柯 西

柯西，A.L. (Cauchy，Augustin–Louis) 西元 1789 年 8 月 21 日生於法國巴黎；西元 1857 年 5 月 23 日卒於法國巴黎附近的斯科 (Sceaux)。數學、數學物理、力學。

柯西之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cauchy.html`

柯　西

沈 永 歡

(北京工業大學)

柯西， A.L. (Cauchy， Augustin–Louis) 西元 1789 年 8 月 21 日生於法國巴黎； 西元 1857 年 5 月 23 日卒於法國巴黎附近的斯科 (Sceaux)。 數學、 數學物理、 力學。

柯西之父親路易－弗朗索瓦 (Cauchy， Louis–François)， 1760 年生於魯昂， 年輕時學習出色， 1777 年獲巴黎大學頒發的會考榮譽獎， 畢業後任諾曼第最高法院律師， 後任魯昂總督 C. 蒂魯 (Thiroux) 的秘書。 1785 年蒂魯出任巴黎警察總監， 弗朗索瓦成爲他的首席幕僚。 1794 年蒂魯被處決， 弗朗索瓦舉家遷居阿爾居埃避風。 1799 年霧月十八政變中， 他積極支持拿破侖， 於次年被新設的上議院選爲負責起草會議紀要和執掌印璽的秘書， 並安家於盧森堡宮。

弗朗索瓦親自對長子柯西進行啓蒙教育， 教他語法、 詩歌、 歷史、 拉丁文和古希臘文。 弗朗索瓦與 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 過從甚密， 與 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也交往頗多， 所以柯西在童年時就接觸到兩位大數學家。

柯西從小喜愛數學， 當一個念頭閃過腦海時， 他常會中斷其它事情， 在本上算數畫圖。 這引起拉格朗日的注意。 據說在 1801 年的一天， 拉格朗日在弗朗索瓦辦公室當著一些上議員的面說：“瞧這孩子! 我們這些可憐的幾何學家都會被他取而代之。” 但他也告誡弗朗索瓦， 在柯西完成基本教育之前不要讓他攻讀數學著作。

1802 年秋， 柯西就讀於先賢祠中心學校， 主要學習古代語

言。 在校兩年中， 成績優異， 多次獲獎。 但他決心成爲一名工程師。 經過一年準備後， 於 1805 年秋考入綜合工科學校； 1807 年 10 月又以第一名的成績爲道路橋樑工程學校錄取， 並在 1809 年該校會考中獲道橋和木橋大獎。

1810 年初， 柯西被派往瑟堡， 任監督拿破侖港工程的工程師助理。 在他的行囊中， 裝有拉格朗日的《解析函數論》(*Traité des fonctions analytiques*) 和拉普拉斯的《天體力學》(*Méhcanique céleste*)。 年底， 他被授予二級道橋工程師職務， 其工作受到上級嘉獎， 然而他把絕大部分業餘時間用於鑽研數學。 在拉格朗日建議下他研究了多面體， 於 1811 年 2 月向法蘭西研究院遞交第一篇論文 (文獻 [1]， (2)1， 7 − 18)[1]， 證明了包括非凸情形在內， 只存在九種正多面體。 1812 年 1 月， 又向巴黎科學院遞交第二篇論文 (文獻 [1]， (2) 1， 26 − 35)， 證明具有剛性面凸多面體必是剛性的。 A.M. 勒讓德 (Legendre) 對兩文極爲欣賞。 兩個月後， 柯西成爲愛好科學協會通訊會員。

1812 年底， 由於健康狀況下降， 柯西返回巴黎， 不久向科學院遞交了關於對稱函數的論文。 就在這時， 他確定了自己的生活道路： 終生獻給 “眞理的探索” 即從事科學研究。 1813 年 3 月， 他被任命爲烏爾克運河工程師。 1814 − 1815 年拿破侖一世的慘敗中斷了運河工程， 使他有時間潛心研究。 他在 1814 年向法蘭西研究院遞交的論文中， 有關於誤差論的研究和標誌他建立複變函數論起點的關於定積分的研究。 1815 年底， 他以關於無限深流體表面波浪傳播的論文獲科學院數學大獎。

1815 年 7 月， 路易十八重返巴黎。 11 月， 政府禁止 L. 普安索 (Poinsot) 在綜合工科學校授課； 12 月初， 宣佈由柯西以替補教授名義接任普安索， 講授數學分析。

1816 年 3 月， 王室發佈了重組法蘭西研究院和巴黎科學院的敕

[1] “文獻 [1]， (2)1” 指文獻 1 中第二系列第 1 卷， 下仿此。

令， 辭退了一批院士， L. 卡諾 (Carnot) 和 G. 蒙日 (Monge) 也在其中； 同時柯西被國王任命爲力學部院士。 9 月被任命爲綜合工科學校分析學和力學正式敎授， 爲一年級新生講授數學分析。

柯西在綜合工科學校的教學內容， 集中體現在他寫的《分析教程第一編•代數分析》(1821)、《微積分概要》(1823)、《微積分在幾何學中的應用教程》(1826) 和《微分學教程》(1829) 中。 這些論著首次成功地爲微積分奠定了比較嚴格的基礎。 1823 年， 他出任巴黎理學院力學副教授， 代替 S.D. 泊松 (Poisson) 講授力學； 1824 年底出任法蘭西學院代理教授， 代替 J.B. 畢奧 (Biot) 講授數學物理。 這些教學工作都持續到 1830 年。

柯西同時積極參加科學活動， 經常出席科學院每週一召開的公開會議， 在純粹與應用數學的各種委員會中起重要作用。 他在波旁王朝復辟時期寫了大約一百篇論文或註記。 1826 年起， 他獨自編輯出版定期刊物《數學演習》(*Exercices de mathématiques*)， 專門發表自己的論著。

1830 年 7 月革命再次推翻了波旁王朝， 奧爾良公爵路易–菲力浦 (Louis–Philippe) 即位。 一直激烈反對自由派的柯西， 把此事看作國家的災難。 綜合工科學校學生在起義中離開校園， 率領民衆戰鬥， 對柯西刺激很大。 內閣通過了公職人員必須宣誓效忠新國王的法令， 而保王黨人 (柯西也在其中) 認爲宣誓就是背叛。 起義中發生的一些暴烈行爲， 使柯西憤慨。 所有這些因素， 促使柯西下定決心離開法國。

柯西先去瑞士的弗里堡， 試圖籌建瑞士科學院， 但未成功。 1831 年夏遷居都靈， 10 月在拉格朗日組建的都靈科學院露面。 次年初撒丁國王特爲柯西在都靈大學重設高級物理即相當於數學物理的教席。 在都靈期間， 柯西主要從事教學工作。

1833 年 7 月， 柯西前往布拉格， 擔任查爾斯十世 (路易十八之弟) 之孫波爾多公爵 (Le duc de Bordeaux) 的宮廷教師， 每天講授

數學、物理和化學。他盡心盡力，甚至重新編寫了算術與幾何教本。但王子對數學缺乏興趣，與柯西關係不甚融洽。1838 年 10 月，公爵年屆 18，教育告一段落，柯西在家人和朋友勸說下重返巴黎。查爾斯十世授予他男爵封號，柯西對此十分看重。

宮廷教學使柯西研究進度放慢，他在布拉格以《數學新演習》(*Nouveaux exercices de mathématiques*) 爲題繼續出版他的《演習》，撰寫了關於光和微分方程的一些論文，以石印形式在小範圍內流傳。回巴黎後，他首先去科學院，發表了關於光的研究成果。

F.J. 阿拉戈 (Arago) 於 1836 年創辦了《巴黎科學院通報》(*Comptes rendu Acad. Sci. Paris*)，使院士們能迅速發表成果。柯西充分利用這個有利條件，幾乎每週在《通報》上發表一篇論文或註記。不到二十年，他在《通報》上發表了 589 篇文章。他的多產使科學院不得不限制其他人送交論文的篇幅不得超過四頁。可是柯西還不滿足，1839 年 9 月起又以《分析與數學物理演習》(*Exercices d'analyse et de physique mathématique*) 爲題繼續出版他的《演習》。

1839 年 7 月，M. 普隆尼 (Prony) 的去世使天文事務所 (與法蘭西研究院齊名，事實上的天文科學院) 出現一個空缺。柯西於 11 月當選，但由於他拒絕向路易－菲力浦宣誓效忠而未獲任命書。

回巴黎後，柯西同耶穌會士一起，參與創建天主教學院，熱衷於宣傳天主教。這使他與一些同事關係尷尬。

1843 年 5 月，柯西競選由於 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix) 逝世而空缺的法蘭西學院數學教席，但得票數極少，敗於 G. 萊布里 (Libri)。年底在天文事務所新的幾何學部委員選舉中，他又敗於他的對手普安索。這兩次失利對他是沉重的打擊。他開始離群索居，但仍勤奮工作。

1848 年 2 月革命後，宣誓不再成爲任命的障礙。1849 年 3

月， 柯西被委任爲巴黎理學院數學天文學教授。

1850 年 6 月， 萊布里被莫須有判處十年徒刑， 法蘭西學院又出現空缺教席。 柯西再次競選， 敗於 J. 劉維爾 (Liouville) 。

1851 年 12 月政變後， 新政權要求公職人員宣誓效忠。 柯西仍不妥協， 致使他在理學院的教學工作停止一年多。 1853 年， 拿破侖三世同意柯西可以例外， 使他得以重登理學院講壇， 直至去世。

1848 年後， 他的發表節奏放慢， 1853 年停止出版《演習》； 但繼續審讀論文， 並從事宗教活動。

1857 年 5 月 12 日， 柯西患重感冒， 21 日病情突然惡化， 次日與世長辭， 享年六十八歲。

除巴黎科學院外， 柯西還是十八個科學院或著名學術團體的成員， 其中有英國皇家學會、 柏林科學院、 聖彼得堡科學院、 愛丁堡皇家學會、 斯德哥爾摩科學院、 哥本哈根皇家科學學會、 格丁根皇家科學學會、 波士頓科學院等。

數學分析嚴格化的開拓者

分析嚴格化的需要

十八世紀的分析學家致力於創造強有力的方法並把它們付諸應用， 分析中的一些基本概念， 則缺乏恰當的統一的定義。 由於沒有公認的級數收斂概念， 導致了許多所謂 “悖論”， 其實只是由於概念含混而出現的錯誤。 數學家逐漸認識到， 分析基本原理的嚴格檢驗， 不能依賴於物理或幾何， 只能依靠它自身。 當時的法國 — 歐洲數學中心的數學家們集中在幾個大學教書。 教學和寫作教材特別要求澄清基本概念， 闡明基本原理。

已有一些數學家對當時分析的狀況不滿。 C.F. 高斯 (Gauss) 批評 J.L. 達朗貝爾 (d’Alembert) 關於代數基本定理的證明不夠嚴格， 還說數學家們 “未能正確處置無窮級數”。 N.H. 阿貝爾 (Abel)

說得更加明確："人們在今天的分析中無可爭辯發現了多得驚人的含混之處……。最糟糕的是它還沒有得到嚴格處理。高等分析中只有少數命題得到完全嚴格的證明。人們到處發現從特殊到一般的令人遺憾的推理方式。"(*Oeuvres*，2，263－265)

正是柯西，懷著嚴格化的明確目標，在前述四個教材中爲數學分析建立了一個基本嚴謹的完整體系。在《分析教程》前言中，他說："至於方法，我力圖賦予……幾何學中存在的嚴格性，決不求助於從代數一般性導出的推理。這種推理……只能認爲是一種推斷，有時還適用於提示眞理，但與數學科學的令人嘆服的嚴謹性很不相符。" 他說他通過分析公式成立的條件和規定所用記號的意義，"消除了所有不確定性"，並說："我的主要目標是使嚴謹性 (這是我在《分析教程》中爲自己制定的準繩) 與基於無窮小的直接考慮所得到的簡單性和諧一致。"

極限與無窮小

柯西規定："當一個變量相繼取的值無限接近於一個固定值，最終與此固定值之差要多小就有多小時，該值就稱爲所有其它值的極限。" "當同一變量相繼取的數值無限減小以至降到低於任何給定的數，這個變量就成爲人們所稱的無窮小或無窮小量。這類變量以零爲其極限。" "當同一變量相繼取的數值越來越增加以至升到高於每個給定的數，如果它是正變量，則稱它以正無窮爲其極限，記作 ∞；如果是負變量，則稱它以負無窮爲其極限，記作 $-\infty$。"

從字面上看，柯西的定義與在此以前達朗貝爾、拉克羅阿所給的定義差別不大，但實際上有巨大改進。

首先，柯西常常把他的定義轉述爲不等式。例如在證明

$$\lim_{x\to\infty}(f(x+a)-f(x))=k \text{ 蘊涵 } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

時，以 "指定 ϵ 爲要多小能多小的一個數" 開始，寫出一系列不等

式來最終完成證明。 在討論複雜表示式的極限時， 他用了 $\epsilon-\delta$ 論證法的雛型。 由於有明確的把極限轉述爲不等式的想法， 他就能從定義出發證明關於極限的一些較難命題。

其次， 他首次放棄了過去定義中常有的 “一個變量決不會超過它的極限” 這類不必要的提法， 也不提過去定義中常涉及的一個變量是否 “達到” 它的極限， 而把重點放在變量具有極限時的性態。

最後， 他以極限爲基礎定義無窮小和微積分學中的基本概念， 建立了級數收斂性的一般理論。

函數及其連續性

柯西以接近於的現代的方式定義單元函數：“當一些變量以這樣的方式相聯繫， 即當其中之一給定時， 能推知所有其它變量的值， 則通常就認爲這些變量由前一變量表示， 此變量取名爲自變量， 而其餘由自變量表示的變量， 就是通常所說的該自變量的一些函數。” 他以類似方式定義多元函數， 並區別了顯函數和隱函數， 用他建立的微分方程解的存在性定理在較強條件下證明了隱函數的局部存在性。

柯西給出了連續的嚴格定義：“函數 $f(x)$ 是處於兩個指定界限之間的變量 x 的連續函數， 如果對這兩個界限之間的每個值 x， 差 $f(x+a)-f(x)$ 的數值隨著 a 無限減小。 換言之， $\cdots\cdots$ 變量的無窮小增量總導致函數本身的無窮小增量。” 在一個附錄中， 他給出了閉區間上連續函數介值性質的嚴格證明， 其中用到了 “區間套” 思想。

在柯西之前， B. 波爾查諾 (Bolzano) 於 1817 年給出連續的定義， 並利用上確界證明了中間值定理。 但他的工作在很長時間內未引起人們的注意。 有人認爲柯西讀到了波爾查諾的著作， 採用了他的思想， 但故意不加聲明。 這種看法缺乏佐證材料。

微分學

柯西按照前人方式用差商的極限定義導數，但在定義中多了一句：“當這個極限存在時，…… 用加撇符號 y' 或 $f'(x)$ 表示。” 這表明他已用嶄新的方式考慮問題。他把導數定義轉述爲不等式，由此證明有關的各種定理。例如他給出了用不等式陳述的微分平均值定理，首次給出了 $\epsilon - \delta$ 式 (所用符號也是 ϵ, δ) 的證明，由此推出拉格朗日平均值定理。他還得到了 “柯西平均值定理”

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)} = \frac{f'(x_0+\theta(X-x_0))}{F'(x_0+\theta(X-x_0))}\text{。}$$

柯西關於微分的一種定義也富有獨創性。他稱 $f(x)$ 的微分是 “當變量 α 無限趨於零而量 h 保持不變時方程

$$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}h \quad (i=\alpha h)$$

的左端所收斂的極限”。

柯西以割線的極限位置定義切線，用平均值定理證明極值點處切線的水平性。他證明了 $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ 時用 $f^{(n)}(x_0)$ 的符號判斷極大、極小的命題。他由自己的平均值定理推導出洛比達法則。這樣，他就爲微分學的應用奠定了嚴格的理論基礎。

積分學

十八世紀絕大多數數學家摒棄 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 關於積分是無窮小量的無窮和的說法，只把積分看作微分之逆。柯西則不同，他假定函數 $f(x)$ 在區間 $[x_0,\ X_0]$ 上連續，用分點 x_1、x_2、 $\cdots$ 、x_{n-1} 把該區間劃分爲 n 個不必相同的部分，作和

$$\begin{aligned} S &= (x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1) \\ &\quad +\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1}), \end{aligned}$$

並證明 (實際上隱含地用了 “均勻連續性”) “當各個部分長度變得非常小而數 n 非常大時， 分法對 S 的值只產生微乎其微的影響”， 因而當各個部分長度無限減小時 S 具有極限， 它 “只依賴於 $f(x)$ 的形式和變量 x 的端值 x_0 、 X_0 。 這個極限就是我們所說的定積分。” 這樣， 他既給出了連續函數定積分的定義， 又證明了它的存在性。 他還指出這種定義對於不能把被積函數轉化爲原函數的一般情形也適用。 他給出了現在通用的廣義積分的定義。

柯西簡潔而嚴格地證明了微積分學基本定理即牛頓 − 萊布尼茨公式。 他利用定積分嚴格證明了帶餘項的泰勒公式， 還用微分與積分平均值定理表示曲邊梯形的面積， 推導了平面曲線之間圖形的面積、 曲面面積和立體體積的公式。

柯西的定義是從僅把積分看作微分逆運算走向現代積分理論的轉折點， 他堅持先證明存在性是從依賴直覺到嚴格分析的轉折點。

級數論

柯西是第一個認識到無窮級數論並非多項式理論的平凡推廣而應當以極限爲基礎建立其完整理論的數學家。 他以部分和有極限定義級數收斂並以此極限定義收斂級數之和。 十八世紀中許多數學家都隱約地使用過這種定義， 柯西則明確地陳述這一定義， 並以此爲基礎比較嚴格地建立了完整的級數論。 他給出所謂 “柯西準則”， 證明了必要性， 並以理所當然的口氣斷定充分性。 對於正項級數， 他嚴格證明了比率判別法和他創造的根式判別法； 指出 $\sum u_n$ 與 $\sum 2^n u_{2^n}$ 同時收斂或發散， 由此推出一些常用級數的斂散性； 證明兩個收斂級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 、 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$ 的積級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k v_{n-k})$ 收斂。 對於一般項級數， 他引進了絕對收斂概念， 指出絕對收斂級數必收斂； 收斂級數之和收斂， 但積不一定收斂， 並舉出反例 $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 。

對於冪級數，柯西得到了收斂半徑公式 [後來 J. 阿達瑪 (Hadamard) 於 1892 年重新獨立發現這個公式]。他以例子 $f(x) = e^{-1/x^2}$ 表明，一個函數可爲它的泰勒級數代替只當後者收斂且其和等於所給函數 (文獻 [1]，(2)2，276 − 282)。

影響

在柯西手裡，微積分構成了由定義、定理及其證明和有關的各種應用組成的邏輯上緊密聯繫的體系。他的分析教程成爲嚴格分析誕生的起點。無怪乎阿貝爾在 1826 年說，柯西的書應當爲 "每一個在數學研究中熱愛嚴謹性的分析學家研讀"。柯西的級數論對拉普拉斯的觸動是衆所周知的：後者讀了柯西的論文後，趕快逐一檢查他在《天體力學》中所用的級數。柯西對 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、G.F.B. 黎曼 (Riemann) 和 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 都有直接影響。

缺陷

柯西沒有系統使用 $\epsilon - \delta$ 方法，通常更多依賴 "充分接近"、"要多小就有多小" 這類比較模糊的語言，未能區別逐點收斂與均勻收斂 (但晚年時已有所覺察)、逐點連續與均勻連續，有時不能恰當處理累次極限，因則出現了一些錯誤的斷言及 "證明"。例如：連續函數項收斂級數具有連續和並可逐項積分；多元函數對每個自變量分別連續則整體連續；函數 $f(x,\ y)$ 在過點 $(x_0,\ y_0)$ 的每條直線上取到極大值則它在該點取到極大值。

柯西在證明一些定理時，實際上用了實數系的完備性，例如有界單調數列必收斂，但就像在談到收斂準則充分性時那樣，他認爲這些都是不言自明的，未能意識到建立實數理論的必要性。

總之，柯西在分析的嚴格化方面做出了卓越項獻，但尚未完成分析的算術化。

十九世紀， 複變函數論逐漸成爲數學的一個獨立分支， 柯西爲此作了奠基性的工作。

複函數與複冪級數

《分析教程》中有一半以上篇幅討論複數與初等複函數， 這表明柯西早就把建立複變函數論作爲分析的一項重要工程。 他以形式方法引進複數 (“虛表示式”)， 定義其基本運算， 得到這些運算的性質。 他比照實的情形定義複無窮小與複函數的連續性。

柯西利用實級數定義複値級數的收斂性並證明了一些收斂判別法。 對於複冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$， 他指出存在收斂半徑 R， 使得所給級數 “按虛表示式 z 的模小於或大於 R 而收斂或發散”。 他把 $\dfrac{1}{R}$ 刻畫爲 “當 n 無限增加時 a_n 的數値的 n 次根所收斂的各種極限的最大値”， 這就是 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$。 他用冪級數定義複指數函數和三角函數， 並討論了對數函數和反三角函數的多値性。 他利用函數方程求出了複二項級數之和。

在很長時間中， 柯西堅持對複數的形式看法。 1847 年， 他提出用同餘等價觀念看待複數， 把複數的運算解釋爲模 i^2+1 的運算， 而把 i 看作 “一個實在但不定的量” (文獻 [1]， (1)10)。 到了晚年， 他採納了複數的幾何表示 (文獻 [1]， (1)11)。

複積分

柯西寫於 1814 年的關於定積分的論文 (發表於 1827 年) 是他創立複變函數論的第一步。 他在文中批評歐拉、 拉普拉斯、 泊松和勒讓德都用了 “基於實過渡到虛的歸納法， …… 這類方法， 即使在使用時十分謹愼， 多方限制， 仍然使證明顯得欠缺”。 他宣佈自己的目標是 “用直接的嚴格的分析方法建立從實到虛的移植”。 文

中給出了所謂柯西－黎曼方程 (實際上達朗貝爾於 1752 年， 歐拉於 1776 年即已寫出這個方程組； 柯西於 1841 年得到了這個方程組的極坐標形式)； 討論了改變二重積分的次序問題， 提出了被積函數有無窮型間斷點時主值積分的觀念並計算了許多廣義積分。

柯西寫於 1825 年的關於積分限爲虛數的定積分的論文， 是一篇力作。 奇怪的是他本人似乎沒有充分看出此文的價值， 生前一直未發表。 文中用和的極限定義積分 $A+iB=\int_{a+ib}^{c+id}f(z)dz$， 指出當積分沿曲線 $x=\phi(t)$， $y=\psi(t)$ $(a\leq t\leq\beta)$ 計算時等於 $\int_\alpha^\beta[\phi'(t)+i\psi'(t)]f[\phi(t)+i\psi(t)]dt$。 接著他斷言：“假定函數 $f(x+iy)$ 當 x 保持介於界限 a 與 c 之間， y 保持介於界限 b 與 d 之間時爲有限且連續， ⋯⋯ 我們能容易地證明上述積分的值即虛表示式 $A+iB$ 不依賴於函數 $x=\phi(t)$ 、 $y=\psi(t)$ 的性質。” 這就是作爲單複變函數論基礎的 “柯西積分定理”。 柯西本人用變分方法證明了這條定理， 證明中曲線連續變形的思想， 可以說是 “同倫” 觀念的萌芽。 文中還討論了被積函數出現一階與 m 階極點時廣義積分的計算。

應當指出， 高斯於 1811 年致 F.W. 巴塞耳 (Bessel) 的一封信中已表述了積分定理， 稱它爲 “一條非常美妙的定理”， 說他 “將在適當時候給出它的一個不難的證明”， 但他一直沒有發表。

柯西於 1831 年得到關於圓的積分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{Re^{i\theta}f(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}-z}d\theta，$$

由此證明複函數可局部展開爲冪級數， 並在實際上指明了後者的收斂半徑是原點到所給函數最近極點之間的距離 (文獻 [1]， (2)12， 60－61)。 他還得到了所得冪級數通項和餘項的估計式， 後來發展爲他獨創的 “強函數法”。

殘數演算

術語 “殘數” 首次出現於柯西在 1826 年寫的一篇論文中 (文獻

[1]， (2)15)。 他認爲殘數演算已成爲“一種類似於微積分的新型計算方法”， 可以應用於大量問題，“例如 $\cdots\cdots$ 直接推出拉格朗日挿値公式， 等根或不等根情形下分解有理函數， 適合於確定定積分值的各種公式， 大批級數尤其是週期級數的求和， 具有有限或無限小差分和常係數、 末項帶或不帶變量的線性方程的積分， 拉格朗日級數或其它類似級數， 代數或超越方程的解 $\cdots$ 等等。”

他給出了 m 階極點 x_1 處的殘數公式

$$\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}(\epsilon^m f(x_1+\epsilon))}{d\epsilon^{m-1}}\Big|_{\epsilon=0}\text{。}$$

他先後得到關於矩形、 圓和一般平面區域的殘數定理

$$\int f(z)dz = 2\pi i E f(z)\text{，}$$

其中 E 表示“提取殘數” 即求 $f(z)$ 在區域內所有極點處殘數之和。 他還詳細討論了極點位於矩形邊界時如何適當修正係數 $2\pi i$ (文獻 [1]， (2)6， 124 − 145)。

1843 年， 柯西向科學院遞交了很多短論， 表明殘數演算可用於橢圓函數論。 次年劉維爾發表了有界雙週期函數恆等於一常數的定理後， 柯西立即指出它可以從殘數理論推出並可推廣到一般情形。 1855 年， 他證明了

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{Z'}{Z}dz = N - P\text{，}$$

其中 $Z(z)$ 是在區域 S 中只有孤立極點的函數， 積分沿 S 的邊界， N、 P 分別爲 $Z(z)$ 在 S 中零點和極點的個數 (文獻 [1]， (1)12， 285 − 292)。 他對殘數演算的興趣終生不減， 去世前三月還發表題爲《殘數新理論》(*Théorie nouvelle des residues*， 見文獻 [1]， (1)12) 的論文。 殘數演算很快引起了同時代數學家的注意， 越出了法國國界。 1834 年與 1837 年在義大利和英國分別出現了有關的綜述。 M.P.H. 洛朗 (Laurent) 於 1865 年出版了專著《殘數理論》

(*Théorie des residues*)。 俄國的第一篇關於複變函數的論文是 Ю. 索霍茨基 (Сохоцкий) 1868 年發表的關於殘數及其應用的學位論文。

複變函數論的建立

柯西對複變函數的研究也有不足。 首先， 對於這一理論的對象， 他一直未能明確界定， 實際上未能明確建立作爲複可微性的解析性概念。 其次， 他沒有區分孤立奇點的不同類型， 只注意了極點。 最後， 他沒有區別極點和分支點， 未能認識多值函數的本質。 在法國， 洛朗、 劉維爾、 皮瑟 (Puiseux) 和 C. 埃爾米特 (Hermite) 緊接著進行了許多研究。 C.A. 布里奥 (Briot) 和 J–C. 布凱 (Bouquet) 於 1859 年出版了《 雙週期函數論 》(*Théorie des fonctions doublement périodiques et， en particulier， des fonctions elliptiques*)， 闡明了柯西理論的對象， 系統闡述了複變函數論， 對於把柯西的觀念傳播到全歐洲起了決定性作用， 標誌著單複變函數論正式形式。

J.H. 龐加萊 (Poincaré) 在談論複變函數論的四位奠基人 — 高斯、 柯西、 黎曼和魏爾斯特拉斯時說：“柯西早於後兩位， 並爲他們指明了道路。” E. 皮卡 (Picard) 在比較高斯與柯西對這一領域的貢獻時說：“人們不大可能認爲高斯沒有抓住高度重要的事物； 然而， 忠於他的‘少而精’的格言， 他無疑一直在等待以使他的作品更加成熟， 而柯西這時卻公佈了自己的發現。 因而應當把柯西看作這一開闢了遠大前程的理論的眞正奠定基人。

彈性力學理論基礎的建立者

柯西之前的研究

十八世紀， 理性力學迅速發展， 成爲微積分學應用的一個特殊領域。 1788 年， 拉格朗日的《 分析力學 》(*Méchanique analy-*

tique) 出版。 書中不藉助幾何圖形， 只從虛位移原理出發推導出全部質點系力學。 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 曾說這本書是 “科學詩篇”。 在 1811 年的增訂第二版中， 拉格朗日通過把固體和流體看成無窮多個質點組成的系統， 進一步研究了連續固體和流體力學。 在此之前， 歐拉已建立了流體力學基本方程組。 但在當時， 固體力學還局限於不可變形的物體。

十九世紀初， 數學家們開始研究彈性面的平衡和運動。 S. 熱爾曼 (Germain) 和泊松於 1815 年各自獨立地得到了各向同性的可撓彈性表面的方程。 稍後， C.L.M.H. 納維 (Navier) 於 1820 年向科學院遞交了引人注目的論文， 應用拉格朗日和 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 的分析方法， 研究有負載的彈性板在不忽略其厚度時的微小變形。 但他把由伸縮引起的彈性力與由彎曲引起的力完全分開， 假定前者總沿它所作用的截面的法向， 而這在一般情況下是不成立的。 他於 1821 年寫的論文， 使用了分子模型， 是彈性論中極富創造性的研究， 但此文直到 1827 年才發表。

當時應力和應變概念尚未建立， 其特性更未得到數量刻畫。 由於未能把應力表示爲變形的函數， 連續介質力學的基本方程難於應用到彈性體上。 柯西於 1822 − 1830 年間發表的一系列論文， 使用連續物質和應力 − 應變模型， 成功地解決了這些問題。

應力

柯西把應力規定爲由外力和物體變形等因素引起的物體內部單位面積截面上的內力。 他認爲， 對物體內任一閉曲面 S， 在研究 S 的外部對內部的作用時， 可以忽略物體各部分的相互體力， 等價地用定義在 S 上的應力場來代替。 這可使計算大爲簡化， 並爲實驗證實。 由於歐拉已有類似想法， 所以現代稱它爲歐拉 − 柯西應力原理。

對於物體中任一點 P， 柯西通過點 P 處三個分別平行於坐

標面的截面上的應力來描述該點處任一截面上的應力。分別以 σ_{xx}、σ_{xy}、$\sigma_{xz}(\sigma_{yx}$、σ_{yy}、σ_{yz}；σ_{zx}、σ_{zy}、$\sigma_{zz})$ 表示點 P 處平行於 $yz\,(zx$、$xy)$ 坐標面的截面上的應力的 x、y、z 分量，柯西得到點 P 處法向量方向餘弦爲 ν_x、ν_y、ν_z 的截面上應力 σ_ν 的分量爲

$$\begin{aligned}
\sigma_{\nu x} &= \nu_x\sigma_{xx} + \nu_y\sigma_{yx} + \nu_z\sigma_{zx}\text{，}\\
\sigma_{\nu y} &= \nu_x\sigma_{xy} + \nu_y\sigma_{yy} + \nu_z\sigma_{zy}\text{，}\\
\sigma_{\nu z} &= \nu_x\sigma_{xz} + \nu_y\sigma_{yz} + \nu_z\sigma_{zz}\text{，}
\end{aligned}$$

現稱爲柯西斜面應力公式。由於 $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$、$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$、$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$，9 個量 σ_{xx}、$\cdots$、σ_{zz} 中只有 6 個是獨立的。用現代語言，這 9 個量構成一個二階對稱張量 — 應力張量。σ_ν 沿截面法向的分量爲

$$\begin{aligned}
\sigma_{\nu n} &= \sigma_{xx}\nu_x^2 + \sigma_{yy}\nu_y^2 + \sigma_{zz}\nu_z^2 + 2\sigma_{xy}\nu_x\nu_y\\
&\quad +2\sigma_{yz}\nu_y\nu_z + 2\sigma_{zx}\nu_z\nu_x\text{。}
\end{aligned}$$

在點 P 取所有可能的截面，沿法向取長度爲 $\sigma_{\nu n}$ 的向徑，則其端點構成一個二次曲面，現稱爲柯西應力二次曲面。在以此二次曲面三個互相垂直的軸爲法向的截面上，應力垂直於截面。這就是柯西引入的主應力。以這三個軸作爲坐標軸，應力矩陣成爲對角矩陣。於是，求一點處的應力狀態歸結爲求 3 個主應力。

應變與幾何方程

柯西把應變規定爲在外力作用下物體局部的相對變形。對於微小變形，他用類似於研究應力的方法研究一點處的應變狀態，指出它可用 6 個分量 ϵ_{xx}、ϵ_{yy}、ϵ_{zz}、ϵ_{xy}、ϵ_{yz}、ϵ_{zx} 描繪，現稱爲柯西應變張量或小應變張量。設 ξ、η、ρ 分別爲 x、y、z 方向的位移分量，他用略去高階無窮小的方法得到反映應變與位移之間關係的幾何方程

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\text{、}\epsilon_{yy} = \frac{\partial\eta}{\partial y}\text{、}\epsilon_{zz} = \frac{\partial\rho}{\partial z}\text{；}$$

$$\epsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)、\epsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)、$$

$$\epsilon_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)。$$

對於應變， 同樣可構造應變二次曲面， 建立主應變概念。

應力與應變之間的關係

對於微小變形， 柯西假定主應力分別沿主應變方向。 起初他考慮各向同性情形， 此時三個應力與主應變成等比例， 由此得到用 ϵ 線性表示 σ 或用 σ 線性表示 ϵ 的公式， 其中有兩個常數。 後來他進而研究各向異性情形， 此時用 ϵ 線性表示 σ 的公式中有 $3^4=81$ 分量即 81 個彈性常數。 由對稱性， 他推出其中只有 36 個是獨立的 (文獻 [1]， (2)9， $342-372$)。 這些公式是胡克定律的推廣， 現在通稱爲廣義胡克定律。

彈性體運動和平衡方程

在 1828 年關於彈性體與非彈性體內部運動和平衡的論文中， 對各向同性物體內任何一點， 柯西得到

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}，\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}，\\
(\lambda+\mu)\frac{\partial\nu}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right) &= \rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}，
\end{aligned}$$

其中 $\nu=\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z}$ 爲膨脹係數， λ、 μ 是由材料決定的常數、 ρ 是密度。 他還寫出了非各向同性的彈性體的運動和平衡方程。

總之，柯西確定了應力和應力分量、應變和應變分量概念，建立了彈性力學的幾何方程、運動和平衡方程、各向同性及各向異性材料的廣義胡克規律，從而奠定了彈性力學的理論基礎，成爲十九世紀繼拉普拉斯之後法國數學物理派最傑出的代表。

多產的科學家

柯西全集

柯西是僅次於歐拉的多產數學家，發表論文 800 篇以上，其中純數學約佔 65%，幾乎涉及當時所有數學分支；數學物理 (力學、光學、天文學) 約佔 35%。1882 年起，巴黎科學院開始出版《柯西全集》，把他的論文按所登載的期刊分類，同一種期刊上的則按發表時間順序排列。

《全集》凡 27 卷，分兩個系列。第一系列共 12 卷，發行於 1882 – 1911 年，包括發表於巴黎科學院刊物上的論文。第二系列共 15 卷。第 1、2 兩卷是發表於其它科學期刊上的論文；第 3、4、5 卷是他寫的教材；第 6 至 14 卷是他個人出版的刊物 — 51 期《數學演習》，5 期《分析概要》(*Resumés analytiques*)，8 期《數學新演習》和 48 期《分析和數學物理演習》。第 15 卷於 1974 年問世，主要包含他以小册子或石印形式發表的著作。

《全集》中有八篇文章談及教育、犯罪和宗教信仰問題；其它非科學著作未收入《全集》。柯西 1824 年在綜合工科學校講授第二學年分析的講義已由 C. 吉蘭 (Gilain) 編輯出版。他的大部分手稿和信件存放於巴黎科學院檔案館。

在柯西生前和身後，不斷有人批評他發表過多；事實上他也確實發表了一些價值很小或內容重複的文章，然而他的絕大多數論著都顯示了一位多才多藝的學者對科學的卓越貢獻。下面介紹他在前述三個領域外的主要工作。

柯西在歷史上首次研究了常微分方程的局部性態。給定微分方程 $y' = f(x, y)$ 及初始條件 $y(x_0) = y_0$，在 f 連續可微的假定下，他用類似於歐拉折線方法構造逼近解，利用微分平均值定理估計逼近解之間差的上界，嚴格證明了在以 x_0 爲中心的一個小區間上逼近解收斂，其極限函數即爲所提問題的解。他指出這個方法也適用於常微分方程組。柯西還給出具有非唯一解的初值問題的例子，表明他已洞察到微分方程論的本質。

柯西的另一貢獻是他所稱的 “界限演算” 即現在通稱的 “強函數法” 或 “強級數法”。他指出，對以前所用的微分方程積分法，“只要人們不提供保證所得級數收斂且其和是滿足給定方程的函數的手段，就往往是虛幻的。” 在研究 $f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 的鄰域內可展開爲冪級數的微分方程 $y' = f(x, y)$ 時他用 $y' = F(x, y)$ 與之比較，其中 F 滿足：如果

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \sum c_{kj}(x - x_0)^k (y - y_0)^j \text{，} \\
F(x, y) &= \sum C_{kj}(x - x_0)^k (y - y_0)^j \text{，}
\end{aligned}
$$

則對一切 k、j 有 $|c_{kj}| \leq C_{kj}$。他證明，如果 $y' = F(x, y)$ 在 x_0 的鄰域內有可展開爲冪級數的解，則 $y' = f(x, y)$ 在該鄰域內也有可展開冪級數的解；他並且給出了選取強函數的一般方法 (文獻 [1]，(1) 2，6、7)。

柯西還把殘數演算應用於解 $F\dfrac{du}{dt} = 0$ (F 是一個多項式)，得到

$$
u = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\phi(s) e^{st}}{F(s)}\, ds \text{，}
$$

其中 C 是任一包圍 F 所有零點的圍道，ϕ 是任一多項式 (文獻 [1]，(1)4，370)。

對於一階常係數線性微分方程組 $\frac{dx}{dt} = Ax$ (用現代寫法，其中 x 是 n 維向量，A 是給定的 n 階矩陣)，他引進 $S(s) = \det(A - sI)$ (I 是單位矩陣)，得到所給方程組在初始條件 $x(0) = \alpha$ 下的解 (文獻 [1]，(1)5，6)。

偏微分方程

柯西與 J.F. 普法夫 (Pfaff) 同時 (1819 年) 發現了一階偏微分方程組的特徵線法，但他的方法更簡便。對於方程組

$$\frac{dx_i}{dt} = Z_i(x_1, \cdots, x_n), \quad i = 1、\cdots、n，$$

他設計利用 e^{tZ} 的另一解法，這裡 $Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$，並用強級數證明收斂性 (文獻)[1]，(2)9，399－465)。

柯西把傅里葉變換應用於他在研究流體力學、彈性論和光學中遇到的常係數線性偏微分方程。他在 1815 年的論文中已正確寫出了傅里葉變換的反演公式 (傅里葉於 1807 年和 1811 年已得到這些公式，但直到 1824 至 1826 年才發表)。他還引進了積分號下的收斂因子和奇異因子 (相當於 δ 函數)。在大量使用傅里葉變換方面，柯西超過了泊松以至傅里葉本人。

1821 年後，柯西考慮了寫成算子形式的線性偏微分方程

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0，$$

其中 F 是 $n+1$ 元多項式。他發現，對於滿足 $F(\omega_1, \cdots, \omega_n, s) = 0$ 的每組 ω_1,、$\cdots$、ω_n, s，$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x_k + st\right)$ 是所給方程的解。他把這類指數形式的解迭加，以便用傅里葉變換得到通解。

對於波動方程， 這就是平面諧波的迭加。 當給定初始條件

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0 \quad (k=0、1、\cdots, n-2)，$$

$$\left.\frac{\partial^{n-1} u}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=0} = \nu(x_1, \cdots, x_n)$$

時， 他得到了寫爲圍道積分形式的解 (文獻 [1]， (2)1 、 2)。

柯西於 1842 年考慮了一階線性偏微分方程組的初值問題：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial t} = F_k\left(t, x_1, \cdots, x_n; u_1, \cdots, u_m, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n}\cdots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}\right)， \\ u_k(0, x_1, \cdots, x_n) = \omega_k(x_1, \cdots, x_n)。 \end{cases}$$

其中 $k = 1、2、\cdots、m$。他用強函數證明，如果 F_k 是某點鄰域內的解析函數且對於各個 $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}$ 是線性的，而 ω_k 在該鄰域內也解析， 則所給問題存在唯一解， 並可展爲局部收斂的冪級數 (文獻 [1]， (1)6， 461 − 470)。 後來 C. B. 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 於 1875 年重新發現和證明了這個結果。

群論

E. 伽羅瓦 (Galois) 使代數研究的性質起了根本的變化， 而柯西是伽羅瓦的先驅者之一。 他在 1812 年關於對稱函數的論文中證明， n 元有理函數能取的不同值的數目， 或者不大於 2， 或者不小於包含於 n 中的最大質數 p。

柯西與拉格朗日 、 P. 魯菲尼 (Ruffini) 同爲最早研究代換群的數學家。 柯西定義了代換之積，引進單位代換、 逆代換、 相似代換、 代換的階以及共軛代換系等概念， 證明 P 與 Q 相似當且僅當存在代換 R 滿足 $Q = P^{-1}RP$； 任一代換群的階可被群中任一代換的階整除； n 個變量的代換構成的任何群的階是 $n!$ 的一個因子 (此點其實已爲拉格朗日證明)； 當 $n > 4$ 時， n 個變量的一切

代換構成的群 S_n 的子群 H 在 S_n 中的指數或者是 2， 或者至少是 n； 如果質數 p 整除一有限群的階， 則在群中存在 p 階元。 刊載這些結果的論文發表於 1845 − 1846 年 (文獻 [1]， (1)9、 10 及文獻 [13])， 當時即得到廣泛傳播， 對群論的發展有相當大的影響。

行列式

萊布尼茨、 拉格朗日、 拉普拉斯等人都研究過行列式。 在十九世紀， 很大程度上是柯西使它得到持續發展。 事實上， déterminant (行列式) 這個術語就是他引入的。 與現在通常的做法不同， 柯西於 1812 年從 n 個元或數 a_1、 $\cdots$ 、 a_n 出發， 作所有不同元之差的積 $a_1a_2\cdots a_n(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})$； 對於這個積中各項所含的冪， 把字母右肩上的指數改寫爲第二個下標， 即把 a_r^s 改寫爲 $a_{r\cdot s}$， 把這樣改寫後得到的表示式定義爲一個行列式， 記作 $S(\pm a_{1\cdot 1}a_{2\cdot 2}\cdots a_{n\cdot n})$。 然後他把所得式中 n^2 個量排成正方形表

$$\begin{array}{cccc} a_{1\cdot 1} & a_{1\cdot 2} & \cdots & a_{1\cdot n} \\ a_{2\cdot 1} & a_{2\cdot 2} & \cdots & a_{2\cdot n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n\cdot 1} & a_{n\cdot 2} & \cdots & a_{n\cdot n} \end{array}$$

稱這 n^2 個量構成一個 “n 階對稱系”， 並用循環代換給出確定各項符號的法則。 他引進共軛元、 主元等概念， 導出行列式的許多性質。 他還把行列式用於幾何與物理問題， 例如求平行六面體體積。 在與波有關的問題中引進的條件 $S(\pm\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc})=1$， 左邊就是後來通稱的雅可比行列式。

數論

柯西在數論中也得出不少結果或給出一些已有結論的新證

明。1813 年，給出 P. de 費馬 (Fermat) 關於每個正整數是 m 個 m 角數之和這一論斷的第一個證明；他還得到，除四個數外，所有其餘的 m 角數均可取 0 或 1 (文獻 [1]，(2)6，320 − 353)。1840 年，他證明若 p 是形如 $4l+3$ 的質數，A 是 p 的二次剩餘，B 是 p 的二次非剩餘，兩者均於 0 與 $\frac{p}{2}$ 之間，則依 $p=8l+3$ 或 $8l+7$，有

$$\frac{A-B}{2} \equiv -3B_{(p+1)/4} \quad \text{或} \quad B_{(p+1)/4} \pmod p,$$

其中 B 爲伯努利數 (文獻 [1]，(1)3，172)。他還得到，如果 n 沒有平方因子且形如 $4l+3$，A、B 是 n 的小於 $\frac{n}{2}$ 的二次剩餘與二次非剩餘的數目，則

$$A-B=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b-\sum a}{n}=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b^2-\sum a^2}{n^2},$$

其中 a、b 大於 0 小於 n 且 $(\frac{a}{n})=1,\ (\frac{b}{n})=-1$。對 $n=4l+1$ 也有類似公式。他由此得到，對 $n=4l+3$，

$$h(-n)=\left(2-\frac{2}{n}\right)\frac{\sum b^2-\sum a^2}{n^2},$$

其中 $h(-n)$ 是眞本原類的個數。該式稱爲柯西類數公式 (文獻 [1]，(1)3，388)。

解析幾何

柯西有效地應用了直線和平面的法式方程，給出了空間直線方程的參數形式

$$\begin{aligned}\frac{x-x_0}{\cos a} &= \frac{y-y_0}{\cos b} = \frac{z-z_0}{\cos c} \\ &= \pm\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.\end{aligned}$$

他研究了二次曲面的分類，完整地討論了徑面和中心問題，完善了歐拉、蒙日和 J.N.P. 阿歇特 (Hachette) 的有關工作。他在本質上給出了現在教書上通用的由標準型二次項係數的符號來分類的結果。他還研究了單葉雙曲面的母線 (文獻 [1]，(2)5、8)。

微分幾何

歐拉給出了空間曲線的弧微分公式，柯西進一步用弧長作爲參數，使 x、y、z 的作用對稱化。他定義了位於密切平面上的主法線，指出其方向餘弧與 $\frac{d^2x}{ds^2}$、$\frac{d^2y}{ds^2}$、$\frac{d^2z}{ds^2}$ 成比例。他得到空間曲線和撓率公式

$$\frac{1}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}、\frac{1}{\tau}=\frac{d\Omega}{ds}，$$

其中 Ω 是密切平面與一固定平面的夾角。後來 F.J. 弗雷內 (Frenet) 於 1847 年，J.A. 塞瑞特 (Serret) 於 1850 年獨立於柯西給出了通稱的弗雷內－塞瑞特公式。

柯西證明曲面上通過某點的所有曲線在該點的切線位於同一平面上，此即切平面。設曲面方程爲 $u(x,\ y,\ z)=0$，他寫出點 $(x,\ y,\ z)$ 處的切平面方程爲

$$(\xi-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial u}{\partial y}+(\rho-z)\frac{\partial u}{\partial z}=0。$$

誤差論

拉普拉斯研究了如何使 n 個觀察數據 $(x_k,\ y_k)$ $(k=1、2、\cdots、n)$ 擬合於直線 $y=ax+b$。柯西在拉普拉斯建議下用類似方法研究了三維數據擬合 $z=ax+by+c$ 的問題 (文獻 [1]，(2)1、2)，他提出使一組觀察數據擬合於多項式 $u=ax+by+cz+\cdots$，其中項數依賴於擬合的優度，在計算過程中確定。他假定誤差

$\omega_k = u_k - ax_k - by_k - cz_k - \cdots$ 具有概率密度 f， 並採用了一些不大可靠的假設， 結果得出一個著名的概率密度： 若 f 滿足他所作的假設， 則它具有傅里葉變換 $\phi(\xi) = e^{\alpha\xi^N}$， α、 N 爲常數。 當 $N = 1$ 時， 就得到通稱的柯西概率密度

$$f(\xi) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{1+\gamma^2\xi^2}$$

(文獻 [1]， (1)2， 5 − 17)。

數值分析

像許多同時代數學家一樣， 柯西也熱衷於數值逼近。 他計算 e 到小數點後 7 位， 並估計了取 e 的級數展開前 n 項時所會產生的誤差。 他描述了解方程的迭代方法， 並且在具體例子中給出誤差估計。 對於微分方程和差分方程， 他也給出了許多近似解的誤差估計。 他首次表述了牛頓求方程根的方法在何種條件下收斂， 並且藉助現稱的柯西 − 施瓦茲不等式推廣到複函數情形， 給出了數值例子。 他把拉格朗日插值公式推廣到有理函數， 並得到了與高斯、 埃爾米特所得結果類似的三角插值公式 (文獻 [1]， (1)5、 (2)3)。

光學

柯西在兩個方面改進了 A.J. 菲涅爾 (Fresnel) 的理論。 第一， 他從以太 − 分子作用的更一般的理論出發， 預言了 3 條偏振光線的傳播， 而菲涅爾認爲只有二條。 第二， 柯西指出菲涅爾關於光線中以太分子的振動垂直於偏振平面的看法不對， 認爲偏振平面平行於光線和以太振動的方向。

柯西還對光的反射和折射提出了自己的看法， 並相當成功地解釋了雙折射。 他還試圖在分子基礎上解釋光速對波長的依賴問題。 (文獻 [1]， (1)2、 4、 5； (2)2)

天體力學

柯西證明了天文學中出現的一些級數的收斂並做了詳細的計算，特別對刻卜勒方程的解和攝動函數的展開進行了細緻的討論，其中有現在天文學教材上仍提到的柯西係數。柯西關心 U.J.J. 勒威耶 (Le Verrier) 的工作，後者於 1845 年對智神星平均運動中的大不等式做了冗長的計算，柯西隨即用簡單得多的方法加以檢驗。他使用的工具是偏近點角到平近點角的過渡公式以及所謂 “柯西混合法”，即在計算攝動函數的負冪時把數值積分與有理積分結合起來，並按平近點角展開攝動函數，對某項後的各項進行漸近估計。(文獻 [1]，(1)5)

複雜的人

從柯西卷帙浩大的論著和多方面豐碩的成果，人們不難想像他一生怎樣孜孜不倦地勤奮工作。但是，如果不了解柯西的另一些側面，對他認識就會是不完整的。

忠誠的保王黨人

柯西屬於波旁有產階層，畢生忠於波旁王室。他於 1808 年加人聖會，該會成立於 1801 年，發展很快，逐漸由初創時的宗教團體演變爲具有強烈保王黨色彩的政治團體，在波旁王朝復辟時代舉足輕重，能左右政局。

如前所說，1830 年革命後，柯西離開法國。他在 1835 年對此事作了如下解釋：“人們非常清楚地知道是什麼事件使我正式放棄我在法國擁有的三個席位，只有何種莊嚴的召喚才能使我放棄撒丁國王屈尊授予我的數學物理教席。無庸置疑，我確信我能爲路易十六近裔 ⋯⋯ 的進展做出貢獻。”(文獻 [1]，(2)10，189－190。) 這裡的 “事件” 當然指波旁王朝再次傾覆，而 “莊嚴的召喚” 當然指查爾斯十世聘請他擔任其孫的宮廷教師。1852 年 5 月，柯

西爲拒絕宣誓效忠拿破侖三世致信巴黎理學院院長， 聲明他繼續忠於波旁王室。

具有諷刺意味的是， 正是推翻了波旁王朝的法國大革命， 爲科學進步、 也爲柯西天才的發揮創造了十分有利的條件。 革命後科學家和工程師享有的崇高榮譽， 綜合工科學校的建立， 以及許多科學機構的積極活動， 都是對年輕有爲者從事科學工作的巨大吸引和鼓舞。 另一方面， 柯西在科學中的卓越貢獻， 也是對社會革命的促進。 情形多少有點像巴爾扎克： 他也是保王黨人， 但《人間喜劇》(*La comédie humaine*) 描繪的卻正是貴族階級只配落得破產的命運。

熱心的天主教徒

柯西的父親從小對柯西進行宗教教育， 因而柯西童年時即已熟讀《聖經》。 1816 年後， 柯西積極參加聖會的慈善活動， 訪問醫院和監獄， 宣傳教義。 1824 年， 他參與籌組天主教協會， 爲五名理事之一。 他多次在科學院會議上頌揚宗教， 司湯達爾 (Stendhal) 稱他爲 “法蘭西研究院中穿短袍的耶穌會士”。 1839 年柯西參與創建天主教學院， 1842 年任該院秘書， 熱心於院裡的教學。 1850 年曾在《宗教之友》(*L’Ami de La Religion*) 上發表兩封長信， 對反耶穌會的人進行攻擊。

柯西的天主教宗教活動與保王黨政治態度是緊密相聯的。 正如他自己所說： “天主教事務由正統派獨攬”， 這裡 “正統派” 就是擁戴波旁王室的政治派別。

落落寡合的學者

儘管柯西彬彬有禮， 但與科學院中的同事關係冷淡。 十九世紀二十年代的一篇文章這樣評論柯西： “他的呆板苛刻以及對剛踏上科學道路的年輕人的冷漠， 使他成爲最不可愛的科學家之一。”

科學界對復辟的王朝於 1816 年辭退卡諾和蒙日很反感， 因爲兩

人都是受人尊敬的科學家。 柯西卻毫不猶豫地接受了國王令他接任院士的任命。 以柯西的才華和貢獻而不通過選舉成爲院士， 實在不是什麼光榮。

柯西在科學院會議上宣揚宗教， 加之他性格孤僻， 很不欣賞具有自由派色彩的科學家如普安索和阿拉戈， 就使他在會議中常處於孤立狀態。 正如有人回憶的：“他的天主教狂熱和多疑的性格， 使他在這樣的集會上與周圍的人很不協調， 顯得怪誕。”

作為教師和導師的柯西

雖然柯西寫下了偉大的分析教本， 但似乎算不上一位出色的教師。 在綜合工科學校講授分析時， 由於內容過於抽象， 曾多次受到校方和學生的批評。 在都靈大學講課時， 開始報名聽課的人很多， 而其講課情形， 據 L.F. 梅納勃勞 (Menabrea) 回憶說：“非常混亂， 突然從一個想法跳到另一個公式， 也弄不清是怎麼轉過去的。 他的講授是一片烏雲， 但有時被天才的光輝照亮； 對於青年學子， 他令人厭倦。” J. 貝特朗 (Bertrand) 曾這樣回憶柯西在巴黎理學院的講課：“應當承認， 他的第一堂課使聽衆 (他們都是優秀學生) 的期望落空， 他們不是陶醉而是驚訝於他涉及的有點混亂的各式各樣的主題。” 不過， 他在講課時所表現出的天才仍使不少人受益， 包括後來成爲優秀數學家的埃爾米特、 皮瑟、 布里奧、 布凱和 C. 梅雷 (Méray)。

當時巴黎是歐洲數學中心， 年輕學子從各地趕來， 在巴黎理學院和法蘭西學院聽課， 拜會久負盛名的科學泰斗。同時， 法國本土也不斷產生年輕的天才。 所有這些人都需要得到鼓勵和指導。 柯西本人起步時也得到過拉格朗日、 拉普拉斯和泊松的幫助， 但他對後起之秀卻不甚熱心， 有時甚至冷漠無情。 在對待 J.V. 龐斯列 (Poncelet)、 阿貝爾和伽羅瓦的態度上， 柯西爲人的欠缺至爲明顯。

龐斯列關於射影幾何的研究招致柯西嚴厲的批評，說它缺乏嚴格性。許多年後，龐斯列在回憶柯西於 1820 年 6 月的一天打發他走時，仍然充滿怨氣和辛酸，說從柯西那裡“沒有得到任何指點，任何科學評價，也不可能獲得理解”。是不是由於龐斯列參加了 1812 年的遠征並在俄國被俘而導致作爲保王黨人的柯西的反感，就不得而知了。

阿貝爾寫道，對於柯西，“沒法同他打交道，儘管他是當今最懂得應當如何搞數學的數學家。”“我已完成了一篇關於一類超越函數的大文章，…… 我把它給了柯西，但他幾乎沒有瞄一眼。”這就是那篇在橢圓函數論中具有劃時代意義的論文。傅里葉於 1826 年 10 月 30 日把此文送交勒讓德和柯西，並讓後者寫審定結論。柯西把稿子扔在一邊，只是當雅可比注意到此文並通過勒讓德徵詢其下落時，柯西才於 1829 年 6 月 29 日把該文連同他寫的一篇頗有保留的評論提交科學院，而這時阿貝爾已去世。此文直到 1841 年才發表。

1829 年 6 月，伽羅瓦把他關於代數方程解的兩篇論文呈遞科學院。6 月 1 日的科學院會議決定讓柯西進行審查，但他沒有作出任何結論，他把這兩份手稿丟失了! 這兩份珍貴的手稿迄今仍未找到。

文　　獻

原始文獻

[1] A.L. Canchy, *Oeuvres complétes d'Augustin Cauchy*, Ganchier–Villars, Paris, 1882－1974。

[2] A.L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique;* 1re *partie, Analyse algebrique*, 1821； *Oeuvres*, (2) 3 (即第二系列第 3 卷，下仿此)。

[3] A.L. Cauchy, *Resumé des Lesons donnés a l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Tome premier, 1823； *Oeuvres*, (2)4, 1－261。

[4] A.L. Cauchy, *Lesons sur les applications du calcul infinitésimal á la gćmétrie*, 1826－1828； *Oeuvres*, 2(5)。

[5] A.L. Cauchy, *Lesons sur le calcul differential*, 1829； *Oeurves*, (2)4, 263－609。

[6] A.L. Cauchy, *Théorie de la propagation des ondes a la surface d'un fluide pesaut d'une profondeur indéfinie*； *Oeuvres*, (1)1, 5－318。

[7] A.L. Cauchy, *Mémoire sur la théorie des intégrales définies*； *Oeuvres*, (1)1, 319－506。

[8] A.L. Cauchy, *Mémoire sur les integrales définies prises entre des limites imaginares*； *Oeuvers*, (2)15, 41－89。

[9] A.L. Cauchy, *Sur les équations qui expriment les conditions d'equilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique*； *Oeuvres* , (2)8, 195－226。

[10] A.L. Cauchy, *De la pression ou tension dans un systéme de points matériels*； *Oeuvres*, (2)8, 251－277。

[11] A.L. Cauchy, *Équations differentielles, cours inédit (tragment), Études Vivantes*, Paris, 1981。

[12] A.L. Cauchy, *Sur les fonctions symétriques*； *Oeuvres*, (2)1, 64－169。

[13] A.L. Cauchy, *Mémoire Sur les arrangements que I'on peur former avec des lettres données*； *Oeuvres*, (2)8, 171－282。

研究文獻

[14] 沈永歡， 十九世紀函數論發展中的幾個關鍵時刻， 北京工業大學學報， 11(1985)， 125－136 頁。

[15] B. Belhoste, *Cauchy, Un mathématicien légitimiste an XIXe siécle*, Belin, 1984。

[16] J. Bertrand, *La vie et les travaux du baron Cauchy par C.A. Valson*, Jourl. Savants, 1896, 205－215。

[17] J. Bertrand, *Éloge d'Augustin–Louis Cauchy, Éloge Acad.*, 2, Paris, 1909, 101－120。

[18] U. Bottazzini, *The higher calculus*： *A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Springer, 1986。

[19] A. Dahan, *Les travaux de Cauchy sur les substiutions, Étude de son approache du concept de groupe*, Arch. Hist, Exact Sci., 23(1980), 279－319。

[20] A. Dalmas, *Évariste Galols, Revolutionaire et géométre*, Fasquells Éditeurs, 1956 (中譯本： A. 達爾瑪， 伽羅瓦傳， 商務印書館， 1981)。

[21] H. Freudenthal, *Cauchy, Augustin–Louis*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 1971, 131－148。

[22] J.V. Grabiner, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, MIT Press, 1981。

[23] I. Grattan–Guinness, *Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early nineteenth centry*, Arch. Hist. Exaci Sci., 6 (1970), 372－400。

[24] I. Grattan–Guinness, *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler ot Riemann*, MIT Press, 1970。

[25] I. Grattan–Guinness, *Convolutions in French mathematics,* 1800－1840*, from the calculus and nechanics to mathematical analysis and mathematical physics*, 3 vols., Birkhäuser Verlang, 1990。

[26] O. Ore, *Niels Henrick Abel, Mathematician extraordinary*, Chelsea, 1957。

[27] E. Picard, *Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences*, Paris, 1905。

[28] H. Poincaré, *L'oeuvre mathématique de Weierstrass*, Acta Math, 22 (1899), 1－18。

[29] C.–A. Valson, *La vie et les travaux du baron Cauchy*, Paris, 1968