格　林

格林， G. (Green， George) 1793 年 7 月生於英國諾丁漢郡 (Nottingham)； 1841 年 5 月 31 日卒於諾丁漢郡。 數學。

格 林

李 文 林

(中國科學院數學研究所)

格林， G. (Green， George) 1793 年 7 月生於英國諾丁漢郡 (Nottingham)； 1841 年 5 月 31 日卒於諾丁漢郡。 數學。

1793 年 7 月 14 日， 英國諾丁漢郡聖瑪麗教堂的命名登記簿上增加了當地麵包師 G. 格林 (Green) 與其妻莎拉 (Sarah) 新生男嬰的名字 — 與父親同名的喬治。 格林的具體生日不詳， 據命名日估計應在當年的 6 月 1 日與 7 月 14 日之間。 格林八歲時曾就讀於 R. 古達克爾 (Goodacre) 私立學校。 據格林的妹夫 W. 湯姆林 (Tomlin) 回憶， 格林在校表現出非凡的數學才能。 可惜這段學習僅延續了一年左右。 1802 年夏天， 格林就輟學回家， 幫助父親做工。 十九世紀初的諾丁漢郡正處於上升時期。 編織業的發達， 造成了人口的密集， 與拿破侖的戰爭又促使小麥生意興隆。 1807 年， 格林的父親在諾丁漢近郊的史奈登 (Sneinton) 地方買下一座磨坊， 從麵包師變成了磨坊主。 父子二人慘淡經營， 家道小康。 但格林始終未忘他對數學的愛好， 以驚人的毅力堅持白天工作，晚上自學， 把磨坊頂樓當作書齋， 攻讀從本市布朗利 (Bromley) 圖書館借來的數學書籍。 布朗利圖書館是由諾丁漢郡有影響的知識界與商業界人士贊助創辦的， 收藏有當時出版的各種重要的學術著作以及全套《 皇家學會哲學學報 》(*Philosophical Transactions of Royal Society*)。 對格林影響最大的是法國數學家 P.S. 拉普拉斯 (Laplace)、 J.L. 拉格朗日 (Lagrange)、 S.D. 泊松 (Poisson)、 S.P. 拉克羅阿 (Lacroix) 等人的著作。 通過鑽研， 格林不僅掌握了純熟的分析方法， 而且能創造性地發展、 應用， 於是 1828 年完成

了他的第一篇也是最重要的論文 — “論數學分析在電磁理論中的應用”(*An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*)。 這篇論文是靠他的朋友們集資印發的， 訂閱人中有一位 E.F. 勃隆黑德 (Bromhead) 爵士， 是林肯郡的貴族， 皇家學會會員。 勃隆黑德發現了論文作者的數學才能， 特地在自己的莊園接見了格林， 鼓勵他繼續研究數學。

與勃隆黑德的結識成爲格林一生的轉折。 勃隆黑德係劍橋大學岡維爾－凱厄斯 (Gonville-Caius) 學院出身， 同時又是劍橋分析學會的創始人之一。 他建議格林到劍橋深造。 1829 年 1 月， 格林的父親去世， 格林獲得了一筆遺產和重新選擇職業的自由， 遂將磨坊變賣， 全力以赴爲進入劍橋大學作準備。 這期間他又完成了三篇論文 — “關於與電流相似的流體平衡定律的數學研究及其它類似研究”(*Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrum of fluids analogous to the electric fluid with other similar research*， 1832.11)、 “論變密度橢圓球體外部與內部引力的計算”(*On the determination of the exterior and interior attractions of ellipsoids of variable densities*， 1833.5)、 和 “流體介質中擺的振動研究”(*Research on the vibration of pendulums in fluid media*， 1833.12)， 均由勃隆黑德爵士推薦發表。 1833 年 10 月， 年已四十的格林終於跨進了劍橋大學的大門， 成爲岡維爾－凱厄斯學院的自費生。 經過四年艱苦的學習， 1837 年獲得劍橋數學榮譽考試 (Mathematical Tripo) 一等第四名， 翌年獲學士學位， 1839 年當選爲岡維爾－凱厄斯學院院委。 正當一條更加寬廣的科學道路在格林面前豁然展現之時， 這位磨坊工出身的數學家卻因積勞成疾， 不得不回家鄉休養， 於 1841 年 5 月 31 日在諾丁漢病故。

格林生前長期與磨坊領班 W. 史密斯 (Smith) 的女兒簡 (Jane) 同居， 但始終未正式結婚。 最初可能是由於他父親的反對這門婚事， 後來則因劍橋岡維爾－凱厄斯學院院委資格只授予單身

漢，格林爲了事業只好放棄正式結婚的打算。格林去世後，簡被承認爲其合法遺霜，人們都稱她爲“格林夫人”，他們生有兩個兒子、五個女兒。

格林短短的一生，共發表過十篇數學論文，這些原始著作數量不大，卻包含了影響十九世紀數學物理發展的寶貴思想。

格林是現代位勢理論的先驅與奠基人之一。拉普拉斯在引力計算、泊松在電磁問題中都曾用過這樣的函數 V，它同力場分量 $(X,\ Y,\ Z)$ 的關係爲

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x}，Y=-\frac{\partial V}{\partial y}，Z=-\frac{\partial V}{\partial z}，$$

$$dV=-Xdx-Ydy-Zdz。$$

拉普拉斯同時指出函數 V 滿足方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0，$$

並採用球調和方法來解此方程。但拉普拉斯和泊松的方法都僅適用於特殊的幾何形體，因此有必要發展更一般的理論，這正是格林的工作與前人不同的地方。

格林認識到函數 V 的重要性，並首先引進了“位勢函數”這一名稱，他在第一篇論文“論數學分析在電磁理論中的應用”中寫道：“這樣的函數以如此簡單的形式給出電荷基元在任意位置受力的數値。由於它在下文中頻繁出現，我們冒味地稱其爲屬於該系統的位勢函數，它顯然是所考慮的電荷基元 p 的座標的函數”。

格林接著便發展了位勢函數 V 的一般理論，特別是建立了許多對於推動位勢論的進一步發展極爲關鍵的定理與概念，其中尤以現用他的名字命名的“格林公式”與“格林函數”最爲著名。設有函數 U 和 V，在以曲面 σ 爲邊界的區域 τ 內充分光滑。格林從體積分

$$\int dxdydz\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dU}{dx}\right)+\left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dU}{dy}\right)+\left(\frac{dV}{dz}\right)\left(\frac{dU}{dz}\right)\right\}$$

出發，應用分部積分法推導得

$$\int d\sigma V\frac{dU}{dw}+\int dxdydzV\delta U=\int d\sigma U\frac{dV}{dw}+\int dxdydzU\delta V\text{。}$$

以上採用的是格林的原始記號，其中 $d\sigma$ 爲曲面的 σ 的微元，$d\omega$ 爲 σ 的內法線段微元，而

$$\delta V=\frac{d^2V}{x^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}$$

(即 $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial z^2}$，注意當時尚無偏微分記號)。這就是所謂格林公式 (或稱格林定理)。用現代記號表示則相當於

$$\int_\tau(U\bigtriangledown^2V-V\bigtriangledown^2U)d\tau=\int_\sigma(U\bigtriangledown V-V\bigtriangledown U)\cdot d\sigma\text{。}$$

格林還進一步探討了 U，V 在 τ 內有奇點的情況，提出格林函數的概念。這是一種帶奇性的特殊位勢 U，滿足方程 $\delta U=0$，且："僅在曲面內一點 p' 取奇異值，而在無限接近 p' 的鄰域內則相當於 $\dfrac{1}{r}$，r 爲與 p' 的距離"。格林同時假設 U 在曲面本身上恆等於零，用現代記號表示，格林函數 $G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ 滿足條件：

$$\bigtriangledown_r^2G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=0\ \ (\text{當}\ \ \mathbf{r}\neq\mathbf{r}')\text{，}$$

且有

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')\underset{\mathbf{r}\to\mathbf{r}'}{\sim}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\text{，}$$

以及

$$G(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=0\ \ (\text{當}\ \ \mathbf{r}\in\sigma)\text{。}$$

格林未給出函數 U 的存在與唯一性證明，但卻闡述了其物理意義："爲了說明確實存在所述的函數 U，我們設想曲面是一個接地良導體，在點 p' 上置一單位正電荷，則由 p' 及其在曲面上引發的電荷所產生的總位勢等於所要求的 U 的值"，而"U 滿足前述論證中所賦予的一切性質"。

格林公式與格林函數已成爲現代分析的基本工具， 格林函數更被日益廣泛地應用於現代物理的許多領域， 如量子碰撞、 基本粒子理論與固體物理等。 格林對於波動的數學理論有濃厚的興趣並發表了多篇論文， 其中最重要的是關於光波的研究。 光的波動的數學描述， 在十九世紀數學家中一直是一個時髦的課題。 在格林時代， 科學界所持的一種普遍意見是把光看作彈性固體以太的振動， 例如 A.L. 柯西 (Cauchy) 在光以太研究中採用了吸引與排斥形式相互作用的機械模型。 格林對柯西和其他學者對以太中力的性質作特殊假設的做法持批判態度， 他在論文 (*On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two noncrystallized media*， 1837) 中深刻地指出：

“我們對於發光以太元之間相互作用的方式知道得如此少， 因而最可靠的辦法還是以某種一般的物理原理作爲推理的基礎， 而不要去作特殊的假設。”

格林接著表述他所說的 “一般原理” 如下：

“任一物質系統的元素間不論以何種方式相互作用， 若以所有的內力分別乘以相應的方向元， 則對該物質系統的任一指定部分， 此乘積的和永遠等於某函數的恰當微分。”

這實質上相當於能量守恆原理。 格林是第一個將一般形式的守恆原理引入彈性力學的學者。 他由此出發導出了描述光媒質振動規律的偏微分方程。 在格林寫成他的光學論文時， M. 法拉第 (Faraday) 的電磁感應剛發現不久， 格林關於光波的數學研究還不具備突破機械以太觀的條件， 但他選擇一般數學原理作爲推導光媒質運動方程的基礎而避免對以太的力學性質作人爲的假設， 說明他在這方面比同期的其他數學物理學家要高出一籌。 格林的光波研究對彈性力學的發展亦有重要意義。 現代彈性理論中的一種應變張量就被稱爲 “格林張量”。

格林關於水波的研究也引起人們的注意。 1837 年， 英國工程

師 S. 羅素 (Russell) 首先觀察到一種叫 “孤立波”(solitary wave) 的現象。 羅素於 1844 年第二次在不列顛科學協會上作淺水波問題報告時， 曾埋怨數學家們未能預報與描述他所觀察到的現象。 然而在此之前， 格林已發表兩篇這方面的論文， 其中第一篇 “論具有較小深度與寬度的可變渠道中波的運動”(*On the motion of waves in a variable canal of small depth and width*， 1837) 幾乎是與羅素的第一份報告同時發表， 格林在其中導出淺水波公式方程爲：

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\left\{\frac{\partial\beta}{\beta\partial x}+\frac{\partial r}{r\partial x}\right\}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{1}{2r}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0\text{，}$$

其中 $\partial\phi$ 爲水平面對平衡位置的位移， 2β 、 $2r$ 分別表示矩形截面渠道的寬與深， 它們是 x 的函數。 爲了解上述方程， 格林作變換： $\phi=Af(t+X)$ (A 和 X 均爲 x 的函數)。 將 A 、 β 、 r 寫成 ωx 的函數， 設含 ω^2 的項可忽略不計， 則變換後原方程化爲兩個方程： 一個是關於函數 A 的方程， 另一個是關於函數 X 的方程。 分別解出這兩個方程， 得到淺水波方程的解爲：

$$\phi=\beta^{-\frac{1}{2}}r^{-\frac{1}{2}}\left\{f\left(t+\int\frac{dx}{(gr)^{\frac{1}{2}}}\right)+F\left(t-\int\frac{dx}{(gr)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}$$

其中 f 與 F 是任意函數。 經過比較不難看出， 格林的上述方法與現代孤立波理論中普遍使用的所謂 WKB 方法是一致的。

格林在他的第二篇淺水波論文 “關於渠道中波的運動的註記”(*Note on the motion of waves in canals*， 1839) 中， 利用前述理論討論深度爲 c 的渠道波的速度， 獲得了與實驗數據相符合的近似公式。

目前所知的第一個非線性孤立波理論方程是由 D.J. 科特維克 (Kotteweg) 與 C. 德弗里斯 (De Vries) 在 1895 年給出的。 但如果調查一下十九世紀水波方面的文獻， 可以清楚地看出一條線索， 說明科特維克與德弗里斯的理論是前人一系列研究的結晶， 而格林的

工作則處於這條線索的開端。 格林無疑是歷史上最早試圖從數學上描述孤立波現象的數學家。

格林的著作中還包含許多其它的貢獻， 它們的意義與影響有待進一步探討。 n 維空間的概念是 H. 格拉斯曼 (Grassmann) 於 1844 年首先提出的。 但在格林著作中已出現高維幾何的思想。 格林 1833 年完成的論文 “論變密度橢圓球體外部與內部引力的計算”， 率先發展了 n 元函數分析， 其中使用 s 個坐標 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s\}$ 來代替通常的三維歐氏坐標， 並使用 s 維球體與橢球體爲相應的三維圖形的推廣。

現代分析中扮演重要角色的所謂狄利克雷 (Dirichlet) 原理， 溯其源亦爲格林首創。 在上述同一篇論文中， 格林假設積分 (用格林的原始記號)

$$\int dx_1 dx_2 \cdots dx_s \cdot \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2$$

存在一個極小化函數 V_0， 並指出 V_0 滿足方程

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{d^2V}{dx_i^2} = 0 \text{，}$$

這正是 s 維情形的狄利克雷原理。 W. 湯姆遜 (Thomson， 即後來的凱文勳爵) 在 1847 年也闡述了同樣的原理， 而他對格林的工作是十分熟悉的。

格林的工作孕育了以湯姆遜、 G.G. 斯托克斯 (Stokes) 和 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 等人爲代表的劍橋數學物理學派。 現代數學物理仍然可以從格林著作中汲取營養。 然而這位靠自學成才的數學家生前卻默默無聞。 他的第一篇論文因未正式發表幾乎瀕於失傳。 湯姆遜在劍橋當學生時，是從一篇論文的文獻索引中了解到格林這篇文章的題目，四處尋覓原作而不得。 1845 年， 湯姆遜從劍橋畢業， 在行將離校的前夕將此事告訴了一位叫霍普金斯 (Hopkins) 的私人數學教師。 出乎他的意料， 霍普金斯細心收藏

著格林這篇著作的傳本。湯姆生帶著這篇著作踏上了赴法國考察的旅途，並在巴黎向 J. 劉維爾 (Liouville) 和 C.F. 斯圖姆 (Sturm) 介紹了格林的論文，二者閱讀後立即意識到該文的價值，認爲格林已爲位勢論及其應用奠定了基礎。後來，在德國數學家 A.L. 克列爾 (Crelle) 贊助下，格林這篇論文終於在他去世十年後在克列爾主編的《純粹與應用數學雜誌》(*Jour. für Rei. und Ang. Math.*) 上正式發表 (1850 年)，湯姆遜並爲此撰寫了介紹格林生平與工作的導言。1871 年，劍橋岡維爾－凱厄斯學院院委 N.M. 費勒 (Ferrers) 編輯的《格林數學文集》(*Mathematical papers of the late George Green*) 在倫敦出版，格林的工作受到了越來越多的重視。今天，格林度過他艱苦自學歲月的磨坊依然存在，到諾丁漢訪問的人，很遠就可以看到它聳立的風輪。諾丁漢市決定維護好格林的遺址，作爲對這位磨坊工出身的數學家的永久紀念。

文　獻

原始文獻

[1] N.H. Ferrers (ed.), *Mathematical papers of the late George Green*, Fellow of Gonville and caius college, Cambridge, London, 1871

研究文獻

[2] H. Gwynedd Green, A biography of George Green, mathematical physicist of Nottingham and Cambridge, 1793－1841, 見 M.F. Asheley (ed.), *Studies amd essays in the history of science and learning offered in Homage to George Sarton, On the occasion of his sixtieth brithday 31, Aug.* 1944, Schumann, N.Y., 1946, 549－594。

[3] J.E.G. Garina, *The work and significance of George Green, the miller mathematician,* 1793－1841, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications, 12 (1976), 4, 98－105。

[4] L.J. Challis and D. Phillips, *George Green, miller, Nottingham Castle*, 1976。