普　呂　克

普呂克，J. (Plücker，Julius) 1801 年 6 月 16 日生於德國埃爾伯菲 (Elberfeld)；1868 年 5 月 22 日卒於德國波恩 (Bonn)。數學、物理學。

普呂克之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Plucker.html`

普 呂 克

侯 德 潤

(徐州師範學院)

普呂克, J. (Plücker, Julius) 1801 年 6 月 16 日生於德國埃爾伯菲 (Elberfeld); 1868 年 5 月 22 日卒於德國波恩 (Bonn)。 數學、 物理學。

普呂克出身於亞琛 (Aachen) 的一個商人家庭。 青年時代畢業於杜塞爾多夫 (Düsseldorf) 地方的大學預科, 以後曾到波恩、 海德堡、 柏林和巴黎等地的大學學習。 1824 年從馬堡 (Marburg) 大學獲得博士學位。 1825 年在波恩大學擔任講師。 1828 年被提升爲特別教授。 1833 年在柏林任特別教授, 同時擔任弗里德里希•威廉 (Friedrich Wilhelm) 高級文科中學的教師。 1834 年在哈雷 (Halle) 大學任數學教授, 以後又繼 K. 明休 (von Münchow) 之任, 在波恩任數學 (1836 – 1847) 和物理 (1847 – 1868) 正教授。 1837 年和阿莰苔登 (Altstätten) 結婚。

雖然普呂克接受初等教育是在他的祖國, 但他卻從法國和英國的科學中汲取了很多營養。 他是一位幾何學家, 但卻把他一生中的很多年代奉獻給了物理科學。 當他剛開始研究數學時, 德國只有一位享有國際盛譽的數學家, 他就是 C.F. 高斯 (Gauss)。 1826 年起通過 A.L. 克列爾 (Crelle) 在柏林創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*), 使得普呂克、 J. 施泰納 (Steiner) 等人通過他們在解析幾何和射影幾何方面的工作很快馳名於世。 他們的研究領域不是 G. 蒙日 (Monge) 和高斯的微分幾何, 而是屬於 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 和 J.D. 熱爾崗 (Gergonne) 一派的。 但是普呂克的解析學派和柏林的以施泰納爲

首的綜合學派之間又產生了分歧， 再加上這兩個人之間的個人傾軋， 結果導致普呂克在柏林只住了一年就離去。

1828 年， 普呂克出版了他的第一本書 —《解析幾何的發展》(*Analytisch-geometrische Enlwicklungen*) 的第一卷， 1831 年又出了第二卷。 在每一卷中他討論了以直線、 圓和圓錐曲線爲研究內容的平面解析幾何。 他用一種漂亮的方式論證了許多定理和結論。 在這兩卷中所用到的點坐標是非齊次仿射坐標， 在第二卷中使用了平面上的齊次坐標， 以前常被叫做普呂克坐標。 圓錐曲線被當作直線的包絡來看待。 這一著作反映出普呂克解析幾何的特點， 這就是， 對於出現在圓錐曲線和它們的束的方程中的代數符號所進行的運算是很漂亮的。 他能夠不用消去法而得到幾何結果。 除去 L.O. 黑塞 (Hesse) 以外， 只有他才能如此出色地使用代數方法。 普呂克在第一卷中對不同階數的互相密切的圓錐曲線的處理方法也令人注目。

1829 年， 普呂克引入了所謂三線坐標， 他從一個固定的三角形出發， 任一點 P 的坐標取爲從 P 到該三角形各邊的帶正負號的垂直距離， 各距離可以乘以同一個常數。 同時， A.F. 莫比烏斯 (Möbius) 引入了他的重心坐標， 這是另外一種類型的齊次的點坐標。 然而， 在普呂克的《解析幾何的發展》中， 他只使用了非齊次的點坐標。 在第二卷的末尾， 他詳細解釋了現在被叫做對偶性原理的互反性原理。 在龐斯列和熱爾崗的爭論中， 普呂克傾向於支持龐斯列： 他引入對偶性是藉助相關配極， 而不是使用更現代化的一般原理 (如同熱爾崗所做的那樣)。 因此， 普呂克的工作可看作是在 K.G.C. 斯陶特 (Staudt) 建立的純射影幾何之前的過渡階段。

1832 年以後， 普呂克感興趣的是對高於二次的高次平面曲線的一般處理。 雖然他在下一本書《解析幾何的體系， 尤其是關於三次曲線理論的詳盡描述》(*System der analytischen Geometrie*， *insbesondere eine ausführliche Theorie der Kurven 3. Ordnung enthaltend*， 1835) 裡討論了處理圓錐曲線的一般 (或射影) 點的線坐標， 但是這本書的大部分包含了平面三次曲線。 普呂克對這些曲線的考慮是從下列由龐斯列提出的定理開始的： 一條三次曲線的三條漸近線與曲線相關的三個有限點位於一條直線上。 用解析的方法說明這條定理， 它等價於把曲線方程寫成 $pqr + \lambda s^3 = 0$ (p、 q、 r、 s 爲線性形式) 的可能性。 一條三次曲線由四條具有方程 $p = 0$、 $q = 0$、 $r = 0$、 $s = 0$ 的線以及曲線上的一個點來確定。 普呂克給出了這樣確定的三次曲線的作圖法。 一種基於這些作圖法的實的仿射分類導致 219 種不同的類型。

普呂克還寫出了《 代數曲線論 》(*Theorie der algebraischen Kurven*， 1839) 一書。 該書的大部分是用於研究代數曲線在它們的無窮遠點鄰域內的性質。 他不僅考慮漸近線， 同時還考慮漸近的圓錐曲線和其它與給定的三次曲線在一定次數上切觸的曲經。 對於漸近線， 他更正了 L. 歐拉 (Euler) 在《 無窮小分析引論 》(*Introductio in analysin infinitorum*， 1748) 一書中的某些錯誤。

儘管射影幾何和雙有理幾何逐漸佔有主導地位使人們對研究曲線在無窮遠處的狀況的興趣有所削弱， 但是《 代數曲線論 》的第二部分卻具有永恆的價值。 它包含對在平面內的奇點的新的處理方法， 這是一個曾經在 G. 克萊姆 (Cramer) 的 1750 年著作中討論過的關於曲線論的主題。 普呂克的著作還解決了幾個龐斯列和熱爾崗的著作中涉及到曲線的階和類之間關係的疑點。

在他 1839 年的著作中， 普呂克證明了下列著名公式， 它們通常被稱之爲 “普呂克公式”：

$$k = n(n-1) - 2d - 3s \text{、} \ n = k(k-1) - 2\delta - 3\sigma \text{、}$$
$$\sigma = 3n(n-2) - 6d - 8s \text{、} \ s = 3k(k-2) - 6\delta - 8\sigma \text{。}$$

這裡 n 爲曲線的階數、 k 爲曲線的類數； 作爲這條曲線的奇點， 它有 d 個二重點和 s 個尖點； 作爲對偶的線曲線的奇點， 它有

δ 個二重切線和 σ 個拐點。所有一條沒有奇點的三次曲線包含九個拐點，而普呂克發現了能夠是實的拐點或者是一個，或者是三個。如果三個拐點都是實的，則它們必定在一條直線上。如果把虛的拐點也算在內，則根據前人已經證得的結果，通過任意兩個拐點的一條直線上，必定存在第三個拐點。普呂克以一種不完全的推理，證明了每三個拐點共線的直線應該有 $C_2^9 \div C_2^3$ 即 12 條。黑塞在 1844 年補全了普呂克的證明，並且指出這 12 條線可以分成 4 個三角形。在《代數曲線幾何》(*Geometrie der algebraischen Kurven*) 的最後一章中，普呂克討論了平面二次曲線以及它們可能的奇點的詳盡的分類。一條擁有 28 條二重切線的非奇異二次曲線是他在這些曲線理論中所討論的中心問題。

雖然普呂克處理四次曲線的方法以及他關於它們的構形的定理是錯誤的 (以後由黑塞糾正了他的錯誤)，但是普呂克有一種清晰的洞察力，他依靠這種洞察力對過去使他的前輩們感到困惑的所謂克萊姆悖論及其推廣給予了一個清楚的解釋。這一悖論的重要之點是兩條 n ($\geq$ 3) 次的曲線的 $\dfrac{n(n+3)}{2} - 1$ 個公共點確定了另一組有 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 個公共點的 n 次曲線。F. 塞韋里 (Severi) 在他的關於枚舉幾何的著作中，強調了所謂普呂克－克萊布什 (Clebsch) 原理，他把這一原理表述成如下形式：如果一組依賴於某些常數的代數方程一般地沒有公共解 — 除非這些常數滿足一定的條件 — 那麼後一種情形的這個方程組不但有一個解，而且有無窮多個解。

1829 年，普呂克獨立於 É. 鮑伯利爾 (Bobillier)，把以前只是對圓錐曲線來說才有的配極的概念擴充到所有的平面代數曲線。他還研究過代數曲線的焦點問題，兩個曲面的密切以及波面問題，這樣他就涉及到了代數的和解析的空間幾何。這一方面的問題也在《空間幾何的新的分析處理方法體系》(*System der Geometrie des*

Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise，1846) 一書中被討論過。在這本書裡，他用一種漂亮的方法處理了解析幾何中的已經知道了的事實。然而，他本人在這本書中的貢獻不如他的更早的著作那樣重要。

1846 年以後，普呂克放棄了他的數學研究而去進行物理實驗。一直到 1864 年才又回到了他在幾何方面的工作。在這個第二階段中，他把他的數學成就發表在《以直線作爲空間元素建立的新空間幾何學》(*Neue Geometrie des Raumes*，*gegründer auf die Betrachtung der Geraden als Raumelement*) 一書中。該書出版於普呂克去世的那一年，但只有第一部分。第二部分由當過普呂克物理助教的 F. 克萊因 (Klein) 完成。普呂克曾經在和克萊因的多次交談中提到過他的計劃。克萊因就是根據普呂克的這些談話才把這本書寫完的。在這本書中，普呂克試圖把空間幾何置於把自對偶直線作爲元素的基礎上，而不是置於把點作爲元素或者按對偶的方式把平面作爲元素的基礎上。這樣一來，他就創造了線幾何這個領域，一直到二十世紀，這種幾何都是許多研究的主題。

普呂克在線幾何方面的工作和幾個在他之前的工作有關，這些工作是：已經由 A. 凱萊 (Cayley) 討論過的空間中六線坐標的概念以及與有理正規曲線相交的線的線叢的概念；L. 普安索 (Poinsot) 和莫比烏斯關於力的系統的研究和線幾何緊密相關；由蒙日進行的關於曲面的法線系統的研究，以及後來又由 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 推廣的 ∞^2 條射線的微分幾何。

在這些發展的基礎上，普呂克對線幾何的系統研究創建了幾何學的一個新領域。他按照對偶的方式引入了六個齊次的線坐標 P_{ij}，現在被稱爲 “普呂克坐標”，在它們之間存在一個二次關係 $Q_4(P_{ij}=0)$。克萊因和 C. 塞格雷 (Segre) 繼續進行這方面的研究，把 R_3 中的線幾何解釋爲 P_5 的二次曲面 Q_4 上的點幾何。但是這個發展，以及被解釋爲格拉斯曼簇 $C_{n,k}$ 上的點幾何 (S_n 中 S_k

幾何的進一步一般化) 卻沒有被普呂克預見到， 他把他的工作限制在普通空間的範圍內， 並且在那裡構想出一種以線爲元素的四維幾何。

普呂克的代數幾何和哈密頓所創造的微分幾何是截然不然的。 普呂克引入了三維、 二維或一維的直線的子集的線叢、 線彙以及直線紋曲面的概念。 這些概念直到現在還被使用。 他還對線性線叢和線彙進行分類， 並且開始了對二次線叢的研究， 這裡的二次線叢是用普呂克坐標中的二次關係來定義的。 (線叢曲面是四階和四類曲面， 並且是由屬於和一條給定直線相交的二次線叢的直線的全體構成的。) 在以後的許多年代中， 這些線叢都是被研究的主題， 這些研究是以 1686 年克萊因的博士論文開始的， 在《新幾何學》一書中， 普呂克仍然採用度量的觀點， 這種觀點導致廣泛的計算和對特殊情形的研究。 在這個時期中， 通過他所製造出來的許多模型， 可以明顯地看出他對幾何形狀和細節方面的興趣。

普呂克是波恩大學的數學和物理學教授。 據說他經常希望讓其他的物理學家們知道， 他在這兩個領域內都是有能力的。 特別値得注意的是， 他從事研究的是實驗的而不是理論的物理。 克萊布什在他的著名的關於普呂克的悼辭中， 將普呂克的數學和他的物理見解中的幾個關係統一起來。 在幾何方面， 他希望描述三次曲線和其它圖形的不同形狀， 而在物理學方面， 他力圖更加定性地描述不同的物理現象。 但是在這兩種情形中， 他都從來沒有用現代科學的那種公理化的、 演繹的模式進行研究。

普呂克在物理學方面的引路人是 M. 法拉第 (Faraday)， 他和後者通信。 雖然他的 1839 年的關於波面的論文以及 1847 年在關於光在二次曲面中的反射的論文既涉及到理論物理， 又涉及到數學， 可是通常都把它們計算在他的 41 篇數學論文當中。 普呂克還撰寫過 59 篇關於純粹物理方面的論文， 首次發表在《物理化學年鑑》(*Annalen der Physik und Chemie*) 和《皇家學會會報》

(*Philosophical Transactions of the Royal Society*) 中。他研究過氣體和晶體的磁性性質，以後又研究過稀薄氣體中的放電現象，還在波恩和 H. 蓋斯勒 (Geissler) 合製了一個標準溫度計。普呂克依靠他的學生 J.W. 希托夫 (Hittorf) 的化學經驗來研究氣態物質的光譜，通過對這些物質的不同光譜的考察，他認清了它們對化學分析的重要性。

1847 年，普呂克開始研究晶體在磁場中的性能。1858 年，他藉助蓋斯勒管 (一種帶有熔融電極的抽空玻璃管) 看到了陰極射線，並對之進行初步探索。後來，希托夫等人對陰極射線作了進一步的研究。他們的研究成果，對於原子物理學和電學具有極其重大的意義，並爲電子管和氣體放電管的發展奠定了基礎。普呂克是第一個看見氫的三條光譜線的人。他的這一發現先於 R.W. 本生 (Bunsen) 和 G.R. 基爾霍夫 (Kirchhoff) 在海德堡 (Heidelberg) 的著名實驗。雖然普呂克的成就在德國沒有得到承認，可是英國的科學家們卻比他的同胞們更能正確評價他的工作，並且在 1868 年授予他柯勃萊 (Copley) 獎章。

文　　獻

原始文獻

[1] J. Plücker, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, 2 vols., Essen, 1828－1831。

[2] J. Plücker, *System der analytischen Geometrie*, Berlin, 1835。

[3] J. Plücker, *Theorie der algebraischen Kurven*, Bonn, 1839。

[4] J. Plücker, *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise*, Düsseldorf, 1846。

[5] J. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes, gegründer auf der geraden Linie als Raumelement*, Leipzig, 1868－1869。

[6] J. Plücker, *Gesammelte wissenschaftlichen Abhandlungen*, 1 vol., Leipzig, 1895－1896。

[7] A. Clebsch, *Zum Gedächtnis an Julius Plücker, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 15 (1872), 1－40。

[8] Dronke, *Julius Plücker*, Bonn, 1871。

[9] Wilhelm Ernst,*Julius, Plücker*, Bonn, 1933。

[10] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。