施　泰　納

施泰納， J. (Steiner， Jakob) 1796 年 3 月 18 日生於瑞士尼烏岑斯多夫 (Utzenstorf)； 1863 年 4 月 1 日卒於瑞士伯爾尼 (Bern)。 數學 。

施泰納之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Steiner.html

施　泰　納

方 茂 熾

(杭州大學)

施泰納， J. (Steiner， Jakob) 1796 年 3 月 18 日生於瑞士尼烏岑斯多夫 (Utzenstorf)； 1863 年 4 月 1 日卒於瑞士伯爾尼 (Bern)。 數學。

施泰納的父親尼克勞斯・施泰納 (Niklaus Steiner) 是個小農兼小店主， 母親名叫安娜・巴巴拉・韋伯 (Anna Barbara Weber)。 他們共有八個孩子， 施泰納是最小的一個。 在這個家族裡， 除施泰納外， 還有他的甥外孫 K.F. 蓋澤爾 (Geiser) 也是個數學家。

施泰納從小就和他的哥哥姐姐一樣， 要在農田和小店裡幫助父母親幹活， 未能進學校讀書， 直到十四歲還沒有學過寫字。 不過他很早就有口算的本領， 這幫了父母親很大的忙。 由於渴望學習， 1814 年春天他離開家鄉來到瑞士西南部的城市伊弗東。 他在 J.H. 佩斯塔洛齊 (Pestalozzi) 的學校裡既當學生又當教師。 在那裡， 佩斯塔洛齊主張與學生 “對話” 的教學改革思想對施泰納產生了很大的影響。 “對話” 教學方法就是在教師的引導下， 啓發學生自己得出數學結論。 施泰納積極支持這一方法， 在自己的教學中身體力行， 後來這方法成爲他教學工作的主要方法。 他在這裡進一步發現了自己的數學才能， 因爲他常常成功地對教材中的定理提出新的證法而被教師採納， 從而使他自信他能夠教授數學。 在伊弗東的幾年可說是施泰納一生中的一個轉折。 1826 年施泰納在給普魯士教育部長的申請書中特別提到這段經歷。

1818 年秋， 施泰納離開伊弗東來到海德堡。 在那裡， 他靠做私人教師維持生活， 同時繼續研習數學， 包括微積分和代數。 對

他影響最大的教師是 F. 施魏因茲 (Schweins)， 他的關於組合分析的講義， 爲施泰納後來的兩篇論文提供了基礎。

施泰納於 1821 年復活節來到柏林。 爲了得到教書的許可證， 他不得不參加學院考試。 他考得不很成功， 因而只領到教數學的有限的許可證， 不過總算得到了一個正式的工作， 他成爲韋爾德爾文科中學的教師。 開始時對他的教學反映是很好的， 但不久他就與校長不和， 終於在 1822 年秋被解雇。

被解雇後直至 1825 年， 施泰納再次靠做私人教師維持生活。 1822 年 11 月到 1824 年 8 月， 施泰納進柏林大學讀書。 他的同學中有後來成爲著名數學家的 C.G.J. 雅可比 (Jacobi)。 1825 年他成爲柏林師範學校的助理教師， 四年後任該校高級教師。

在柏林期間， 施泰納同 N.H. 阿貝爾 (Abel)、 A.L. 克列爾 (Crelle) 和雅可比友好， 他們共同把一種有生氣的新潮流注入數學中去。 他們的努力得到了由克列爾所創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*) 很大的幫助， 它後來成爲一本著名的雜誌， 又稱克列爾的雜誌。 它的第一卷於 1826 年出版。 施泰納在第一卷上發表了他的一篇重要著作 "若干幾何考察"(*Einige geometrische Betrachtungen*) 和受佩斯塔洛齊的啓發而寫成的文章 "關於平面和空間分割的若干法則" (*Einige Gesetze über die Teilung der Ebene und des Raumes*)。 從此以後， 施泰納在克列爾的雜誌上發表了大量的論文。 他還有許多文章發表在 J. D. 熱爾崗 (Gergonne) 創辦的《數學年刊》(*Annales de Mathématiques*) 上。 此外， 他在 1832 年和 1833 年連續出版了兩本著名的書， 後面將詳細介紹。

數學上的巨大成就給施泰納帶來了榮譽和地位。 1833 年施泰納獲得了柯尼斯堡大學名譽博士學位。 1834 年 7 月 5 日他榮任普魯士科學院院士。 1834 年 10 月 8 日， 施泰納被任命爲柏林大學特任教授， 他保持這一職位直到去世。 1853 年他成爲義大利科學院

的通訊院士。 1854 – 1855 年冬天他在巴黎時成爲法蘭西科學院通訊院士。

施泰納脾氣暴躁， 舉止粗魯， 言談生硬， 加上自由主義的政治觀點， 因此得罪了不少人。 他在韋爾德爾文科中學與校長不和以致被解雇， 雖然說法不一， 但這可能也是其中的一個原因。 後來在柏林師範學校教書時， 他再一次遇到了類似的麻煩， 受到校長嚴厲的對待。 在學術活動中也暴露出這些缺點。 他偏愛綜合方法的幾何而走向極端， 厭惡分析法。 他曾威脅說， 如果克列爾繼續發表 J. 普呂克 (Plücker) 的分析學文章， 他將停止爲克列爾的雜誌投稿。 他的 “對話” 教學法也過於偏激。 他教幾何不用圖， 在黑屋子裡給研究生上課。 他在指導別人時老是喜歡誇耀自己。 晚年發表的文章常常把別人的成果和自己的混在一起， 而不說明哪些是別人的成果。

施泰納終生未婚， 死後留下大約 90000 瑞士法郎 (合 24000 美元) 遺產。 他將三分之一的錢贈給柏林學會用來建立以他的名字命名的獎金， 又留下 750 法郎給他出生地的學校， 以獎勵擅長心算的學生， 其餘分給他的親友。

施泰納死後留下了大量的手稿。 其中部分手稿被編成二卷的《綜合幾何講義》(*Vorlesungen über synthetische Geometrie*) 於 1867 年出版。 他生前發表的許多著作， 包括 1832 和 1833 年的兩本名著， 都彙編成二卷本的《施泰納全集》(*Gesammelte Werke*)， 這一全集是由大數學家 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 編輯的， 於 1881 – 1882 年出版。 他的另一部分手稿於 1931 年才被編成《關於圓和球的相切和相交的一般理論》(*Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*) 一書出版。 還有一些手稿直至 1931 年也未出版， 不過其主要內容基本上可以在 “若干幾何考察” 一文中看到。

施泰納的一生處在綜合幾何由低潮走向復興， 直到又一次鼎

盛的時期。 自從 R. 笛卡兒 (Descartes) 和 P. de 費馬 (Fermat) 在十七世紀創建解析幾何學以後的 100 多年間， 幾何學已由代數和分析的方法佔據統治地位。 到了十九世紀初， 一些大數學家深感綜合幾何學是被不公正地忽視了， 因而作出積極的努力來復興和發展它。 這一復興綜合幾何的潮流源於法國。 第一個給予重要影響的是 G. 蒙日 (Monge)， 這位對解析幾何和微分幾何都做出過重要貢獻的人， 也對綜合幾何學傾注熱情， 他激發了他的一批學生對復興純粹幾何學的強烈願望。 其中有 C.J. 布利安生 (Brianchon)、 L.N.M. 卡諾 (Carnot) 和 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 等。 此外還有 M. 夏斯萊 (Chasles) 等人。 施泰納則是德國幾何學派中推崇綜合方法的第一人。 通過他的努力， 十九世紀綜合幾何學得到了蓬勃的發展， 歐幾里得幾何研究取得了許多十分精美的新結果。 十七世紀萌發的比較零散的射影幾何的一些定理終於發展成綜合的射影幾何學。 這些成果直至二十世紀上半葉仍是高中和大學的近世幾何和射影幾何的主要內容。

施泰納研究數學有他追求的目標， 這就是： 所有數學對象的有機的統一。 在 1826 年 12 月 16 日他給普魯士教育部長的要求教書的申請中寫道：“除了我熟悉和期望它之外， 我繼續從事教書的願望已被力求科學的統一和和諧而加強。 正如同一個數學分支中相關的定理出現在不同的章節裡一樣， 我相信數學分支本身也是如此。 我瞥見了所有數學對象有機的統一的理想， 這時我相信我能夠在某一大學裡， 即使不是作爲一個獨立的課題， 至少在特殊的形式下發現這個統一。” 施泰納對這一理想是貫徹始終的， 而且在綜合幾何學的工作中部分地實現這一理想。 他總是力圖從一些簡單的元素出發構造出新的複雜的數學結構； 或是用一種原理把一些分散的定理統一在一個基礎之上； 或是用一種方法統一地解決一批問題等等。

施泰納在數學上的貢獻， 首先是他推進了射影幾何的綜合的

發展。 1832 年他發表了名著《 幾何形的相互依賴性的系統發展 》(*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischen Gestalten von einander*)。 在這本書裡， 施泰納充分地發揮了他所追求的理想， 即從簡單的結構建造出更加複雜的結構。 但是這本書並沒有按原定計劃全部發表， 有些內容發表在他死後出版的《 綜合幾何講義 》第二卷裡。 施泰納在這方面最突出的成就是建立了以他的名字命名的

射影幾何基本定理　　二射影相關的線束的對應直線的交點組成一圓錐曲線， 其逆也真。

用度量的公式表示的這一定理， J. 德維特 (de Witt) 和牛頓實質上已經知道了， 然而施泰納第一個認識到這是射影幾何的定理， 而且他使它成爲圓錐曲線的射影處理的基石。

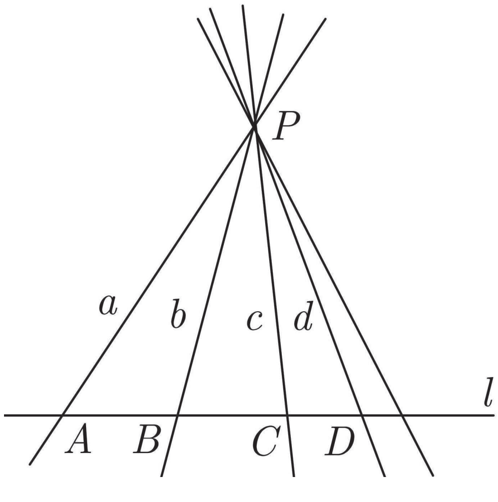

圖 1

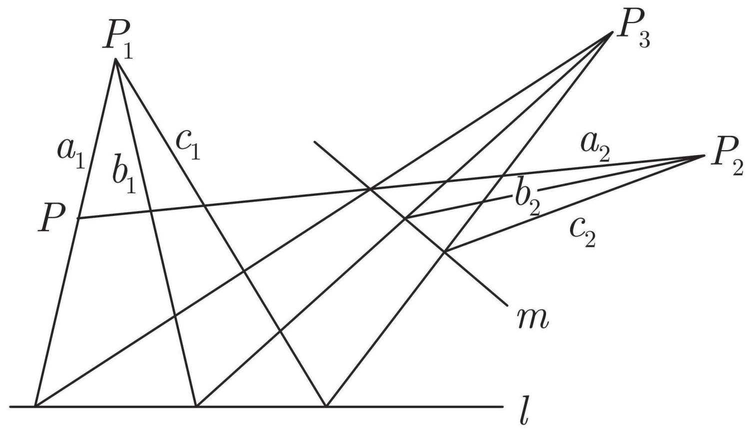

圖 2

施泰納認爲平面幾何的基本概念是一直線 l 上的點 A、 B、 C、 $\cdots$ 的全體組成的點列和通過一點 P 的直線 a、 b、 c、 $\cdots$ 的全體組成的線束之間的對應關係 (圖 1)。 A、 B、 C、 $\cdots$ 是 a、 b、 c、 $\cdots$ 與直線 l 的交點， 他稱線束和點列之間的這一關係爲射影。 如果線束 P_1 和 P_3 都與直線 l 射影相關， 則線束 P_1 和 P_3 也射影相關。 又若 P_2 和 P_3 射影相關， 則線束 P_1 和 P_2 亦射影相關 (圖 2)。

然後施泰納證明了他的關於圓的基本定理 (圖 3)："一圓上的任意二點 P_1、P_2 是二射影線束的中心，它們的對應直線相交於圓的其餘的點；在點 P_1、P_2 的反向切線 a_2、b_1 對應於直線 a_1、b_2。" 他還給出這一定理的對偶 (圖 4)："一圓的任意二切線 l_1、l_2 上的點列關於它們被其餘切線所截的對應點對是射影相關的；二切線的交點 A_1、B_2 分別對應於它們與圓的切點 A_2、B_1。"

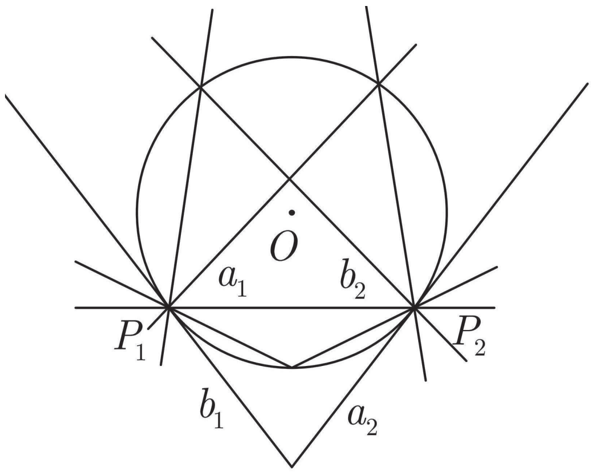

圖 3

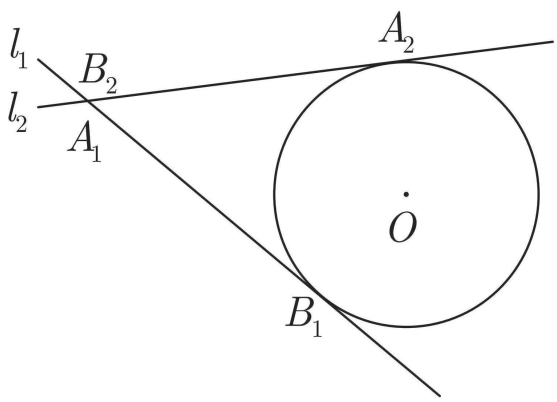

圖 4

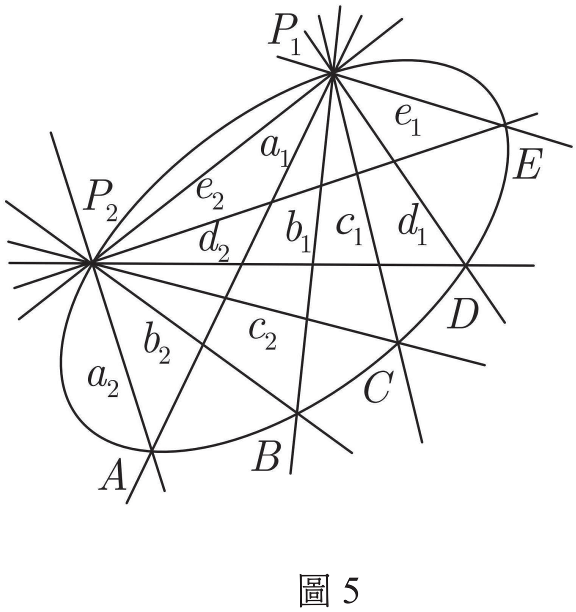

圖 5

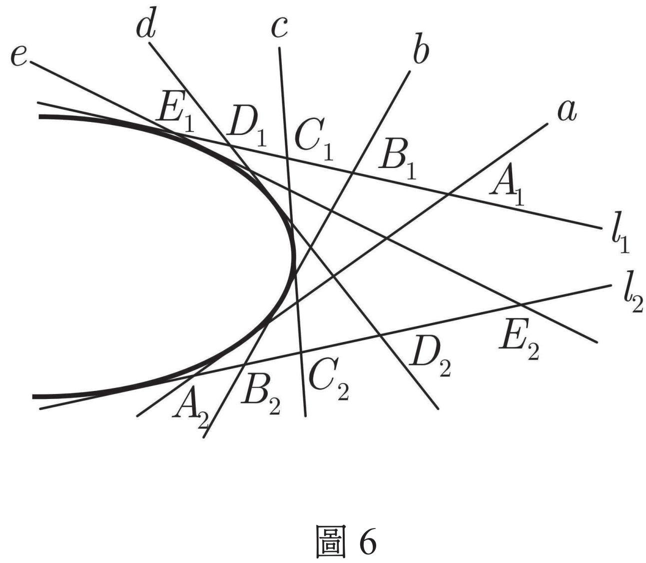

圖 6

在這兩個定理的基礎上，施泰納把圓推廣到圓錐曲線，於是就得到了上述射影幾何的基本定理 (圖 5) 及另一類似的定理 (圖 6)："圓錐曲線的任意二切線上的點列關於被其餘切線相截的對

應點對是射影相關的。 其逆亦眞。” 它實際上是基本定理的對偶。 有了這兩個定理， 就相當於從最基本的點列和線束及其射影關係出發用兩種方法構造了圓錐曲線。 施泰納把前者稱爲點圓錐曲線， 後者稱爲線圓錐曲線， 他還以類似的方法進一步構造了直紋的二次曲面， 單葉雙曲面和雙曲拋物面。

從這些基本定理出發， 施泰納推導出了一批新的射影幾何定理； 還把一批先前已經知道的定理在這基礎上用統一的形式推導出來。

施泰納在書中一開始就使用對偶原理。 運用對偶原理， 又可以把一些以前分別發現似乎沒有關聯的定理在對偶原理下統一起來。 例如十七世紀的帕斯卡定理和十九世紀的布利安生定理就是一組對偶命題， 可以十分工整地寫成如下的對偶形式：

帕斯卡定理 (圖 7)

在點圓錐曲線上任取六個點 A、B、C、D、E、F。若 A、B 的連線與 D、E 的連線相交得一點 P； B、C 的連線與 E、F 的連線相交得一點 Q； C、D 的連線與 F、A 的連線相交得一點 R，則 P、Q、R 三點在一條線 l 上。

布利安生定理 (圖 8)

在線圓錐曲線上任取六條線 a、b、c、d、e、f。若 a、b 的交點與 d、e 的交點相連得一線 p； b、c 的交點與 e、f 的交點相連得一線 q； c、d 的交點與 f、a 的交點相連得一線 r， 那麼 p、q、r 三線通過同一點 L。

施泰納的工作有其不足之處， 如他沒有證明他的圓錐曲線就是圓錐截線； 用他的射影爲基礎的方法對射影幾何其實是不夠普遍的； 他也沒有建立對偶原理的邏輯基礎。 但他以他所追求的理想爲指導， 並把對偶原理普遍化， 系統地發展了綜合的射影幾何學。

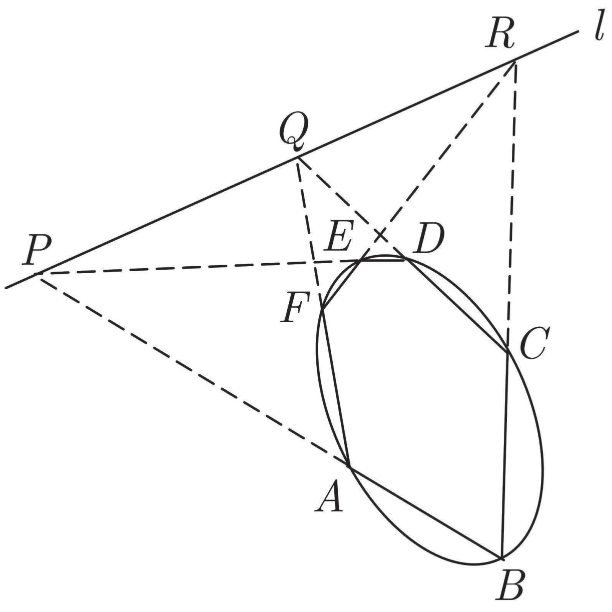

圖 7

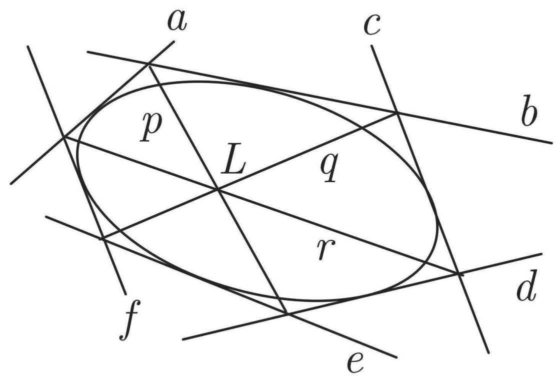

圖 8

在《系統發展》這本書的附錄裡，施泰納增補了 85 個“問題和定理”。這些問題吸引和鼓勵了一批幾何學家去探索，其影響所及，直到二十世紀。

施泰納的另一重大成就在於用純幾何的方法解決極大極小問題上。不用變分法而用純幾何的方法探討極大極小問題是十九世紀數學家們頗有興趣的主題之一。施泰納在這方面的主要著作是 1840 − 1841 年冬天在巴黎寫成“關於平面、球面和空間圖形的極大和極小” (*Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene*，*auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt*)。在這篇論中，他得到的最主要的結果是著名的

等周問題的解：在所有周長相等的平面圖形中圓的面積最大。其逆亦真。

這是個看上去簡單、直觀而又具有基本意義的定理，但用純幾何方法並不容易。施泰納卻給出了五種證明。

可是施泰納在證明時無形中假定了一個前提，即存在著一條曲線，它確實包圍著最大的面積。然而這並不是必然的事實，正如有界的無窮實數集未必包括它的上界一樣，這個存在性是須要加以

證明的。 那時的數學家還不能普遍認識到這一點。 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 看到了這一點並試圖說服施泰納， 但他堅持這是不證自明的。 不過他畢竟有些躊躇不安， 所以有一次他寫道：“如果假定有一個最大的圖形， 那麼證明就會變得非常容易了。” 這個存在性的證明直到十九世紀七十年代魏爾斯特拉斯運用變分法才得到解決。 當然後來人們不用變分法也能把施泰納的證明嚴格化。

施泰納的同一著作中還研究了其它平面圖形及空間圖形中稜柱、 稜錐和球的極值性質。

施泰納在極值問題的研究中常常使用他獨創的對稱化原理。 在等周問題的一種證明中就有二種用了對稱原理， 他還用這原理成功地實現了把多邊形變換到等積的多邊形。 在研究空間圖形例如球的極值性質時也使用了這一原理。 不過由於空間圖形比平面圖形更爲複雜， 他的對稱化原理有時顯得不夠嚴密。

在別的論文裡， 施泰納也常涉及極值問題， 例如他證明了在周長相等的三角形中， 等邊三角形的面積最大。 又如在圓錐曲線的研究中， 他得到了一連串有趣的結果：“在一個橢圓的內接四邊形中具有最大周長的是以該橢圓外切矩形的切點爲頂點的四邊形。 有無數這樣的四邊形。 它們全都有相同的周長， 它等於這矩形的對角線的二倍。 所有這些周長最大的四邊形都是平行四邊形； 它們共同外切於另一個橢圓， 這個橢圓的軸落在已給的橢圓的軸上， 且二者共焦點。 在已給的橢圓的所有外切四邊形中周長最小的是在它的邊的切點的法線組成菱形的那一個。”

施泰納的第三個主要成就在尺規作圖方面。 用直尺和圓規的作圖問題曾吸引了許多數學家， 也取得了十分豐富的成果。 G. 莫爾 (Mohr) 和 L. 馬斯凱羅尼 (Mascheroni) 開始爲減少直尺和圓規的使用開創了新的研究路子， 即所有用直尺和圓規的作圖都可用單一的圓規作出來。 施泰納與他們相反， 在他於 1833 年出版的第二本《用直尺和一定圓進行的幾何作圖》(*Die geometrischen*

Konstruktionen ausgeführt nitteist der geraden Linie und eines festen Kreises) 中， 他證明了：

所有用直尺和圓規的作圖 (當然圓弧除外) 都可用直尺和一個固定的圓 (及其圓心) 作出來。

這個定理實際上龐斯列在 1822 年就已證得， 而施泰納卻把它當作一個法國數學家的猜想， 當然他給出的證明是新的， 更加優美的。 所以人們把這定理稱爲*龐斯列－施泰納定理*。

施泰納在這本書中又一次運用了很高的技巧。 他在先奠定了必要的基礎之後， 把問題分解成八個基本問題， 如 “通過一點作一直線的平行線”， “求二圓周的交點” 等， 然後別的問題就均可由此推導出來了。

在施泰納的早期工作中， 包括他死後出版的生前的手稿《關於圓和球的相切和相交的一般理論》中， 可以看到他早就掌握了平面到球面的球極平面射影， 並用這一方法解決一些相當複雜的平面和空間幾何問題。 在 “若干幾何考察” 中第一次作出了關於圓的冪和圓的相似點的理論的系統發展。 他運用反演原理解決了諸如馬爾法蒂的問題： 在一已給的三角形中畫三個圓， 它們互相相切而且每一個與三角形的兩條邊相切。 特別是他得出並證明了關於圓級數的著名的定理 (圖 9)： “已給一定大小和位置的兩個圓 n、 N， 一個在另一個的內部。 有一確定的圓級數 M 、 M_1 、 $\cdots$ 、 M_x， 它們每一個都不等地與 n 和 N 相切又彼此相切， 如果 n 和 N 間的區間對這一確定的圓級數是可公度的， 即如果這包含 $x+1$ 個圓的級數組成一個 u

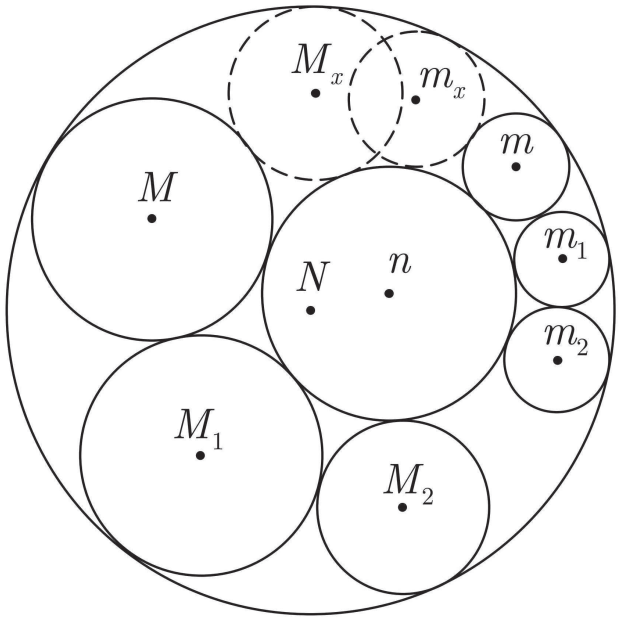

圖 9

環道序列，使得最後一個圓 M_x 和第一個圓相切，那麼這區間對任一圓級數 m、m_1、$\cdots$、m_x，也是可公度的，而且這些級數同第一個級數一樣包含 $x+1$ 個圓組成 u 環道。”

施泰納研究的領域還包括圓錐曲線和曲面、判定二次曲面的新方法、二階曲面理論、重心問題等，而且都取得了相應的成果。

隨著數學越來越向高度抽象化發展，以直觀爲主要特徵的綜合幾何早已退出核心數學的圈子。但是綜合幾何有它本身固有的魅力：結果的豐富多彩、優美直觀和方法的靈活多變，引人入勝，因此它總是吸引一些人繼續關注它、研究它，在中學數學教學和數學競賽中更是少不了它。施泰納的影響也仍然存在於今天的數學界。我們只須要指出這樣一件事：當今著名的幾何學家 H.S.M. 考克斯特 (Coxeter) 在談到令他頗爲讚嘆的幾何小品時，他舉的例子就是施泰納－萊姆斯 (Lehmus) 問題，即“兩個內角平分線 (從頂點到對邊的長) 相等的三角形是等腰三角形。”這是個看似簡單但卻不易證明的命題，正因如此，它總是吸引很多人。它至今已經有了一百多種證明了。有趣的是，我國著名數學家吳文俊在研究幾何定理的機器證明中也用了這個問題做例子。他的講演由別人記錄整理後出版了一本小册子《分角線相等的三角形 (初等幾何機器證明問題)》。當然，由於電子計算機的巨大威力和吳文俊理論的普遍性，使這一問題獲得了完全的解答，徹底澄清了施泰納就內外分角線的各種情形的討論中的不足之處。

文　獻

原始文獻

[1] J. Steiner, *Gesammelte Werke*, K. Weierstrass, ed., 2 vols., Berlin, 1881－1882。

[2] J. Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander (*1832*)*, Ostwald's Klassiker der

Exakten Wissenschaften, nos, 82 − 83, Leipzig, 1896。

[3] J. Steiner, *Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises (*1833*)*, Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaten, no. 60, Leipzig, 1895。

[4] J. Steiner, *Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raumer überhaupt*, Gesammelte Werke, II, 177 − 308。

[5] J. Steiner, *Vorlesungeen über synthetische Geometrie*：*I*, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, C. F. Geiser, ed., Leipzig, 1867；*II*, Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften, H. Schröter, ed., Leipzig, 1867。

[6] J. Steiner, *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln*, R. Fuiter and F. Gonseth, eds., Zurich–Leipzig, 1931。

研究文獻

[7] E. Bützberger, *Kleine Biographie über Jakob Steiner, Bibliothek der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, in the Bern Stadt und Universitätsbibliothek*, MSS Hist. Helv. XXIb, 347；*Biographie Jakob Steiners*, in the same collection, MSS Hist. Helv. XXIb, 348； and *Jakob Steiners Nachlass aus den Jahren 1823–1826, Bibliothek der Eidgenössischen Technischen Hochschule*, Zurich, Hs. 92, 30 − 223。

[8] J. Lange, *Jakob Steiners Lebensjahre in Berlin* 1821 − 1863*, Nach Seinen Personalakten dargestellt, in Wissenschaftliche Berlage zum Jahresbericht der Fiedrichs–Werderschen Oberreal–Schule zu Berlin, Ostern* 1899, Program no. 116, Berlin, 1899。

[9] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。(中譯本：M. 克萊因，古今數學思想，上海科學技術出版社，1979 − 1981)。

[10] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 2, durchgesehene und verbesserte Auflage, Berlin, 1956 (中譯本：W. 布拉施克，圓與球，上海科學技術出版社，1986)。

[11] 吳文俊、呂學禮，分角線相等的三角形 (初等幾何機器證明問題)，人民教育出版社，1985。