傅 里 葉

傅里葉，J. B. J. (Fourier，Jean Baptiste Joseph) 1768 年 3 月 21 日生於法國奧塞爾 (Auxerre)；1830 年 5 月 16 日卒於巴黎。數學、物理學。

傅里葉之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fourier.html`

傅 里 葉

郭 敦 仁　　孫 小 禮

(北京大學)

傅里葉， J. B. J. (Fourier， Jean Baptiste Joseph) 1768 年 3 月 21 日生於法國奧塞爾 (Auxerre)； 1830 年 5 月 16 日卒於巴黎。 數學、 物理學。

傅里葉出身貧民， 父親是位裁縫。 九歲時雙親亡故， 以後由教會送入鎮上的軍校就讀， 表現出對數學的特殊愛好。 他還有志於參加炮兵或工程兵， 但因家庭地位低貧而遭到拒絕。 後來希望到巴黎在更優越的環境下追求他有興趣的研究。 可是法國大革命中斷了他的計劃， 於 1789 年回到家鄉奧塞爾的母校執教。

在大革命期間， 傅里葉以熱心地方事務而知名， 並因替當時恐怖行爲的受害者申辯而被捕入獄。 出獄後， 他曾就讀於巴黎師範學校， 雖爲期甚短， 其數學才華卻給人以深刻印象。 1795 年， 當巴黎綜合工科學校成立時， 即被任命爲助教， 協助 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 G. 蒙日 (Monge) 從事數學教學。 這一年他還諷刺性地被當作羅伯斯庇爾 (Robespierre) 的支持者而被捕， 經同事營救獲釋。 1898 年， 蒙日選派他跟隨拿破侖 (Napoleon) 遠征埃及。 在開羅， 他擔任埃及研究院的秘書， 並從事許多外交活動， 但同時他仍不斷地進行個人的業餘研究， 即數學物理方面的研究。

1801 年回到法國後， 傅里葉希望繼續執教於巴黎綜合工科學校， 但因拿破侖賞識他的行政才能， 任命他爲伊澤爾地區首府格勒諾布爾的高級官員。 由於政聲卓著， 1808 年拿破侖又授予他男爵稱號。 此後幾經宦海浮沉， 1815 年傅里葉終於在拿破侖百日

王朝的尾期辭去爵位和官職， 毅然返回巴黎以圖全力投入學術研究。 但是， 失業、 貧困以及政治名聲的落潮， 這時的傅里葉處於一生中最艱難的時期， 由於得到昔日同事和學生的關懷， 爲他謀得統計局主管之職， 工作不繁重， 收入足以爲生， 使他得以繼續從事研究。

1816 年， 傅里葉被提名爲法國科學院的成員。 初時因爲其與拿破侖的關係而爲路易十八所拒。 後來事情澄清， 於 1817 年就職科學院， 其聲譽又隨之迅速上升。 他的任職得到了當時年事已高的 P. S. M. de 拉普拉斯 (Laplace) 的支持， 卻不斷受到 S. D. 泊松 (Poisson) 的反對。 1822 年， 他被選爲科學院的終身秘書， 這是極有權力的職位。 1827 年， 他又被選爲法蘭西學院院士， 還被英國皇家學會選爲外國會員。

傅里葉一生爲人正直， 他曾對許多年輕的數學家和科學家給予無私的支持和眞摯的鼓勵， 從而得到他們的忠誠愛戴， 並成爲他們的至交好友。 在他幫助過的科學家中， 有知名的 H. C. 奥斯特 (Oersted)、 P. G. 狄利克雷 (Dirichlet)、 N. H. 阿貝爾 (Abel) 和 J. C. F. 斯圖姆 (Sturm) 等人。 有一件令人遺憾的事， 就是傅里葉收到 É. 伽羅瓦 (Galois) 的關於群論的論文時， 他已病情嚴重而未閱， 以致論文手稿失去下落。

傅里葉去世後， 在他的家鄉爲他樹立了一座青銅塑像。 二十世紀以後， 還以他的名字命名了一所學校， 以示人們對他的尊敬和紀念。

傅里葉的科學成就主要在於他對熱傳導問題的研究， 以及他爲推進這一方面的研究所引入的數學方法。 早在遠征埃及時， 他就對熱傳導問題產生了濃厚的興趣， 不過主要的研究工作是在格勒諾布爾任職期間進行的。 1807 年， 他向科學院呈交了一篇很長的論文， 題爲 “熱的傳播” (*Mémoire sur la propagation de la chaleur*)， 內容是關於不連結的物質和特殊形狀的連續體 (矩形

的、 環狀的、 球狀的、 柱狀的、 稜柱形的) 中的熱擴散 (即熱傳導， 筆者註) 問題。 其基本方程是

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=k\frac{\partial v}{\partial t}\text{ ，} \tag{1}$$

這是三維情形。

在論文的審閱人中， 拉普拉斯、 蒙日和 S. F. 拉克羅阿 (Lacroix) 都是贊成接受這篇論文的。 但是遭到了拉格朗日的強烈反對， 因爲文中所用如下的三角級數 (後來被稱爲傅里葉級數)

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\bigg[&\cos rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos rtdt \\ &+\sin rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin rtdt\bigg] \end{aligned} \tag{2}$$

表示某些物體的初溫分佈與拉格朗日自己在十九世紀五十年代處理弦振問題時對三角級數的否定相矛盾。 於是， 這篇文章爲此而未能發表。 不過， 在審查委員會給傅里葉的回信中， 還是鼓勵他繼續鑽研， 並將研究結果嚴密化。

爲了推動對熱擴散問題的研究， 科學院於 1810 年懸賞徵求論文。 傅里葉呈交了一篇對其 1807 年的文章加以修改的論文， 題目是 "熱在固體中的運動理論" (*Theorie du mouvement de chaleur clansles corps solides*)， 文中增加了在無窮大物體中熱擴散的新分析。 但是在這一情形中， 傅里葉原來所用的三角級數因具有周期性而不能應用。 於是， 傅里葉代之以如下的積分形式 (後來被稱爲傅里葉積分)：

$$\pi f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{0}^{\infty}\cos q(x-t)dq\text{ 。} \tag{3}$$

這篇論文在競爭中獲勝， 傅里葉曾獲得科學院頒發的獎金。 但是評委 — 可能是由於拉格朗日的堅持 — 仍從文章的嚴格性和普遍

性上給予了批評， 以致這篇論文又未能正式發表。 傅里葉認爲這是一種無理的非難， 他決心將這篇論文的數學部分擴充成爲一本書。 他終於完成了這部書：《熱的解析理論》(*Théorie anatylique de la chaleur*)， 於 1822 年出版。 他原來還計劃將論文的物理部分也擴充成一本書， 名爲《熱的物理理論》(*Théorie physique de la chaleur*)。 可惜這個願望未能實現， 雖然處理熱的物理方面的問題也是他得獎論文的重要內容， 而且在他的晚年的研究工作中甚至是重要的內容。

《熱的解析理論》是記載著傅里葉級數與傅里葉積分的誕生經過的重要歷史文獻， 在數學史， 乃至科學史上公認是一部劃時代的經典性著作。 然而， 對於傅里葉在數學上和數學物理上工作的具體評價， 歷來衆說紛紜。 有些人只注意了傅里葉級數和傅里葉積分本身的推導， 從非當代的嚴格性標準來要求他。 實際上， 要全面地理解傅里葉的成就， 還應該注意到以下兩個方面： 一是他把物理問題表述爲線性偏微分方程的邊值問題來處理， 這一點， 連同他在單位和量綱方面的工作， 使分析力學超出了 I. 牛頓 (Newton) 在《原理》(*Principia*) 中所規定的範疇。 二是他所發明的解方程的強有力的數學工具產生了一系列派生學科， 在數學分析中提出了許多研究課題， 極大地推動了十九世紀及以後的數學領域中的第一流的工作， 並且開拓了一些新的領域 (見後文)。 況且， 傅里葉的理論和方法幾乎滲透到近代物理的所有部門。

傅里葉在《熱的解析理論》這部基本著作中， 寫進了他差不多所有有關的工作， 而且在此書的各個版本中幾乎絲毫未加更動， 因此， 把這些內容與其它沒有發表的、 爲人引述的、 散見於各處的資料聯繫貫串起來， 就可以切實地概現他的全部研究成果， 以及他表述和處理問題的風格。 同時， 通過這些材料， 也可以看出， 在某些關鍵之處， 傅里葉未能克服的困難和他失敗的原因。

傅里葉在熱的分析理論方面的第一件工作中，採用了這樣的模型：熱是由分立粒子間的穿梭機制傳送的，其物理理論是簡單的混合過程，所用數學屬於十八世紀五十年代。在他所從事研究的問題中，其一是關於排列在一圓環上的 n 個粒子。他獲得在 n 爲有限的情形下的完全解。他想把結果推廣到連續的情形，未能成功，因爲當 n 無限增大時，指數上的時間常數趨於零，從而使所得的解與時間無關。後來他才明白應如何修正的傳輸模型以避免這一反常的結果。此外，在他集中注意於完全解及其困難時，他未能意識到，當 $t = 0$ 時，他的解給出一個內推公式，可用以得到連續情形下的傅氏級數。(拉格朗日前此之所以未能發現傅氏級數也可類似地來解釋，而並非像通常所認爲的那樣，是由於顧慮到嚴格性所致。)

傅里葉成功地建立了熱傳導方程可能是得益於 J. B. 畢奧 (Biot) 早先關於金屬條中的穩定溫度的工作，畢奧區分了體內傳導和體外輻射。但是畢奧的分析，由於用了一個錯誤的物理導熱模型而導出一不正確的方程。傅里葉則因構建了較好的物理模型而克服了困難，容易地獲得一、二維情形下充分顯示與時間的關係的類似於 (1) 這一型的方程。

傅里葉的傑作是選擇這樣一種情形的問題來應用他的方程的，即一條半無窮的帶，一端是較熱的均勻溫度，沿其邊則是較冷的均勻溫度；具有極其簡單的、導源於伯努利兄弟 (Bernoullis) 和 L. 歐拉 (Euler) 的分析力學傳統中的物理意義。穩定情形無非就是笛卡兒坐標下的拉普拉斯方程。傅里葉可能試用過複變函數方法 (這樣的解見於他的《熱的解析理論》一書)。但其後就用分離變數法得到了級數解和以下邊界條件的方程

$$1 = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \cos rx \text{ 。} \tag{4}$$

用無窮矩陣的方法來求方程 (4) 的解，並將它推廣到任意函數

$f(x)$， 這一工作曾屢次遭受評議。 但不應忘記， 這一工作是在柯西 − 魏爾斯特拉斯 (Cauchy-Weierstrass) 的正統理論建立之前幾十年做的。 傅里葉不是一個頭腦簡單的形式主義者； 他精於處理有關 “收斂” 的問題， 在他討論鋸齒形函數的級數表示時就顯示出了這種能力。 有關傅里葉級數的收斂性的幾種基本證明， 例如狄利克雷的證明， 其主要思想均可在傅里葉的著作中找到。 而且， 比任何人更早， 他已看到， 在計算傅氏級數的係數時， 對一給定的三角級數逐項積分， 是不能保證其正確性的。

傅里葉的三角級數展開的使人震驚之處在於， 他示明一種似乎是矛盾的性質： 在一有限區間內， 完全不同的代數式之間的相等性。 對於很廣泛的一類函數中的任何一個函數， 都可以相應地造出一個三角級數， 它在指定的區間內具有與這函數相同的值。 他用例子說明， 那給定的函數甚至可以在基本區間內分段有不同的代數表示式。 雖然三角級數展開和任意函數兩者都曾爲其他人 (包括泊松) 用過， 但前者只限於有關周圍現象的問題， 而後者， 當作爲偏微分方程的解出現時， 由於其性質， 是假定不可能用代數式表示的。

關於傅里葉這一首次成功的研究結果的早期記載， 說明了這個結果的生命力和他本人對此成果的驚異。 在他的工作中， 有受到蒙日影響的痕跡， 如用曲面表示解， 以及確定方程的解的邊界值的分離表示。 此後， 傅里葉滿懷信心地進入了新的領域。 在三維情形遇到了一些困難， 但把原方程分爲兩個方程就解決了。 這兩個方程， 一個與內部傳導有關， 一個則與表面上的溫度梯度所產生的輻射有關。 應用於球體時運用球坐標， 結果是一非諧的三角級數展開， 其中的本徵值是一超越方程的諸根。 傅里葉運用他關於方程論的知識， 論證了這些根的實數性。 當然， 這一問題曾使他困惑了多年。 在圓柱體的熱傳導問題中他又作了進一步的推廣， 其傅里葉解就是如今所稱的巴塞耳 (Bessel) 函數。 所用的技

巧由傅里葉後來的同事 J. C. 佛朗索 (François)、 斯圖姆和 J. 劉維爾 (Liouville) 全面地予以普遍化。

在研究沿一條無窮長的線上的熱傳導問題時發展出來的傅里葉積分理論， 可能是基於拉普拉斯把熱擴散方程的解表示爲一任意函數的積分變換的思想， 這函數表示初始的溫度分佈。 傅里葉通過對有限區間中級數展開的推廣， 分別導出了對原點是對稱的和反對稱的情形之下的餘弦和正弦變換。 逐漸地他才認識到， 把一給定的函數分解爲偶函數和奇函數的普遍性。

傅里葉在這方面的創造性工作於 1817 – 1818 年間又最後一次綻發光輝， 他成功地洞察到積分變換解與運算微積之間的關係。 當時， 傅里葉、 泊松、 柯西之間形成了三足鼎立之爭。 後二人於 1815 年已開始運用這樣的技巧， 但是傅里葉針對泊松的批評給予了摧毀性的反擊。 他展示了幾個方程的積分變換解， 這幾個方程是長期以來未能得到分析的， 同時他還指出了導致系統理論之門徑。 其後， 柯西運用複變函數中的殘數 (residue) 理論也獲得了同樣的結果。

作爲一位數學家， 傅里葉對於實際問題中的嚴格性的關心， 不亞於除柯西和阿貝爾以外的任何人。 但他未能想到極限理論本身的重要意義。 在對他 1811 年獲獎論文的評議中， 關於缺乏嚴格性和普遍性的批評， 長久以來是被誤解了。 那些批評， 其動機有許多是帶有非學術成分的。 泊松和畢奥， 是在熱擴散理論方面被他超過的勁敵， 多年來總是力圖貶低傅里葉的成就。 關於嚴格性的批評， 可能是根據泊松的觀點， 即認爲在球形問題中出現的本徵值未能證明是實數， 而複數根將導致在物理上是不可能的解。 (泊松自己在數年後爲傅里葉解決了這一問題。) 所謂傅里葉級數解 (2) 缺乏普遍性， 可能是將它同拉普拉斯早先得到的積分解對比， 而在後者中， 被積函數清楚地含有任意函數。

傅里葉的機智在於分析力學方面。 他對分析技巧和符號表示

極爲精通， 例如， 定積分符號 $\int_a^b$ 就是他發明的。 這種能力， 加上他的物理直觀力， 使他的研究能夠獲得成功。 在他之前， 分析力學中出現的主要方程常是非線性的， 所用解法都是專設的近似法。 當時， 微分方程領域也像是一個尚無通路的叢林。 傅里葉爲解偏微分方程創造了和說明了一種連貫的方法， 即可以把一個方程及其級數解按照不同的物理情況清楚地分離爲不同的分部來加以分析。 我國數學家、 微分方程方面的著名學者申又棖教授 (1901 − 1978) 曾經說： 傅里葉的創造， 是給各種類型的偏微分方程 (波動方程、 擴散方程、 拉普拉斯方程等) 提供了一種統一的求解方法， 就好比從前解 “四則問題” 時， 各種難題有各種解法， 而運用代數方程以後， 就有了統一的簡便的解法。 這個比喻， 很好地形容了傅里葉的方法在微分方程領域的重要意義和廣泛的實用價值。 事實上， 傅里葉的方法是如此之強有力， 以致過了整整一個世紀。 非線性微分方程才重新在數學物理學中突起。

對傅里葉來說， 每一數學陳述 (儘管不是形式論證中的每一中間階段) 都應有其物理含意， 包括展示眞實的運動和能夠 (至少原則上) 被測量兩個方面。 他總是如是地說明他的解， 使所得到的極限情況能爲實驗所檢驗， 而且一有機會他就自己動手來作實驗。

傅里葉早年草設的物理模型雖很粗糙， 但在他 1807 年所寫的文章裡， 就已全面地把一些物理常數揉進他的熱傳導理論中。 對物理意義的關注， 使他看到在他的形式技法中所存在的潛力， 能檢驗在傅里葉積分解的指數上出現的成群的物理常數的相關性。 由此出發， 他得出了關於單位和量綱的全面理論， 雖然其中一部分是 L. 卡諾 (Lazare Carnot) 曾預期到的。 這是自伽利略以來在物理量的數學表示理論方面第一個有成效的進展。 與他同時代的人， 如畢奥， 在同一問題上的混亂情形相比， 就更顯示出傅里葉的成就。

雖然傅里葉多年從事熱的物理理論的研究。 但是他最初基於

熱輻射現象方面的貢獻卻未能存在長久。 他對他的理論的各種應用都很關心， 諸如對溫度計的作用和房間供暖問題的分析， 以及最重要的、 對地球年齡下限首次作出的科學的估算等。 令人不解的是， 傅里葉相信熱作爲宇宙中的首要媒介的重要性， 但他似乎對於熱作爲一種動力方面的問題卻不感興趣， 以致對 S. 卡諾 (Sadi Carnot， 是 L. 卡諾的兒子) 有關熱動力問題的著名論文毫無所知。

和傅里葉的著名的熱傳導問題的成就相比， 他在數學的其它方面的工作就鮮爲人知了。 首先是他對方程論有著長時間的濃厚興趣。 早在十六歲時他就作出了對笛卡兒正負號法則的一個新證明。 這一法則可表述如下：

設 $f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ ， 則 $f(x)$ 的諸係數具有一系列正負號。 如果把同號的兩相鄰係數稱爲 “不變”， 異號的稱爲 “變”， 那麼 $f(x)$ 的正 (或負) 根的數目最多等於序列中 “變” (或 “不變”) 的數目。

傅里葉的證明方法是這樣的： 以 $(x+p)$ 乘 $f(x)$， 得一新的多項式， 它比 $f(x)$ 多了一個係數， 使係數序列中多了一個正負號， 同時多了一個正 (或負) 根 p ； 並且可以看出係數序列中 “變” (或 “不變”) 的數目至少增加 1 個。 因爲傅里葉的這一成果很快就成爲標準的證法， 所以證明的詳情可見於任何一本講述這一法則的教科書， 雖然人們未曾知道這一證法的發明者就是青年傅里葉。

傅里葉還把笛卡兒法則推廣到估計在一給定區間 $[a,\ b]$ 內 $f(x)$ 的實根數， 並於 1789 年向科學院遞交了一篇文章， 其中有他對自己的定理的證明， 可惜文章在巴黎那革命動盪的年代裡丟失了。 大約 30 年後這篇文章才得以發表。 由於另一位兼職數學家比當 (Ferdinand Budan de Bois-Laurent) 也發表過類似的結果， 所以關於在給定區間內 n 次代數方程的實根數的判定法， 後來被稱爲傅里葉 - 比當定理。 直到傅里葉逝世之前， 他始終沒有中斷

過方程論方面的研究， 並且計劃寫出一部七卷本的專著：《方程判定之分析》(*Analyse des équations déterminées*)。 他已寫出頭兩卷， 但他預感到生前大概不可能完成這部著作， 於是寫了一個全書提要。 1831 年， 即他逝世的第二年， 由他的友人納維 (Navier) 將這部未完成的著作編輯出版。 從全書提要中， 可以看出傅里葉對方程論有過十分廣泛的研究。 其中最重要的是各種區分實根和虛根的方法， 對牛頓 − 拉弗森 (Raphson) 求根近似法的改進， 對 D. 伯努利求循環級數中相繼項之比的極限値的法則的推廣 ··· 等等。 由於傅里葉還有線性不等式的求解法和應用方面的工作以及他對這一問題的出衆的理解， 因而也被後人稱爲線性規劃的先驅。

在傅里葉的最後的歲月裡， 當他主持統計局的工作時， 他的研究接觸到概率和誤差問題。 他寫下了一些關於根據大量觀測來估計測量誤差的重要文章， 發表於 1826 年和 1829 年的統計局報告上。

傅里葉對力學問題也作過相當多的探討， 他曾發表過關於虛功原理的文章。

縱觀傅里葉一生的學術成就， 他的最突出的貢獻就是他對熱傳導問題的研究和新的普遍性數學方法的創造， 這就爲數學物理學的前進開闢了康莊大道， 極大地推動了應用數學的發展， 從而也有力地推動了物理學的發展。

傅里葉大膽地斷言： “任意” 函數 (實際上是在有限區間上只有有限個間斷點的函數) 都可以展開成三角級數， 並且列舉大量函數和運用圖形來說明函數的三角級數展開的普遍性。 雖然他沒有給出明確的條件和嚴格的證明， 但是畢竟由此開創出 “傅里葉分析” 這一重要的數學分支， 拓廣了傳統的函數概念。 1837 年狄利克雷正是研究了傅里葉級數理論之後才提出了現代數學中通用的函數定義。 1854 年 G. F. B. 黎曼 (Riemann) 在討論傅里葉級數的文章中第一次闡述了現代數學通用的積分定義。 1861 年魏爾斯特拉斯

運用三角級數構造出來的許多問題直接引導狄利克雷、黎曼、G. G. 斯托克斯 (Stokes) 以及從 H. E. 海涅 (Heine) 直至 G. 康托爾 (Cantor)、H. L. 勒貝格 (Lebesgue)、F. 里斯 (Riesz) 和 E. 費希 (Fisch) 等人在實變分析的各個方面獲得了卓越的研究成果，並且導致一些重要數學分支，如泛函分析、集合論等的建立。傅里葉的工作對純數學的發展也產生了如此深遠的影響，這是傅里葉本人及其同時代人都難以預料到的，而且這種影響至今還在發展之中。

傅里葉之所以能取得富有如此深刻內容的成就，正如撰寫過傅里葉傳記的兩位作者所說：這只有富於生動想像力和具有適合其工作的淸醒的數學哲學頭腦的數學大師才能達到。從傅里葉的著作中，我們看到：他堅信數學是解決實際問題的最卓越的工具，並且認爲 “對自然界的深刻研究是數學發現的最富饒的源泉”。這一見解是傅里葉一生從事學術研究的指導性觀點，而且已經成爲數學史上強調通過研究實際問題發展數學 (包括應用數學和純粹數學) 的一派數學家的代表性格言。

傅里葉的研究成果又是表現數學的美的典型，傅里葉級數被一些科學家稱頌爲 “一首數學的詩”。他的工作還引起了他的同時代的哲學家的重視。法國哲學家、實證主義的創始人 A. 孔德 (Comte) 在《實證哲學教程》(*Cours de philosophie positive*，1842) 中，把牛頓的力學理論和傅里葉的熱傳導理論都看作是實證主義基本觀點在科學中的重要印證。而辯證唯物主義哲學家 F. 恩格斯 (Engels) 則把傅里葉的數學成就與他所推崇的哲學家 G. W. F. 黑格爾 (Hegel) 的辯證法相提並論，他寫道：傅里葉是一首數學的詩，黑格爾是一首辯證法的詩。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Fourier, *The analytical theory of heat* (translated, with notes, by Alexander Freeman), Dover Publications, Inc., 1955。

研究文獻

[2] J. R. Ravetz and I. Grattan–Guinness, *Fourier*, 見 *Dictionary of scientific biogarphy*, Vol. 5, 1972, 93－99。

[3] F. Klein, *Development of mathematics in the 19th century*, Cha. II, Math. Sci. Press, 1979。

[4] J. Herivel, *Joseph Fourier–the man and the physicist*, Clarendon Press, 1975。

[5] M. Arago, *Joseph Fourier*, Annual report of the Smithsonian Institution, 1871。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[7] *The encyclopedia Britannica*, 1980。

[8] H. Eves, *An introduction to the hisdory of mathematics (fourth edition)*, 1976。

[9] E. T. Bell, *Men of mathematics*, Dover Publications, New York, 1937。

[10] H. S. Carslaw, *Introduction to the theory of Fourier series and integrals (third edition)*, 1930。

[11] A. Zygmund, *The role of Fourier series in the development of analysis*, Historia Math., 2 (1975), 4。

[12] 王青建， 傅里葉 — 一位受人敬重的科學家， 數學的實踐與認識， 1988， 2， 第 85－89 頁。