來， 康德和拉普拉斯認爲太陽系是由自轉著的原始星雲逐漸收縮而成的， 中心部分形成太陽， 外部形成行星。 這個論點還是對的， 只是形成過程中有不少矛盾無法解決。 但是他們的量雲說在哲學上的意義更大， 給當時形而上學的僵化自然觀打開了一個缺口。

在《宇宙體系論》中反映出他的哲學觀點是唯物主義的，他堅持從事物觀測中總結規律，再從規律中建立理論。整個宇宙是物質的，而且在演化和發展。他同拿破侖的對話充分說明這點。拿破侖在讀過他的《天體力學》第一、二卷後曾對他說：“在您寫的著作中怎麼沒有提到上帝呢?” 拉普拉斯回答說：“陛下，我不需要這個假設……”。他還有一句名言：“只要給我物質，就可以創造出世界來。” 但是他把宇宙中的各種變化反應都歸結爲力的作用，這種觀點具有歷史局限性。

3. **承上啓下的代表作《概率分析理論》** 概率論是具有廣泛應用的基礎數學分支，在歷史發展過程中可分爲三個階段。從十七世紀誕生到 1812 年爲止的內容叫 “古典概率論”，計算概率以代數方法爲主；1812 − 1933 年這一階段的內容叫 “分析概率論”，方法主要是微積分、微分方程、差分方程、特殊函數等分析方法；1933 年以後主要用實變函數中的測度理論 (Measure theory) 研究概率，相應內容爲 “測度概率論”，主要代表是蘇聯數學家 A. H. 科莫哥羅夫 (Колмогоров)。拉普拉斯總結了古典概率論，並使他發展到新的歷史階段，他的著作《概率分析理論》就是承上啓下的代表作。

第一版在 1812 年出版，分兩卷，第一卷又分兩册。第一卷第一册在 1812 年 3 月 23 日出版；其餘部分在同年 6 月 29 日出版。在 1814 年 11 月 14 日出第二版時，增加了長達 150 頁的緒論，同年單獨印刷成一本書，題爲《概率的哲學導論》(*Essai philosophique sur les probabilités*)。1820 年出的第三版中，仍保留緒論，但單獨印出的《概率的哲學導論》分別在 1816 年印出第三版，1819 年出第四版，1825 年出第五版。《概率分析理論》還有四個附錄：附錄一在 1816 年印出，附錄二在 1818 年印出，附錄三在 1820 年印出；附錄四是拉普拉斯在 1825 年寫完的，但生前未印出，以後收在他的全集第七卷中。

緒論即《概率的哲學導論》中包含概率論的發展歷史及一般原理和應用，是他在師範學校的講稿編輯而成。其中有五個內容：一是概率的定義及發展歷史，拉普拉斯提出“先驗”概率的概念，這是有爭議的；二是概率計算的一般原理，主要是古典概率論的原理；三是講述概率論中的一個重要概念 — 期望；四是講述概率的分析計算方法，實際上是古典概率論向分析概率論過渡；五是講概率計算的應用，佔緒論的一大半，應用於各種各樣的自然和社會問題。

第一卷有標題爲：“生成函數的計算” (*Calcul des fonction génèratrices*)，主要講述同概率計算有關的數學方法，共分兩册五章。上册講述帶有整數指標的函數族，當指標數量很大時的一般情況。這是因爲概率討論中，要用到試驗次數很大，重複次數很多的現象。所用到的特殊函數同這些次數有關。內容只有兩章。第一章講一個變元函數族的情況，第二章講兩個變元情況。這些知識都是他本人在二、三年前有關級數的近似理論，這些特殊函數是生成函數的級數展開式係數，一般要滿足某種微分方程或差分方程，要用各種近似方法積出它們。下册共分三章 (即第三、四、五章)。第三章講非線性微分方程的近似積分方法；第四章講線性差分和微分方程的近似方法；第五章講前兩章的方法用於求出大指標函數的近似。整個第一卷是爲第二卷作的數學準備。

第二卷的標題爲“一般概率論” (*Théoré générale des probabilités*)，是本書的主要內容，共約 400 頁。整卷分爲十一章，全面歸納了前人和他自己有關概率論的成果，並應用於自然哲學、天文學、大地測量學、測試、誤差、審判過程和選舉機構等方面的問題。不像《天體力學》前兩卷那樣系統化講述。雖不宜作爲教材，但作爲概率論的研究參考資料是很好的。各章自成系統討論某一方面問題，但相互之間獨立性較強。

第一章講概率的一般原理和學科特點。除了提出概率的古典定義和概率的乘積原理外，作爲第三個基本原理是文字敍述的一個定理。這是有關由 n 種不同原因產生的事件的概率公式的定理，即在 1763 年已發表的貝葉斯定理。可是，拉普拉斯在書中沒有提到 T. 貝葉斯 (Bayes) 的名字，而作爲自己的一個定理。接下去的幾章討論各種實際問題中提出的概率計算方法。

第二章討論由已知概率的簡單事件組成的複合事件的概率計算，此問題討論得非常詳細，幾乎佔了第二卷的四分之一。他從古典的抽彩、摸球等問題出發，歸納爲較一般的數學問題：袋中裝有 $n+1$ 個球，各球號碼依次爲 0、1、2、$\cdots$、n；每次摸出一個，記下號碼後再放回袋中；則摸出 i 次後，i 個球的號碼總和爲 s 的概率是多少?

設每次摸出球的號碼分別 t_1、t_2、$\cdots$、t_i，顯然有

$$t_1+t_2+\cdots+t_i=s \tag{32}$$

拉普拉斯推出這個概率公式爲：

$$\frac{1}{(n+1)^i}[C_{i-1}^{s+i-1}-C_1^iC_{i-1}^{s+i-n-2}+C_2^iC_{i-1}^{s+i-2n-3}-\cdots] \tag{33}$$

其中組合符號定義爲

$$C_r^n=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\text{、}r!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot r$$

(33) 式的級數到 $(s-n)$、$(s-2n-1)$、$(s-3n-2)$、$\cdots$ 爲零或爲負數時爲止。若 s、n 無限增加時，(33) 式可化爲：

$$\frac{1}{n\cdot(i-1)!}\left[\left(\frac{s}{n}\right)^{i-1}-C_1^i\left(\frac{s}{n}-1\right)^{i-1}+C_2^i\left(\frac{s}{n}-2\right)^{i-1}-\cdots\right] \tag{34}$$

此式後用來討論彗星軌跡傾角分佈於 $\phi-\varepsilon$、$\phi+\varepsilon$ 之間的概率，ϕ、ε 爲任給定的角度，但 ε 爲小量。

第三章討論概率的界限，即事件不定次乘積結果的概率規律。標準問題是兩個事件 a、b，概率分別爲 p 和 $1-p$；則重複試驗 $x+x'$ 次中，a 出現 x 次，b 出現 x' 次的概率是二項式 $[p+(1-p)]^{x+x'}$ 展開式中的第 $(x'+1)$ 項；而當 x、x' 都非常大時，拉普拉斯給出了近似概率公式，從公式中指出了兩種界限，一是和事件 a 的先驗概率有關，二是和發生事件 a 的次數與總次數之比有關。當試驗次數增大到無窮時，兩種界限趨於一致，概率成唯一的。拉普拉斯曾在早年 (1781) 用男孩和女孩出生數之比值來研究先驗概率 (見原始文獻 [14])

第四章討論誤差的概率問題，是他三十年來有關誤差方面工作的總結。著重討論了兩個問題：一是大量觀測資料平均值的誤差在一定範圍內的概率；二是更有利的平均值誤差在一定範圍內的概率。在這裡已提出最小二乘法的原理，以後由勒讓德和高斯最後完成方法體系。第五章討論概率計算應用於各種現象及其原因的研究。主要例子是氣壓在一天內的變化。正常情況下是上午 9 時氣壓最高，下午 4 時最低；以後上升，到晚上 11 時形成較小的高峰，然後降低到早晨 4 時爲止。拉普拉斯通過正常的概率計算，指出產生此種週日變化的原因是太陽作用，並定出其平均範圍。他試圖從數學上解決這個問題，用大氣潮汐作爲第二個原因，但由於資料缺乏而未完成。他在《天體力學》第二卷第四册中提到這點。他還試圖研究心理學現象，希望從大量觀測中定出電磁作用在神經系統中的影響。另外還考慮過一些醫學和經濟方面的問題，可惜都未能深入下去。

第六章討論由觀測到的事件推斷出的原因概率和未來事件概率。這是他在 1774 − 1786 年間有關原因概率、逆概率用於人口論的再創作。並以那不勒斯、巴黎和倫敦的人口調查數字爲基礎，估計出法國的人口數及其或然誤差。

第七章簡單地討論了先驗概率有偏差時產生的影響。以拋硬幣

爲例，一般都認爲抛出正面或反面的先驗概率都是二分之一。但由於硬幣的物質結構不會絕對對稱，故抛出爲正面與反面的概率不會完全相等，設爲

$$\frac{1+\alpha}{2} \quad 和 \quad \frac{1-\alpha}{2}$$

α 稱爲先驗概率的未知偏差。由此得出連續 n 次都抛出正面 (或反面) 的概率爲：

$$\frac{1}{2^{n+1}}[(1+\alpha)^n + (1-\alpha)^n] \tag{35}$$

此式可知，每次都猜正面 (或反面) 比有時猜正而有時猜反更有利。

第八、九、十章討論了大量社會現象的概率問題，例如平均年齡、年金、保險、婚姻期限、各社會團體存在期限等。第十章主要討論了與數學期望 (平均値) 不同的可能期望値的計算，比原來的伯努利公式更有用。

第十一章講述所謂 “見證的概率”。典型例子是抽籤問題。設在袋中有帶號碼的籤條，抽出一根給見證人看後，他說號碼爲 n。這是眞的嗎? 拉普拉斯用逆概率來討論這個問題，估計見證人可靠性的概率。共有四種可能性：(1) 見證人既未說謊也未看錯；(2) 他沒有說謊但看錯了；(3) 他說謊但沒有看錯；(4) 他又說謊又看錯。拉普拉斯還推廣到幾個見證，情況更複雜。最後結論是，對相信者保證得越多的見證人，其可靠性概率越小。他後來在《概率的哲學導論》中，舉了數字例子；並揭示了帕斯卡 (Pascal) 論證上帝存在性的錯誤。

書末有三個補充，都是書中一些公式的具體證明或推廣。另外有後來增加的四個附錄。

1816 年完成的附錄一的標題是 “關於概率在自然哲學中的應用”。實際上主要討論社會問題，以一判罪爲例。拉普拉斯認爲

犯罪的原因概率中， 已知或已假定其先驗概率； 並認為陪審員或法官的可靠性概率在 $\frac{1}{2}$ 到 1 之間。 他計算出陪審團中幾人投贊成有罪票得到的判決差錯的概率。 如陪審團為 8 人，5 人投有罪票差錯概率為 $\frac{65}{256}$。 由此討論了陪審團組成方案。

1817 − 11819 年間， 拉普拉斯把概率論用於提高大地測量資料的精度， 相應研究結果歸納為附錄二、 三， 加在《概率分析理論》第三版中。 這兩個附錄在統計學歷史發展中有重要意義， 實質上就是拉普拉斯的誤差理論， 用最小二乘原理使儀器誤差和觀測誤差極小化。 附錄二的標題為 “關於概率計算在測地活動中的應用”。 主要提出自己的統計方法， 並同其它方法進行比較。 附錄三的標題為 “概率測地公式在巴黎子午線測量中的應用”。 他的助手 J.-B. J. 德朗布爾 (Delambre) 等在 1796 年整理時只用了 27 個三角網資料， 而拉普拉斯用了全部 700 個三角網原始資料。 算出了不同子午線長度量級的誤差概率， 得出巴黎子午線長度的最優值。

1825 年寫完的附錄四是關於生成函數的四點小補充。

結束語

拉普拉斯的很多， 但主要在天體力學、 宇宙體系論和分析概率論三個方面的成就， 使他成為歷史上數理學科方面最著名的科學家之一。 他的研究工作特點是深度和廣度並進， 強調應用。 不僅在自然現象中應用， 還在社會現象中儘可能找到應用。 他在概率論及其它數學上的成就， 使他成為應用數學的先驅者之一。

他的學術思想和哲學觀點明朗， 是較徹底的唯物論者。 他同拿破侖的對話充分說明這點， 對出身於教會家庭的人來說是很難得的。 但由於他終身主要致力於力學方面的研究， 且因當時物理學中， 除力學以外的其它分支還很弱， 故他把一切物理現象甚至化

學現象都歸結爲力的作用， 這當然是機械論觀點， 這必然影響他在物理學上作更大貢獻。

關於他的品德是有爭議的， 主要在於對拿破侖和波旁王朝的態度上。 但對科學家拉普拉斯來說， 這段短暫時間的是非並不重要， 留待歷史學家們去解決。

至於他的著作和出版情況。 拉普拉斯的著作分三部分： 一是專題報告或論文， 有 276 篇， 分散發表在各種刊物上， 或在科學院記錄中； 二是長篇專著； 三是同其他科學家的學術通信， 發表過一部分 (作爲科學史資料)。

他去世後， 由他妻子津貼出版《拉普拉斯文集》(*Oeuvres de Laplace*) 共七卷 (見原始文獻 [33])， 前五卷即《天體力學》、 第六卷爲《宇宙體系論》、 第七卷爲《概率分析理論》， 其中緒論即《概率的哲學導論》。 1843 年出版第一卷， 1847 年出齊。 這包括了拉普拉斯全部的長篇書籍。

拉普拉斯的兒子， 後來任將軍並封爲侯爵， 於 1874 年去世。他的外甥女 (即拉普拉斯的外孫女) 科爾貝爾 − 拉普拉斯伯爵夫人用他的遺產資助出版了《拉普拉斯全集》(*Oeuvres Complètes de Laplace*， 以下簡稱《全集》)， 共十四卷 (見原始文獻 [34])。 前七卷與《拉普拉斯文集》相同， 只是校正了一些印刷錯誤。 第八至十二卷爲拉普拉斯在 1793 年以前由科學院出版的單篇論文或文集， 以及 1795 年以後由法蘭西研究院出版的拉普拉斯的論文。 第十三卷爲拉普拉斯在法國經度局出版的學術刊物《時間知識》(*Connaissance de Temps*) 上發表的全部文章。 第十四卷收集了他在其它學術刊物， 如《物理學雜誌》(*Journal de physique*)， 《物理和化學年刊》(*Annales de physique et chimie*) 等上發表的論文。 實際上， 這個《全集》並不完整， 有不少文章未收入。 如拉普拉斯早年在萊比錫和都靈發表的論文以及重要著作《行星的運動和橢球形狀理論》(*Théorie du mouvement et de la figure elliptique des* *planètes*) (見原始文獻 [17]) 等。 另外， 通信大部分都未收入。 但這個《 全集 》已有八千多頁， 於 1878 年開始印出， 在 1912 年才出齊。

文 獻

原始文獻

(按文中號碼順序排列， OC 表示《 全集 》)

[1] P.-S. Laplace, *Sur le principe de la gravitation universelle, et sur le inègalités séculaires des planètes qui en dependent*, Savants Étrangers (1773/1776), 161 − 232, 1776, OC VIII, 198 − 275。

[2] P.S. Laplace, *Memoire sur l'inclinaison des orbites des comètes, sur la figure de la terre, et sur les fonctions*, ibid., 503 − 540, 1776, OC VIII, 279 − 321。

[3] P.S. Laplace, *Recherches sur le calcul intégral aux differences partielles*, Mémoires de l'Academie royale des sciences de Paris (1773/1777), 341 − 402, 1777, OC IX, 5 − 68。

[4] P.S. Laplace, *Mémoire sur le solutions particulières des équations differentielles et sur les inéqualités séculaives des planétes*, ibid. (1772, pt. 1/1775), 343 − 377, 1775, OC VIII, 325 − 366。

[5] P.-S. Laplace, *Addition au mémoire sur les solutions particulieres* · · · , ibid. 651 − 656, 1775, OC VIII, 361 − 366。

[6] P.-S. Laplace, *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux differences finites, et leur usage dans la théorie des hasards*, Savants Etrangers (1773/1776), 37 − 160, 1776, OC VIII, 69 − 197。

[7] P.-S. Laplace, *Additions aux recherches sur lecalcul integral et sur le système du monde*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (1772, pt. 2/1776), 533 − 554, 1776, OC VIII, 478 − 501。

[8] P.-S. Laplace, *Recherches sur plusieurs points du systéme du monde*, ibid. (1775/1778), 75 − 182, 1778, OC IX, 71 − 183。

[9] P.-S. Laplace, *Recherches sur plusieurs points du systéme du monde (suite)*, ibid. (1776/1779), 177 − 267, 1779, OC IX, 187 −

280。

[10] 同上, 525－552, 1779, OC IX, 283－310。

[11] P.-S. Laplace, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles par approximation*, ibid. (1777/1780), 373－379, 1780, OC IX, 357－379。

[12] P.-S. Laplace, *Mémoire sur l'usage du calcul aux differénces partielles dans la theorie des suites*, ibid. (1777/1780), 99－122, 1780, OC IX, 313－335。

[13] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les probabilités*, ibid. (1778/1781), 227－332, 1781, OC IX, 383－485。

[14] P.-S. Laplace, *Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris, depuis* 1771 *jusqu'en* 1784*, et dans toute l'etendue de la France, pendant les années 1781 et*, ibid. (1783/1786), 693－702, 1786, OC XI, 35－46。

[15] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les suites*, ibid. (1779/1782), 207－309, 1782, OC X, 1－89。

[16] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la determination des orbites des comètes*, ibid. (1780/1784), 13－72, 1784, OC X, 93－146。

[17] P.-S. Laplace, *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*, Paris, 1784。

[18] P.-S. Laplace, *Théorie des attraction des sphéroides et de la figure des planétes*, ibid. (1782/1785), 113－196, 1785, OC X, 341－419。

[19] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la théorie de l'annean de Saturne*, ibid. (1787/1789), 249－267, 1789, OC XI, 275－292。

[20] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les inégalités séculaires des Planètes et de satellites*, ibid. (1784/1787), 1－50, 1784, OC XI, 49－92。

[21] P.-S. Laplace, *Théorie de Jupiter et de Seturne*, ibid. (1785/1788), 33－160, 1788, OC XI, 95－207。

[22] P.-S. Laplace, *Sur l'equation séculaire de la lune*, ibid. (1786/1788), 235－264, 1788, OC XI,243－271。

[23] P.-S. Laplace, *Oeuvies de Lavoisitr*, II, 739－759, 1862。

[24] P.-S. Laplace, *Mémoire sur la chaleur (with Lavoisier)*, ibid.

(1780/1784), 355－408, 1783, OC X, 149－200。

[25] P.-S. Laplace, *Sur quelques points du systéme du monde*, ibid. (1789/1793), 1－87, 1793, OC XI, 477－558。

[26] P.-S. Laplace, *Théorie des satellites de Jupiter*, ibid. (1788/1791), 249－364, 1791, OC XI,309－411。

[27] P.-S. Laplace, *Théorie des satellites de Jupiter (Suite)*, ibid. (1789/1793), 237－296, 1793, OC XI, 415－473。

[28] P.-S. Laplace, *Mémoire sur le flux et le reflux de la mer*, ibid. (1790/1797), 45－181, 1797, OC XII, 3－126。

[29] P.-S. Laplace, *Développement de la théorie des fluides élastiques et application de cette théorie à la vitesse du son*, Connaissance des Temps (1822/1825), 219－227, 1882, OC XIII, 291－301。

[30] P.-S. Laplace, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont formules qui sont fonctions de trés grands nombres*, Mémoires de l'Academie royale des sciences de Paris (1782/1785), 1－88, 1785, OC X, 209－291。

[31] P.-S. Laplace, *Supplement au mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions des trés grands nombres*, Mémoires de nationale des sciences et arts；Sciences mathématiques et physiques, 10 (1809/1801), 559－565, 1810, OC XII, 349－353。

[32] P.-S. Laplace, *Exposition du Système du Monde*。(中譯本：拉普拉斯，宇宙體系論，上海譯文出版社，1978)

[33] P.-S. Laplace, *Oeavres de Laplace*, Vol. I–VII,Paris, (1843－1847)

[34] P.-S. Laplace, *Oeuveres Complétes de Laplace*, Vol. I–XIV, Gauthier, (1878－1912)。

研究文獻

[35] I. Grattan-Guinness, *P.-S. Laplace*, 見 *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's, Sons, V, 273－403。

[36] J. Fourier, *Éloge historique de M. le Marquis de Laplace, prononcé …… le* 15 *juin* 1829, Phylosophical Magazine, Ser. 2, 6 (1829), 370－391。

[37] E. T. Whittaker, *Laplace Mathematical gazette*, 33 (1949), 1－

12 。

[38] Б. А. Воронцов-Вильяминов, Лаплас, Москва, “Наука”, Главна Редакция Фиэико–Математическои Литературы, 1985 。

[39] Г. Н. Дубошин, Небесная Механика–Основные З адачи и метады, Гасударственное Иэдательство,Фиэико–Математическои Литературы, Мсокна, 1963.

[40] G. Bigourdan, *La jeunesse de Laplace*, Science Moderne, No. 8 (1931), 377－384 。

[41] G.-A. Simon, *Abbé, Les origines de Laplace* ： *sa généalogie, ses etudes*, Biome- trika, 21 (1929), 217－230 。