

高 斯

高斯， C.F. (Gauss， Carl Friedrich) 1777 年 4 月 30 日生於德國不倫瑞克； 1855 年 2 月 23 日卒於格丁根。數學、天文、物理、大地測量。

高斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gauss.html>

高 斯

袁 向 東

(中國科學院數學研究所)

高斯，C.F. (Gauss，Carl Friedrich) 1777年4月30日生於德國不倫瑞克；1855年2月23日卒於格丁根。數學、天文、物理、大地測量。

高斯出生在一個普通城市工人家庭。其父親格布哈德·迪特里希·高斯 (Gebhard Dietrich Gauss) 受教育不多，但能寫會算，爲人勤奮，靠手藝維持家庭生計，做過園林工人、運河工人、街道小販，還出任過喪葬機構的會計。據說迪特里希·高斯雖忠厚卻性情暴躁，在家尤爲專制。小高斯是他第二個妻子的獨子。高斯的母親多羅西婭·本茨 (Dorothea Benze) 出身石匠家庭，聰慧而善良，能讀但不會寫，婚前在一個貴族家當女僕，在其夫去世後長期隨高斯生活，母子相伴，直到九十六歲謝世。多羅西婭的弟弟天份頗高，是高斯長輩中智力最突出的一位，他靠自己鑽研成爲藝術錦緞的著名織匠。

高斯幼年時的生活跟當時一般市民家的孩子雷同。有一個故事說因父母爲生計奔波，小高斯有時無人照料，大約在三或四歲時，曾墮入離家不遠的運河，幾乎溺死。另一個故事說高斯自幼對數字有特殊的敏感，在三歲時就發現過父親算賬時的計算錯誤。這些故事大都是高斯晚年對人談起起的。高斯成年後還常對人說，他在學會說話前就會計算了。

高斯接受教育的狀況受制於當時德國的社會背景。他出生的城市不倫瑞克是座古城，在十七世紀初仍是能跟漢堡和阿姆斯特丹相媲美的貿易中心。後因城市民衆暴動和歐洲三十年戰爭的破壞而

衰落。1671 年它失去政治獨立地位，併入不倫瑞克－沃爾芬比特爾（現德國下薩克森州）公爵領地；1673 年成為該領地的首府。在十八世紀，它像其它德國城邦一樣，經濟狀況落後於資本主義蓬勃發展中的英國和法國。高斯降生時不倫瑞克的統治者是 C.W. 費迪南德（Carl Wilhelm Ferdinand）公爵，一位久經沙場的貴族；他按傳統的封建方式管理他的領地：典型的特徵是以農業為其財政的主要來源，並保護組織起來的個體織匠抵制紡織機械的使用。他在教育方面雖未實行義務教育，但他的大多數臣民都能識字並掌握一些初等算術知識。至於社會下層有天賦的兒童要想獲得較高的教育，則非有貴族、富商或其他有影響的監護人的資助不可。

1784 年，高斯像普通市民的孩子一樣入小學讀書。他進的聖凱瑟琳小學給他帶來了好運。該校教師 J.G. 比特納（Büttner）稱職而熱心，他教的班由五十多名年齡各異、原有知識參差不齊的學生組成；比特納發現高斯才智出衆，特意從漢堡弄來一本算術教科書給高斯讀。一個故事說，一次高斯在班上幾乎不加思索就算出了 $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ 的和，令比特納驚訝不已。當時任比特納助手的 M. 巴特爾斯（Bartels）只比高斯大八歲，酷愛數學（後到俄國喀山大學任教授，是非歐幾何創立者之一羅巴切夫斯基的老師），對高斯的數學才能特別器重，他們常在一起討論算術和代數問題。

高斯的父親不希望兒子繼續升中學讀書。讓子女讀書並非當地工人階層的風尚；讀小學時，高斯晚上經常秉父命上織機織布。經老師們的幫助，高斯於 1788 年進入預科學校（相當於現在的中學），這裡班級的編排較正規，但課程頗顯陳舊，而且過份強調古典語言特別是拉丁語的教學。高斯的目標是學術上的深造，當時的人文學科特別是科學經典都是拉丁文寫的，於是充分利用學校的條件攻讀拉丁語，不久成績就名列前茅。他還學會了使用高地德語（路德翻譯聖經用的那種德語，即現在的標準德

語) , 高斯原來只會用本地方言。至於他的數學程度，教師在看了他的第一次數學作業後便認為，高斯已沒有必要上該校的數學課了。

1791 年，位於不倫瑞克的卡洛琳學院的教授 E.A.W. 齊默爾曼 (Zimmermann) 向費迪南德公爵引介了十四歲的天才少年高斯。公爵接見高斯時為他的樸實和靦腆所動，欣然應允資助高斯的全部學業。此後，高斯在經濟上便獨立於父母，父親也不再反對兒子的繼續深造。

1792 年，高斯入家鄉的卡洛琳學院 (Brunswick Collegium Carolinum) 學習，開始脫離家庭的獨立生活。這所學校不同於普通的大學，它由政府直接興辦和管理，目標是培養合格的官吏和軍人，在德國各城邦的類似學校中屬於最優秀之列，其教學強調科學方面的科目。高斯在校的三年間，全身心地投入學習和思考，獲得了一系列重要的發現：入學前他就研究算術－幾何平均 (1791)，此時發現了它和其它許多幕級數的聯繫 (1794)；發現最小二乘法 (1794)；考慮了幾何基礎問題，即平行公設在歐幾里得幾何中的地位 (1792)；由歸納發現數論中關於二次剩餘的基本定理，即二次互反律 (1795)；研究質數分佈，猜想出質數定理 (1792)。在這一時期，貫穿高斯一生的研究風格的一個重要方面已趨成熟：不停地觀察和進行實例剖析，從經驗性質的研究中獲得靈感和猜想。高斯在學院學習期間還開始了對數學經典著作的鑽研，閱讀了 I. 牛頓 (Newton) 的《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*)、L. 歐拉 (Euler) 的代數與分析著作和 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的若干論著以及雅格布・伯努利 (Jacob Bernoulli) 的《猜度術》(*Ars conjectandi*) 等。

高斯的志向不是謀取官吏的職位，而在於他最喜好的兩門學問：數學和語言。1795 年，他離開費迪南德公爵管轄的領

地，到格丁根大學就讀。格丁根大學的辦學方式追隨英國的牛津和劍橋大學，資金較其他德國大學充裕，較少受政府和教會的管理干涉。高斯選中這所大學另有兩個原因。一是它有藏書(尤其是數學書)極豐的圖書館；二是它有注重改革、側重科學的好名聲。當時的格丁根對學生可謂是個“四無世界”：無必修科目、無指導教師、無考試和課堂的約束、無學生社團。高斯完全在學術自由的環境中成長，將來從事什麼職業完全由他自己抉擇。入學初期，語言學家 G. 海涅 (Heyne) 對高斯的吸引力超出了數學家 A.G. 卡斯滕納 (Kästner) 對他的影響；是作數學家還是語言學家可能曾在高斯腦際徘徊。有兩個支持這種看法的旁證：高斯到校第一年所借閱的二十五本書中，僅有五本科學著作，其餘皆屬人文學科，而且高斯終其一生始終未改對語言和文學的愛好；那個時代以數學為職業者收入不豐，高斯當時仍在靠公爵的補貼生活，尋求有較高收入的職業是高斯一生中經常考慮的問題。

1796 年是高斯學術生涯中的第一個轉折點：他敲開了自歐幾里得時代起就迷惑著數學家的尺規作圖這一難題的大門，證明了正十七邊形可用歐幾里得型的圓規和直尺作圖。這一成功最終決定了他走科學之路而非文學之路，高斯真正認識了自己的能力之所在。在註明 3 月 30 日的“科學日記”中，高斯寫道：“圓的分割定律，如何以幾何方法將圓分成十七等分”。所謂“科學日記”是 1898 年偶然在高斯的孫子的財產中發現的一本筆記；高斯在上面記錄他的衆多科學發現，並稱之為 (Notizen journal) (日誌錄)。日記中簡要記載著他自 1796 年至 18144 年間的共 146 條新發現或定理的證明。由於高斯的許多發現終身沒有正式發表，這本日記成了判定高斯學術成就的重要依據。

在格丁根學習期間，高斯在日記中記錄了許多重要信息：

1796 年 4 月 8 日，得到數論中重要定理二次互反律的第一個嚴格證明；

1797 年 1 月 7 日，開始研究雙紐線；

1797 年 3 月 19 日，認識到在複數域內，雙紐線積分具有雙週期；

1797 年 5 月，由實例計算得到算術－幾何平均和雙紐線長度間的一些關係 (雙紐線函數是橢圓函數的一種)；

1797 年 10 月，證明了代數基本定理。

1798 年秋，高斯突然離開格丁根回到故鄉，原因不詳，很可能是費迪南公爵不願由他資助的學生在他所轄的領地之外的大學獲取文憑。正是在公爵的要求下，高斯於 1799 年接受了海爾姆斯台特 (Helmstedt) 大學的博士學位，名義上的導師是 J.F. 普法夫 (Pfaff)，當時德國最負盛名的數學家，高斯在格丁根求學期間曾訪問過他，但尚不知他們之間有無學術上的聯繫。[有一則故事表明他們二人在數學界的地位。在高斯成名後，他的好友 A. 洪堡 (Humboldt) 曾詢問法國大數學家、力學家 P.S.M. 拉普拉斯 (Laplace) 誰是德國最偉大的數學家。拉普拉斯答是普法夫，洪堡驚愕之餘追問道：那麼高斯呢？拉普拉斯戲謔地說：高斯是全世界最偉大的數學家!] 高斯博士論文的題目很長：“單變量有理整代數函數皆可分解為一次或二次式的定理的新證明” (*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algelraicam rationalem integrum unius variabilis in factores reals primi vel secundi gradus resolvi posse*，1799 年 8 月在公爵資助下出版)。高斯在給他大學時的同學 W. 波爾約 (Bolyai) 的信 (1799 年 12 月 16 日) 中說：“題目相當清楚地講明了文章的主要目的，雖然它只佔篇幅的三分之一，其餘是講述歷史和對其他數學家 [J.R. 達朗貝爾 (d'Alembert)、L.A. de 布干維爾 (Bougainville)、歐拉、拉格朗日等] 相應工作的批判，以及關於當代數學之膚淺的各種評論。”此文反映了高斯研究風格的另一個方面：強調嚴密的邏輯推理，這是區別於十八世紀大部分數學家的高斯風格的主要特

證。在此論文中，他並未具體構造出代數方程的解，而是一種純粹的存在性證明。這類證明此後便在數學中大量湧現，還應指出，他的證明雖然必須依賴複數，但因當時的數學家仍在為虛數的本質爭論不休，所以高斯儘量避免直接使用虛數的一一對應，而將論及的函數分為實部和虛部分別加以討論。高斯的證明也並非在邏輯上完美無缺，如他視連續函數的一些性質自然成立而未加證明 [這些性質後來為捷克數學家 B. 波爾查諾 (Bolzano) 首先證明]。高斯可能認識到這一問題，此後又給出了代數基本定理的另外三個證明 (1815、1816、1849)，最後的證明是為慶祝他獲博士學位五十週年而作，方法跟博士論文基本一致，只是“現在大家都認清了複數是什麼”，所以他直接運用了複數。

自 1796 年解決正十七邊形到 1801 年，是高斯學術創造力最旺盛的時間。按數學史家 O. 梅 (May) 統計，在這六年間 (十九歲 – 二十四歲) 高斯提出的猜想、定理、證明、概念、假定和理論，平均每年不少於 25 項，其中最輝煌的成就是 1801 年發表的《算術研究》(*Disquisitiones arithmeticæ*)，它把過去一直是零星成果堆砌成的數論，織成一張結構緊湊、自成系統的網；以及在 1801 年中根據少量觀測數據準確預報小行星“谷神星”的運行軌跡。天文學是當時科學界最關注的課題，高斯的這項預報引起了轟動。上述兩項成就使他不僅在數學界而且在科學界一舉成名。

1802 年初，聖彼得堡科學院聘高斯為外籍院士；同年 9 月又邀請他出任聖彼得堡天文台台長，這是極崇高的榮譽。高斯出於對公爵的忠心，也因公爵打算為他創造更好的工作條件 (計劃專為高斯在不倫瑞克修建小天文台) 並給他加薪，高斯最終決定留在家鄉。

此後，高斯雖從未完全放棄對數論、代數、幾何及分析學的研究，但其主要精力和時間逐步轉向更有實際效用的科學，如天文學、測地學、物理學和應用數學。學術研究重點的轉移也帶來

了高斯結交朋友方面的轉折。高斯在純數學的研究中是相當孤獨的，沒有同事和助手，即使在他創作高峰期也幾乎未進行過直接的學術交流。W. 波爾約雖是跟高斯有過長達五十年通信聯繫的數學家，但未見他們在數學思想上的深入討論。唯一的例外是法國女數學家 S. 热爾曼 (Sophie Germain)，她曾化名男子和高斯通信 (1804 – 1805) 討論數論問題，二次互反律的一個證明就跟她的想法有關。但是，在天文學界和物理學界，高斯卻有不少摯友，他們不僅切磋學術，而且過往甚密。現存的 7000 多封高斯的通信中，跟這些人的信件佔極大比例。

1802 – 1803 年間，高斯先後訪問了 W. 奧爾貝斯 (Wilhelm Olbers) 博士 [醫生兼天文學家，1802 年發現了小行星“小惑星” (Pallas)] 和著名天文學家 F. 查赫 [Zach，為當時德國最著名的塞堡 (Seeberg) 天文台的台長，1801 年 12 月 7 日晚第一個在高斯預報的位置上重新觀測到谷神星]，討論了天文和大地測量問題，從此高斯開始了天文觀測和野外測量。奧爾貝斯為堵絕聖彼得堡良好的工作條件對高斯的引誘，提議由高斯出任正在籌備中的格丁根新天文台的台長 (1804 年此建議得到格丁根方面的確認)。1804 年底，高斯又開始跟年輕的 F.W. 巴塞耳 (Bessel，後成為一流的理論及實用天文學家) 進行維持終身的通信。據現存信件可知，高斯的長期通信者還有 C.L. 格林 (Gerling，物理學家，高斯的學生)，H.C. 舒馬赫爾 (Schumacher，天文學家，高斯的學生) 和 J.G. 雷普索爾德 (Repsold，儀器製作家，曾和高斯控討消色差雙物鏡鏡片的設計等問題)。

1805 年，高斯跟製革商的獨生女約翰娜 · 奧斯多夫 (Johanna Osthoff) 結為伉儷。此次婚姻頗為美滿，得二子一女，高斯分別以三個小行星發現者的名字為他們的教名。跟寧靜的家庭生活相悖的是政治環境的驟變。自 1789 年法國大革命後，德法之間爆發了多次短期戰爭。為扼制拿破崙在中歐的擴張，德國最主要的部分

普魯士決定加強跟法國的對抗。1806年，曾任普魯士將軍的費迪南德公爵率部與法軍決戰，七十多歲的沙場老將在戰鬥中負了致命傷，同年11月死於阿爾唐納(Altona)，這意味著高斯失去了經濟來源，從此必須完全靠自己的努力維持生計。

1807年，高斯攜全家遷往格丁根，出任格丁根天文台台長(實際上新天文台尚在建設中，他須親自為其購置儀器設備)，同時擔任格丁根大學天文學教授。高斯選擇台長為其主職，教授只為次職，這跟他不喜歡當時的教學有關。1802年高斯在致奧爾貝斯的信中說過：“我真的不喜歡教課……對真正有天賦的學生，他們絕不會依賴課堂上的傳授，而必是自修自學的……做這種不值得感謝的工作，唯一的代價是教授浪費了寶貴的時間。”在以後的通信中，可看出他對當時大多數學生無鑽研興趣、很少或根本沒有學習動力，甚至有的學生缺少必要的常識不滿。至於對稟賦好的學生，高斯願意“偶爾給他一點提示，以便他找到最近的路。”

格丁根原屬漢諾威公國，此時已劃歸法國控制下的西伐利亞王國(1814年漢諾威公國復辟後，格丁根才擺脫法國統治)。法國政府徵收的高額賦稅給了高斯當頭一棒，他無力籌足大學教授須交的法幣。德、法兩國的多名才學聞訊主動伸出援助之手，均遭到高斯婉拒；最後是一位匿名者替他交納了全部稅金[後知此人是法蘭克福的大主教達爾貝格(Dahlberg)伯爵，曾任羅馬帝國的重臣]。法國入侵，費迪南德公爵戰死，加上此次徵稅，無形中加深了高斯在政治上的保守傾向，縱觀其一生，他對政治上的變革或激烈行為都持旁觀或反對的態度。高斯到格丁根後受的第二次打擊是愛妻在生第三個孩子時難產，不久便去世了(1809年10月)。時隔不到半年，新生兒也夭折而去。高斯以獨有的克制精神和毅力，很快從沮喪中復原。為了正常的生活和工作，為讓不滿四歲的兒子和剛二歲的女兒得到照顧，高斯於1810年8月跟格丁根大學法學教授的小女兒米納·沃爾德克(Minna Waldeck)成婚。第二次

婚姻也得二子一女：歐根納 (Eugene)、威廉 (Wilhelm) 和女兒特雷澤 (Therese)。在這一非常時期，高斯完成並發表了他的理論天文學方面的名著《天體圓錐曲線的繞日運動理論》(*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*)，闡述他預測天體軌跡的方法，首次發表他的最小二乘法，提出現稱高斯分佈的著名統計規律。

1814 年，格丁根天文台新址基本建成。為配置最好的望遠鏡等設備，高斯多方奔走，如於 1816 年赴巴伐利亞會見光學儀器製造家 G. von 賴興巴赫 (Reichenbach) 等，買到了他最中意的裝備。1818 年，高斯發表了“確定行星對任意點的引力，假定行星質量按上述比例均勻分佈在它的整條軌跡上，即每一部分軌跡上的質量正比於行星通過該段軌跡所用的時間”(*Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta si eius massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispartita*)，文中利用橢圓積分、算術－幾何平均等工具探討了困難的天體攝動問題。該文是高斯結束其理論天文學研究的標誌，此後他的天文研究主要在天文觀測，記錄特殊天象，計算並報告他對觀測數據的分析，親自調試儀器以達到最佳觀測條件，一直到 1854 年他最後病倒為止。

高斯退出理論天文學研究的一個原因是大地測量工作引起了他的興趣。1815 年前後，中歐各重要國家出於經濟和軍事目的，紛紛開始大規模的大地測量。1816 年，舒馬赫爾應丹麥政府之請，測繪全丹麥的地理形狀，他請高斯協助。在一系列準備之後，高斯於 1818 年正式同意擔負將丹麥的測地工作向南延伸，並開始參加艱苦的夏季野外測繪，冬季則對所獲數據進行分析整理。1820 年，漢諾威政府正式批准高斯對漢諾威全境作地理測量的計劃，任命高斯為實施計劃的負責人。1818 至 1825 的八年間，高斯請他前妻所生之子約瑟夫 (Joseph) 和若干軍人為野

外考察的助手，工作井然有序，表現了高斯的組織才能。高斯動用軍人的理由是“農夫們尊敬軍官”，“軍隊管理中的紀律和秩序對任何事情都有益而無害”。為提高測量精度，高斯發明了“日光反射信號器”(1820) 和光度計(1821)。至於實測數據彙集後的計算，幾乎由高斯一人承擔。他每年撰寫的測地報告後彙集於《利用拉姆斯登 (Ramsden) 儀器觀測所確定的格丁根與阿爾唐納兩天文台之經度差》(*Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona durch Beobachtungen am Ramsdenschen Zenithsector*，1828)。長年的勞累損傷了高斯強壯的體魄；1825年醫生診斷他患有氣喘病和心臟病，迫使他停止了野外作用。此後高斯仍指揮整個計劃的執行，並於1847年完成漢諾威全境的測量。

高斯全力關注測地工作的十年(1818–1828)，是他創造活動的又一個高峰期。高斯在1825年致奧爾貝斯的一封信中說，他這些年未能把充斥腦際的許多思想加以實現，儘管如此，他的兩項理論成果已成永垂青史之作。1822年，丹麥哥本哈根科學院設獎徵答地圖制作中的難題，高斯以“將給定凸面投影到另一面而使最小部分保持相似的一般方法”(*Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*，1825年出版)於1823年獲頭獎。此文在數學史上首次對保形映射作了一般論述，建立了等距映射的離形。1827年，高斯寫成《曲面的一般研究》(*Disquisitiones generales circa superficies curvas*，1828年出版)，這是他積十多年思考測地問題所得之精萃，提出了內蘊幾何的新觀念，成為此後長達一個多世紀微分幾何研究的源泉。測地問題中的大量計算也推動高斯完善他的最小二乘法和對統計規律的嚴格研究，如他的《與最小可能誤差有關的觀測值的組合理論》(*Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae I*

& II, 1823), 以數學的嚴格性推廣最小二乘法, 使它在任何概率誤差的假設下, 都以最適當的方法來組合觀測值。

在第二次創造高峰期的後期, 高斯因測地工作得到額外的津貼(1825 年開始領取。此前的 1807 – 1824 年間, 高斯的薪金一直固定未動, 而家庭負擔有增無減), 他的經濟狀況有了根本好轉; 但高斯卻在為他自我感覺到的創造力開始下降擔憂。在 1826 年 2 月 19 日致奧爾貝斯的信中, 他抱怨自己不能再如此努力而成果不佳, 覺得應該去搞有別於數學的其它領域。

1828 年高斯到柏林參加了他一生中唯一的一次學術會議: 柏林自然科學工作者大會。洪堡希望他到柏林科學院工作以發揮更大的影響, 並答應為他提供磁學研究的儀器。高斯當時對磁學的興趣確實在增長, 但對到柏林就職並不熱心。在 1822 – 1825 年間, 柏林方面曾和高斯談判他來柏林的條件; 高斯發現這個大都市的辦事效率很低, 要他擔負的領導或顧問方面的責任也過多, 因此高斯寧肯留在格丁根。高斯此次柏林之行最大的收穫是結識了年輕的、才華橫溢的實驗物理學家 W. 韋伯 (Weber)。高斯正準備全力投入的物理學各學科原非他熟悉的領域, 他正需要一個像韋伯這樣的合作者。

高斯一旦決定轉變研究方向, 他進入新課題的加速度是驚人的, 他發表的下述文章和發明就是明證:

1829 年, 發表了《關於力學的一個新的普遍原理》(*Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*) ;

1830 年, 發表了《論平衡狀態下流體性質的一般理論原則》(*Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*);

1832 年, 發表了《以絕對單位測定的地磁強度》(*Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata*) ; 1833 年又與 1831 年到格丁根工作的韋伯合作發明了電磁電報。

高斯跟韋伯的合作對他深入磁學研究影響極大, 1833 年他

們在格丁根興建了地磁觀測站。洪保曾設想建立全球的地磁測量網，高斯和韋伯的參與加速了這項計劃的實施。為使測量準確，他們精心設計以銅材代替鐵材，以免磁針受其它鐵器的干擾。不久，格丁根的觀測站成了地磁測量的中心，各國紛紛仿照他們的設計建站，到 1834 年歐洲已建起了幾十處磁觀測站。為促進交流，高斯和韋伯組織了磁學會 (*Magnetisch Verein*)，出版年刊《磁學年度觀測成果》(*Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*，1836 – 1841 年間共出版六卷，其中有高斯的 15 篇和韋伯的 23 篇文章)。1837 年，他們改進了測量地磁強度的儀器，發明了雙線地磁儀。1839 年，高斯發表《地磁的一般理論》(*Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*)，澄清、簡化並發展了已有的地磁理論。1840 年，除和韋伯合作出版了不朽的《地磁圖》(*Atlas des Erdmagnetismus*)，高斯還發表了《與距離平方成反比而發生作用的引力和斥力的普遍原理》(*Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die verkehrten Verhältnisse des Quafrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte*)，首次將位勢論作為數學對象進行系統討論。在研究地磁學之餘，高斯還探討了若干光學問題。

在高斯全力投入物理研究的時期，他的家庭生活和人事關係屢屢出現麻煩。夫人米納在生育特雷澤後身體虛弱，經常臥床不起；兒子歐根納在選擇學業上跟高斯意見相悖。歐根納是高斯所有孩子中最富語言和數學才能的一個，他想選讀科學方面的學科，但終拗不過父親的威嚴，不得不進大學去讀法律；於是在大學他常放縱自己，時因賭博而負債。父子間的不睦最終導致歐根納於 1830 年出走，遠渡重洋移居美國。米納不堪這一打擊，次年便病故了。高斯的另一個兒子威廉熱衷務農，這在父親眼裡是無前途的職業，他因在德國生活不如意，於 1832 年徵得高斯的同意，攜妻去了北美。此後父子們再未見面。高斯的第二次婚姻

不能說美滿，對高斯唯一的安慰是女兒特雷澤十分孝順，在米納去世後擔起了全部家務，直到高斯去世後才出嫁。在三十年代初期，高斯還因一個增磁實驗方案而對德高望重的洪堡進行嚴厲的抨擊，造成兩人感情上的疏遠。

縱觀高斯一生，他待人接物都極力避免感情用事，而且厭惡爭吵，即使在有人議論他有剽竊他人成果的嫌疑時也能泰然處之，如高斯正式發表最小二乘法在法國數學家勒讓德之後，因而招來非議，高斯對此並未拍案而起，只是在給友人的信中擺明事情的原委。前述爭吵是發生在米納長期患病之後，足見它對高斯造成的心靈壓力之重，使他無法控制自己的感情。

這一時期的另一不測事件是由漢諾威的新君主壓制民主引起的。受 1830 年法國資產階級革命的影響，漢諾威公國曾於 1831 年通過了一部較為民主和自由的憲法。1837 年 11 月，新國王 E. 奧古斯特 (August) 取消這部憲法，要求公職人員 (包括大學教授) 對他本人宣誓效忠。遂有格丁根大學七位教授奮起抗議，其中有高斯最親密的合作者韋伯，以及高斯的大女婿、東方學專家 G.H.A. von. 埃瓦爾德 (Ewald)。人們期望高斯採取公開的行動，以其崇高的威望聲援他的同事。但高斯保持了沉默。七教授被解職，其中三人被逐出境。此時高斯除私人請洪堡為韋伯說情外，未對政府的行動表示異議。實際上高斯不贊成政治上的任何激進行為，傾向於維持王室的統治。況且，時年高斯的母親已九十五歲高齡，他本人也年過六旬；高斯不願因為這一事件改變習慣的生活方式 (1848 年德國爆發革命時，高斯也是站在保守的保皇分子一邊的)。韋伯的離去中斷了高斯一生中最成功的合作研究，對他後期的物理研究帶來了無法彌補的損失。

從十九世紀四十年代初斯開始，高斯幾乎完全退出了物理學的創新研究，只從事例行的天文觀測，計算漢諾威測地工作中遺留下的問題，對老的研究課題、發表過的評論或報告作些修

飾，解決一些小的數學問題。此後的出版物正反映了他的這種狀態。他對 E.E. 庫默爾 (Kummer) 新創立的理想論 (1845) 沒有強烈的反應，對海王星的發現 (1846) 亦很漠然。C.G. 雅可比 (Jacobi) 在參加紀念獲博士學位五十的週年大會後說，跟高斯談數學問題時，他總是把話題又開而談些無聊的事。在四十年代，高斯對格丁根大學的事務有了較多關注，擔任過教授會的負責人；花了幾年時間，將大學喪偶者基金會的財務預算奠基於可靠的統計規律之上；他對教學的興趣也比以前濃厚了。(我們注意到，高斯在大學開的課，大部分是天文學方面的，唯有在當教授的第一年講過一次數論，他最常講的課是最小二乘法及其在科學中的應用。)

晚年的高斯在學術圈子以外的人眼裡是位科學奇人，而高斯本人卻極端熱衷於從報紙、書本和日常生活中收集各種統計資料。在 1848 年革命時期，他幾乎每天到學校守舊派成立的文學會 (高斯是會員) 附屬的閱覽室尋覓各種數據。如果某個學生正在看的報是他所尋找的，高斯會一直瞪著他直到對方遞過來這份報紙。他因而被學生戲稱為“閱覽室之霸”。據說這一習慣對他從事投資活動 (主要是買債券，包括德國以外發行的債券) 大有裨益，他身後留下的財產幾乎等於其年薪的二百倍，說明他是個理財的好手。

高斯生命的最後幾年仍保持學者風度，沒有間斷過閱讀和參加力所能及的學術活動：

1850 年，心臟病加重，行動受到限制。

1851 年 7 月 1 日有日蝕，高斯作了他最後一次天文觀測。

1851 年，核准 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 的博士論文，給予高度評價。

1852 年，改進傅科擺，解決一些小的數學問題。

1853 年，為黎曼選定為獲講師資格須作的答辯題目 (幾何基礎)。

1854 年 1 月，全面體檢診斷高斯心臟已擴大，將不久於人世。但病情奇蹟般地得到緩解。

1854 年 6 月，聽了黎曼關於幾何基礎的答辯報告，出席格丁根到漢諾威間鐵路的開通儀式。

1854 年 8 月，病情惡化，下肢水腫。

1855 年 2 月 3 日清晨，高斯在睡眠中故去。

高斯的葬禮有政府和大學的高級官員出席，他的女婿在悼詞中讚揚高斯是難得的、無與倫比的天才。送葬抬棺者中有二十四歲的 J.W.R. 戴德金 (Dedekind)，他曾選修高斯的最小二乘法課。

高斯的大腦有深而多的腦迴，作為解剖標本收藏於格丁根大學。

《高斯全集》(Carl Friedrich Gauss' Werke) 的出版歷時 67 年 (1863 – 1929)，由衆多著名數學家參與，最後在 F. 克萊因 (Klein) 指導下完成。全集共分 12 卷。前 7 卷基本按學科編輯：第 1、2 卷，數論；第 3 卷，分析；第 4 卷，概率論和幾何；第 5 卷，數學物理；第 6、7 卷，天文。其它各卷的內容如下所述：第 8 卷，算術、分析、概率、天文方面的補遺；第 9 卷是第 6 卷的續篇，包括測地學；第 10 卷分兩部分：I，算術、代數、分析、幾何方面的文章及日記，II，其他作家對高斯的數學和力學工作的評論；第 11 卷也分兩部分：I，若干物理學、天文學文章，II，其他作家對高斯測地學、物理學和天文學工作的評論；第 12 卷，雜錄及《地磁圖》。

以下介紹高斯最主要的學術貢獻。

數學

高斯被後人譽為“數學王子”。這種稱讚恰如其分，他是數學史上一個轉折時期的傑出代表人物，起著承上啓下的作用。十

八世紀的數學處於由微積分的創立而促成的分析學蓬勃發展的時代，它的代表人物往往毫不顧及推理的嚴格性，而得到大量跟天文學、力學等自然科學有聯繫的分析學成果。數論、代數和綜合幾何方面只有較零散的結果。高斯強調數學作為一門嚴謹的科學，必須要追求明確的定義、清晰的假設、嚴格的證明以及成果的系統化，倡導了至今已延續近二百年的現代數學傳統。

《算術研究》是高斯最具代表性的著作。該書共分七節。第一節：一般同餘。定義有理整數模一個正整數同餘的概念；證明同餘的基本性質（包括除的算法）。第二節：一次同餘。證明整數分解成質數的唯一性；定義最大公因子和最小公倍數；導入同餘的符號 $a \equiv b \pmod{c}$ ，轉而討論“方程” $ax + t \equiv c$ ，給出解此類方程的算法；討論歐拉函數 $\phi(m)$ （它代表比 m 小且和 m 互質的整數的個數），實質上研究了質剩餘的乘法性質。第三節：幕剩餘。研究給定數的幕模（奇）質數的剩餘，其基礎是費馬小定理 ($a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ， p 是質數且非 a 的因子)，高斯給出費馬小定理的兩個證明，由此導出質根的概念。（ a 稱為質根，若 a 、 a^2 、 a^3 、 \dots （模 p ）可產生所有與 p 互質的整數），進而利用公式 $a^e \equiv b \pmod{p}$ 定義一個數 b 關於 a 的指標 e 及相關的運算；以指標表示導出一個數的二次特徵的判別準則（即判別一個數是否為模 p 的二次剩餘），該準則歐拉已經知道，而高斯的推導和證明更完全和確切；導出了威爾遜 (Wilson) 定理。以上三節是高斯為讀者閱讀書的主要部分而首次系統表述的初等數論知識。第四節：二次剩餘。在給出定義後證明了他的“基本定理”：若 p 是形如 $4n + 1$ 的質數，則當任一正質數是 p 的（非）二次剩餘時， p 也是它的（非）二次剩餘；對於形如 $4n + 3$ 的質數，類似的結論對 $-p$ 成立。此即著名的二次互反律，現在通用 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的記法，即

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

這一被譽爲數論中的“酵母”的定理最早爲歐拉提出，勒讓德作過繁雜的討論，但都未給出正確的證明。高斯在證明中首先論證定律對某些質數成立，然後通過對質數的完全歸納法證明之。高斯一生中給出過二次互反律的六個不同的證明。1817年高斯就其證明之一發表評論時說：“高級算術的特點是，通過歸納愉快地發現許多最漂亮的定理，但要證明它們……常常要經過多次失敗，最終的成功依賴於深刻的分析和有幸發現的某種結合，數學這一分支中不同理論間的奇妙結合。”他認爲尋找定理的新證明“絕非多餘的奢侈品。有時候，你開始並沒有得到最美和最簡單的證明，而恰是這種證明才能深入到高級算術的真理的奇妙聯繫中去。這是吸引我們去研究的主要動力，並常能使我們發現新的真理。”這反映了高斯對純數學研究的看法。第五節：二次型。討論二元二次型 $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ (a, b, c 為給定的整數)。該節主要部分的基礎來源於拉格朗日，高斯從他的工作中抽象出型的基本性質、型的變換及等價概念，將型的理論系統化並加以發展，如對給定判別式的型的各個類，皆可選取一個型爲其代表，高斯給出了選擇最簡單的代表的準則；他證明了有關型的複合的重要定理，討論了用型表示數的問題。第六節：應用。提出了上節引入的概念的重要應用，主要涉及部分分數、循環小數、解同餘方程以及區分合成數和質數的準則等。第七節：分圓問題。這是高斯於1896年宣佈已完成正十七邊形作圖後首次公開它的理論基礎，高斯證明的結論是：一個正多邊形，其邊數爲奇數 p 時，可尺規作圖的充分條件是 p 為型如 $2^{2^\nu} + 1$ 的質數或此種形式質數的乘積 (ν 為任意非負整數)。《算術研究》系統總結了前人的工作，解決了一批最困難的著名問題，系統地形成了一批概念和問題，它直接影響了其後一個世紀

的研究模式，實爲現代數學史上第一部結構嚴謹的數論巨著。

高斯曾稱“數論是數學中的女皇”，足見他對數論的重視。在他的科學日記及手稿中，還記載著他的其它數論發現，重要的有：

(1) 根據瑞士數學家 J. 藍伯特 (Lambert) 的質數表和他自制的質數表，對質數的分佈作出如下猜測，小於 x 的質數個數 $\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dn}{\log n}$ ，他也估計了 $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ ，但認爲此式精度比上述積分式差。

(2) 通過實例找到雙紐線函數的週期與算術－幾何平均的關係，並給出了證明，實際上早於 N.H. 阿貝爾 (Abel) 和 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 的橢圓函數研究。他將雙紐線函數表成兩個整函數的 P 、 Q 的商，明確算出 P 和 Q ，論證雙紐線函數具有的兩個週期 $2\tilde{\omega}$ 和 $2i\tilde{\omega}$ 。 P 和 Q 本質上是雅可比的 θ 函數的特例。

(3) 寫於十九世紀早期的一些手稿表明，高斯已熟悉了最終由 F. 克萊因等人完成的一種模函數的理論的基本要領。他是從二次型的約化理論出發到達模函數論的。高斯還掌握了模函數的幾何表示。

(4) 討論過他自稱的一種“奇異級數”： $W = \sum_{v=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i}{n} v^2}$ ，即現稱的高斯和 (1811)，後在數論發展中變得十分重要。

(5) 在研究四次剩餘的理論時，將整數概念推廣到複域；即形如 $a + ib$ (a 、 b 為整數) 的所謂高斯整數。他還對幾種特殊情形證明了四次互反律。

(6) 提出了二元和三元二次型的代數理論有相應的幾何模擬 (1830)，這是數的幾何理論的一個發端。

高斯是十九世紀分析嚴格化的先驅之一。他在 1813 年發表了“無窮級數……的一般研究” (*Disquisitiones generales circa*

seriem infinitam …) 討論超幾何級數

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \times \beta}{1 \times \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \times 2 \times \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

(歐拉曾研究過它)，高斯對它的興趣在於他發現當取不同的 α 、 β 和 γ 時，幾乎可以導出所有當時已知的初等函數和許多諸如巴塞耳函數、球函數那樣的超越函數，具有極大的普遍性。高斯在文中給出了該級數收斂的具體判據，使它成為數學史上最早討論無窮級數收斂問題的文獻。高斯還在實質上建立了該級數與 Γ 函數的關係

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

在上文發表前兩年，高斯對複函數論也作出了開創性的貢獻。在給巴塞耳的一封信(1811年12月)中，他描述了複函數沿複平面上的曲線積分的方法，得到 $\int_c \frac{dz}{z} = 2k\pi i$ (c 為複平面上繞原點 k 次的閉曲線) 以及複函數基本定理(若複函數 $f(z)$ 在曲線 c 及其內部解析，則其沿 c 的積分為零)。因高斯未公開發表他的成果，而 A.L. 柯西(Cauchy)的表述較為完整，現稱此定理為柯西積分定理。高斯在複分析方面的另一重要成果是獲丹麥哥本哈根科學院獎的那篇文章。它實際上解決了任一曲面保形變換到任何另一曲面上的解析條件問題。

高斯的幾何學研究，使他實現了十九世紀最富革命精神的兩項幾何創造：非歐幾何和內蘊微分幾何。

關於非歐幾何，高斯生前從未正式發表他的成果，但從其通信、科學日記及手稿中，可清晰看到他的思想發展脈絡，證明他是最早認識到存在非歐幾何的數學家。

(1) 1799年9月，他在科學日記中記道“在幾何基礎的問題上，我們獲得了很好的進展。”

(2) 同年，W. 波爾約在給高斯的信中自稱能從歐幾里得的其它公理公設推出平行公設。高斯在 12 月 17 日的回信中婉言否定了波爾約的結論，並說“我可以從存在面積為任意大的直角三角形的假設，嚴密地導出平行公設。大多數人肯定會把它當作公理。但我不這樣做，因為我相信不管三角形三個頂點離得多麼遠，其面積可能永遠在某個限度以內。”

(3) 在十九世紀初，數學家們已經知道如平行公設不成立，則可導出存在絕對長度單位。但因無法找到這樣的單位，勒讓德於 1794 年認定這反而是使人相信平行公設的理由。高斯在給天文學家 C.L. 格林 (Gerling) 的信 (1816) 中表示，絕對長度單位的存在固然值得懷疑，但他無法從存在絕對單位推出任何矛盾。他覺得有一絕對長度單位反而更好，並說：“人們可以取角度為 $59^{\circ}59'59''9999$ 的等邊三角形的邊長為單位長度。”

(4) 1824 年，高斯在回答 F.A. 陶里努斯 (Taurinus) “證明”平行公設的來信時寫道：“由三角形的內角和小於 180° 的假設可導出一種奇異的幾何，它跟歐幾里得幾何大相徑庭，但其本身卻是相容的。”高斯接著說此類幾何由某一常數所確定，“這常數越大，這幾何就越接近歐氏幾何，當它變成無窮大時，兩種幾何就一致了。”高斯當時未指出這常數 (即絕對單位) 的值。實際上它可通過空間曲率 K 來表示，即 $\frac{1}{\sqrt{|K|}}$ ，高斯很可能知道這個值。對

於高斯為什麼不發表這個劃時代的理論一直衆說紛紜。我們知道高斯一直認為幾何是和力學一樣應能以實踐檢驗的科學，他又十分熟悉測量時的誤差估計，而在當時的條件下尚不可能對非歐幾何進行有說服力的檢驗，高斯可能是不願意公佈會引起爭論而無法作出最終判決的理論。

關於高斯的內蘊微分幾何思想，集中體現在《曲面的一般理論》中。其主要內容為：

(1) 以曲面的參數方程 $x = x(u, v)$ 、 $y = y(u, v)$ 、 $z = z(u, v)$ 為研究的出發點，定義弧長元素為

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 ,$$

其中 E 、 F 、 G 為 x 、 y 、 z 對參數的偏導數的有理式組成；並給出曲面上曲線間夾角的定義。

(2) 推廣 C. 惠更斯 (Huygens) 和 A.C. 克萊羅 (Clairaut) 關於平面曲線曲率的概念，定義了一個曲面在曲面上一點處的曲率 $K = \frac{1}{rR}$ (其中 r 、 R 是兩個主曲率半徑) 現稱為高斯曲率。高斯在各種坐標系 (曲線坐標和直角坐標) 中給出了曲率用曲面的偏導數表示的公式，證明曲率 K 完全跟曲面是否在三維空間中或曲面在三維空間中的形態無關。因此當曲面無伸縮地彎曲時，保持不變，曲面的所有性質 (包括曲率) 亦保持不變。這就提出了幾何史上一個全新的重要概念，即一張曲面本身就是一個空間。

(3) 研究了曲面上的測地線，證明了測地線構成的三角形的著名定理：設 K 是一曲面上的可變化的曲率， $\iint_A K dA$ 表示該曲率函數在三角形 A 上的積分，則有

$$\iint_A K dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \text{ } ^\circ$$

其中 α_1 、 α_2 、 α_3 為測地三角形的三個內角的值。高斯認定這是“最精美的定理” [即現稱的高斯－博內 (Bonnet.) 公式]。

天文學

高斯曾在給 W. 波爾約的信中說，天文學和純粹數學是他靈魂的指南針永久指向的兩極，表明天文學在高斯心目中的地位。高斯是在天文學史上的一個重要時期介入這一領域的。在 1800 年前後，由於技術和光學儀器的進步，以及觀測資料的系統積累，已編制出西方天文學界的第一部可靠的天象圖，這對發現新天體大有

裨益；又由於外行星的發現（1781年發現天王星），為理論天文學提出了更精確計算行星攝動的問題。

1801年1月1日，義大利天文學家J.皮亞齊(Piazzi)新發現一顆亮度為8等的星，到同年2月11日，人們僅觀測到它在其軌跡上運行了 9° ，它便行至日光中而無從繼續觀測。全歐洲的天文學家都期待重新發現這顆現定名為谷神星的小行星。高斯根據拉普拉斯的方法和他在算術－幾何平均方面的知識，詳細計算了谷神星的星曆表，預測了它再次出現的時間和位置。高斯的方法載於《天體沿圓錐曲線的繞日運動理論》，其新思想是充分利用半徑向量掃過的扇形面積與相應三角形的比值。高斯不必事先假設被觀測天體的運行軌跡是橢圓還是雙曲線，只要根據三次完全觀測(即包含時間、赤經和赤緯的觀測)就能算出運行軌跡的特性。高斯方法的普適性使得整個計算比前人針對不同天體使用不同的特殊方法要複雜，但它對新發現的星體軌跡的計算有本質的優越性，特別是當觀測資料像初次發現谷神星那樣十分匱乏時(此時很難區分該星是彗星還是行星)。高斯的方法遂成為計算天文學的經典。

在上述著作中，高斯首次發表他的最小二乘法，這是他整理觀測數據必不可少的工具。1812年他在致拉普拉斯的信中稱，自1802年起幾乎每天用最小二乘法計算新的行星軌跡。在1803年他還和奧爾貝斯(Olbers)討論過這種方法，高斯的遺稿證實了上述說法。可見高斯和勒讓德同為此方法的獨立發明者，不存在剽竊問題。

高斯在“確定行星對任意點的引力……”以及一些手稿中，繼牛頓和拉普拉斯創立天體攝動學說後，提出了一種分析攝動問題的具體模型，即將行星質量假想為按一定方式分佈於整個運行軌跡上，據此計算星體間的互相影響，探討了長年攝動問題，對攝動理論做出了基礎性貢獻。

高斯對實用天文學的貢獻除積累了幾十年的觀測資料，預報新

發現的小行星軌跡外，還自製天文儀器六分儀，為提高觀測精度而從事幾何光學研究，改進了望遠鏡的質量。

測地學

高斯在實施漢諾威公國的測地計劃的實測工作中，使用傳統的三角測量法，即從長度精確測定的基線出發，選定一個三角形網絡將所測的地域覆蓋。各三角形的頂點的選取，至少應能保證從兩個方向上對其進行目力觀測。測出各三角形內角的精確值是提高測地精度的關鍵。由於地形千變萬化，儀器精度不高，使實測工作費時費力；測量時不可避免的隨機誤差也給數據處理提出了新課題。高斯首先設計了日光反射信號器以提高觀測精度。該儀器的主要部件是一面能旋轉的鏡子，配以必要的光學儀器（如小望遠鏡），它在測量時既可作為發光的被測目標，又可用於傳遞信息，成為三角測量的標準儀器。藉助這一發明，高斯能進行遠距離的觀測（反射光在 15 英里遠處仍相當於一等星的亮度），即使在天空有雲，無直射陽光照射的條件下仍能保證觀測繼續進行。這一儀器到 1840 年才為其他人改進。高斯還曾設想用 100 個平面鏡（每個為 1.5×1.5 平方米）製作巨大的反射器，它可將日光反射到月球表面，如果能把天文學家送上月球，他們就能根據反射光輕而易舉地決定經度差。

在測地的理論工作方向，高斯依據前述保形變換的一般理論，給出了平面到平面、球面到平面和旋轉橢球面到球面的保形映射實例。他還在《……格丁根與阿爾唐納兩天文台之經度差》一文中，首次提出可將地球表面視為在其上每點與重力方向相垂直的幾何面，以後發展出他的位勢理論。高斯的測地工作總結於他的論文“高等測地學研究”（*Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*，I. 1844，II. 1847）。高斯的工作後為德國測地學家所發展，著名的高斯－克呂格爾（Krueger）投影即是其

一，它是橫向墨卡托 (Mercator) 投影的推廣。

曾有人對高斯花費巨大精力於野外測量表示惋惜。巴塞耳於 1823 年就勸告他放棄實地觀測，以免虛度年華。高斯回信說：“世上所有的測繪與度量，確實比不上哪怕是將科學真理向前推進一步來得有份量。”但他覺得“不可能凡事都用一種絕對的標準去衡量”，還“應該考慮相對的價值。”無論如何，高斯覺得他為國家做了一件實際有效的工作而感到寬慰，況且因此而獲得的津貼徹底改善了他的經濟狀況。

物理學

高斯在物理學方面的第一項成果是於 1829 年提出的力學中的最小約束原理：一個系統的運動將儘可能少地偏離其自由運動的狀態，偏離的程度由各部分質量乘其偏離自由運動路徑的距離平方的總和來度量。這是著名的達朗貝爾原理的一種新的等價形式，它明顯跟二乘法有關，高斯則自稱這項成果受益於對毛細現象的研究。後者的成果總結於 1830 年那篇“論平衡狀態下流體性質……”的文章，其中有涉及重積分、邊界條件和可變積分界限的變分問題的漂亮解答，給出了平衡流體理論的一個基本定理。高斯說他對流體性質的研究是純理論性的，屬於理論物理學的一種練習，是想看看到底有哪些數學能用於說明自然現象。

高斯在物理學上的驚人之舉是和韋伯合作發明了世界上首例電磁電報。其理論依據來自 H.C. 奧斯特 (Oersted) 發現的電流會使磁針偏轉 (1820) 和 M. 法拉第 (Faraday) 發現的感應電流。他們的電報裝置，一端 (發報機) 是可沿磁棒移動的感應線圈，另一端 (收報機) 是線圈及用細線懸掛的磁針，中間以導線將兩端線圈聯成迴路 (帶開關)。利用感應線圈的移動和開關的開斷，可產生磁針朝兩個方向 (向左 \leftarrow 或向右 \rightarrow) 的偏轉，即傳遞兩種信號。高斯和韋伯規定了字母與偏轉方向間的對應關係。如 G 對應

於 \leftarrow , \rightarrow , \rightarrow ; N 對應於 \rightarrow , \leftarrow ; S 對應於 \leftarrow , \leftarrow , \rightarrow ; ... 等等。1833 年的第一份電報內容是 “Michelmann Kommt” (“米舍爾曼來了”，此人是協助他們架設電報裝置的機工)，共使用了 40 次磁針偏轉，通報距離約 1 公里。高斯和韋伯在 1833 – 1845 年間常用這部電報機在天文台和物理實驗室間互通短小的信息。電報機於 1845 年毀於雷擊。高斯認識到電報在戰爭及經濟活動中的重要性，曾建議政府廣泛使用，但未獲成功。

高斯和韋伯合作的地磁學研究達到了更深的理論層次。洪堡的全球地磁觀測計劃，目標是測定地磁強度、磁偏角和磁傾角隨時間和地點的變化，以建立令人滿意的地磁理論。高斯首先為磁的度量確立了一套“絕對單位制”(1832)。他的基本想法是磁(他稱作磁流)能夠而且應該以其效應來度量，他定義單位“磁流”為如下強度的力：以單位磁強排斥相隔一單位距離的另一單位“磁流”。他選定力學中度量長度、質量和時間的慣用單位毫米、毫克和秒為基本單位，藉助庫侖定律將它們引伸到磁學(以至靜電學)中，確立了度量磁場強度的標準，韋伯運用這一思想建立了電動力學的絕對單位制。他們的這套單位制在 1881 年經適當修改後為國際物理學界所接受，即所謂的釐米·克·秒單位制，高斯的名字被選作磁場強度和磁感應的單位名稱。

在《地磁的一般理論》中，高斯進一步定義了磁位勢，若以 μ 代表距離力源為 ρ 的磁流，則磁位勢為 $V = - \int \frac{d\mu}{\rho}$ ，他在定義了磁極後論證了為什麼只有兩個磁極，並討論了磁場線的解析定義。高斯提出的一種新的確定磁力的水平分量的強度和傾角的方法成為實驗家的有力武器。在計算磁位勢時，高斯用球函數的一個無窮級數表示地球表面上任一點處的磁位勢，並利用世界各地磁觀測站提供的數據對級數前 24 項係數進行估值，由此不難算出在任意點處的磁位勢。高斯的地磁學研究是他的測地工作的補充，為

當時正興起的對地球進行科學的描述提供了數學的理論和方法。

高斯一生中多次關注過幾何光學的理論問題，為消除光學儀器的色差，他提出將不同質地的凸透鏡與凹透鏡組合使用，即所謂的高斯物鏡，它不僅可用於望遠鏡，也可用於顯微鏡。《光的折射研究》(*Dioptrische Untersuchungen*，1840年完成，1843年出版)是高斯主要的光學著作，他分析了光通過一組鏡片的路徑，證明了任一組鏡片可等價於適當選擇的單個鏡片。

文 獻

原始文獻

- [1] Carl Friedrich Gauss, *Werke I–XII*, Leipzig。由 Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 在 1863 – 1933 年編輯和出版。

以下為高斯的通信錄：

- [2] G.F. Auwers , *Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel*, Leipzig, 1880 ; Hildesheim/New York reprinted, 1975 。
- [3] F. Schmidt and P. Stäckel , *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und Wolfgang Bolyai*, Leipzig, 1899 ; New York/London reprinted, 1972 。
- [4] C. Schaefer , *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling*, Berlin, 1927 ; Hildesheim/New York reprinted, 1975 。
- [5] B. Boncampani , *Cinque lettres de Sophie Germain à C.F. Gauss*, Berlin, 1880 。
- [6] K.–R. Biermann , *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauss*, Berlin, 1977 。
- [7] C. Schilling , *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss*, Berlin, 1900/1905 ; Hildesheim/New York reprinted, 1976 。
- [8] C.A.F. Peters , *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher*, Altona, 1860 – 1865 ; Hildesheim/New York reprinted, 1975 。
- [9] T. Gerardy, *Nachträge zum Briefwechsel zwischen Carl Friedrich*

研究文獻

- [10] F. Klein, *Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I*, Berlin, 1925 °.
- [11] T. Hall, *Gauss*, Cambridge, 1970 °.
- [12] W.K. Bühler, *Gauss — A biographical study*, Springer–Verlag, 1981 °.
- [13] O. May, *Gauss, Carl Friedrich*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 5, 1972, 298 – 315 °.