阿 貝 爾

阿貝爾，N.H. (Abel，Niels Henrik) 1802 年 8 月 5 日生於挪威芬島 (Frindöe)；1829 年 4 月 6 日卒於挪威弗魯蘭 (Froland)。數學。

阿貝爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Abel.html

阿 貝 爾

鄧 明 立

(河北師範學院)

阿貝爾， N.H. (Abel， Niels Henrik) 1802 年 8 月 5 日生於挪威芬島 (Frindöe)； 1829 年 4 月 6 日卒於挪威弗魯蘭 (Froland)。 數學。

阿貝爾出生在挪威奧斯陸附近的芬島 (Frindöe)， 父親 S.G. 阿貝爾 (Able) 是個牧師。 幼時， 他就顯露出數學上的才能。 阿貝爾的啓蒙教育得自於他的父親。 但是家庭的極端貧困， 使他未能受到系統的教育。 1815 年， 年僅十三歲的阿貝爾進入奧斯陸的一所教會學校學習。 起初， 學校裡缺乏生機的教育方法沒有引起他對數學的興趣。 十五歲 (1817) 時， 他幸運地遇到一位優秀數學教師 B.M. 霍姆彪 (Holmboë)。 後者在數學上的最大貢獻也正是發現並培養了這位數學天才。 良師耐心細緻的教誨， 喚起了他學習數學的願望， 使他對數學產生了興趣。 阿貝爾迅速學完了初等數學課程。 然後， 他在霍姆彪的指導下攻讀高等數學， 同時還自學了許多數學大師特別是 L. 歐拉 (Euler)、 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 和 C.F. 高斯 (Gauss) 的著作。

阿貝爾在學校最後兩年時間裡， 以 “初生牛犢不怕虎” 的姿態猛攻一些尚未解決的最深奧的數學問題， 尤其是如何求解五次方程問題吸引著他。 他注意博採衆家之長， 在研讀拉格朗日、 高斯關於方程論著作的基礎上， 按高斯對二項方程的處理方法， 著手探討了高次方程的可解性問題。 最初， 他自認爲解五次方程已獲成功。 霍姆彪與奧斯陸大學教授 C. 漢斯廷 (Hansteen) 兩人都看不出所以然， 又找不出論證中的破綻， 而在奧斯陸沒在一個科學刊

物可以發表它。後來，只好把這篇文章寄給丹麥數學家 F. 德根 (Degen)，請求他幫助在丹麥科學院出版。

德根教授也沒有發現論證本身的任何錯誤，只是要求阿貝爾用例子說明他的方法，並建議他把精力放到橢圓積分的研究上去。阿貝爾獲悉德根的答復後，立即著手構造五次方程解的例子。但結果失望地發現，他的方法是錯誤的。另外，他還接受了德根關於研究橢圓積分的建議，不多幾年內就基本完成了他關於橢圓函數的理論。

1821 年秋，阿貝爾在一些教授資助下進入了奧斯陸大學。大學期間，他的數學幾乎全是自學的，並把主要精力用在進一步研究上，他寫出了許多有價值的論文。1823 年，他完成了一篇題爲 “用定積分解某些問題”(*Opläsning afet par opgaver ved bjoelp af bestemte Integraler*) 的論文。文中首次給出了積分方程的解，這是歷史上出現最早的積分方程，但較長時期沒有引起人們的重視。1822 – 1823 年冬，他還寫了一篇關於函數表達式積分的長篇論文，提交給大學委員會。後來，竟被學校當局弄丟了。

1823 年初夏，阿貝爾在熱心的 S. 拉斯穆森 (Rasmussen) 教授資助下，有幸去哥本哈根拜見德根及其他數學家。德根對他很賞識，並對他的研究給予指導。他返回奧斯陸後，又重新考慮了五次方程解的問題。這次他採取了相反的觀點，終於獲得成功。1824 年，他證明了五次或五次以上的代數方程沒有一般的用根式求解的公式。該證明寫進了 “論代數方程 — 證明一般五次方程的不可解性” 的著名論文中，從而結束了一般代數方程求根式通解的企圖。他深知其結果的重要性，決定先以小册子形式自費出版它。爲了節省經費，他把小册子壓縮到 6 頁，敍述很簡潔，以致許多學者難以讀懂。“數學王子” 高斯也不相信一個青年能用這麼短的篇幅，解決連他本人都尚未解決的難題。總之，這篇論文在當時沒有得到任何一位外國數學家的重視。

1825 年，阿貝爾大學畢業，社會沒有給這位天才提供用武之地。他決定申請經費出國，繼續深造和謀求職位。1825 年夏季，他先到了德國柏林。這期間，他結識了一位很有影響的工程師 A.L. 克列爾 (Crelle)。這是阿貝爾一生中第二個對他的研究事業有極大幫助的人。克列爾雖不是很強的數學家，但對數學有濃厚的興趣。在阿貝爾建議及朋友的贊助下，克列爾於 1826 年創辦了著名的數學刊物《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*)，後被稱爲克列爾雜誌。它的第一卷刊登了七篇阿貝爾的文章，其中有關於一般五次方程不能用根式求解的證明。克列爾雜誌頭三卷共發表了他的二十二篇包括方程論、無窮級數、橢圓函數等方面的開創性論文。從此，歐洲大陸數學家才開始注意他的工作。

1826 年 7 月，阿貝爾從柏林來到巴黎，遇見了 A.M. 勒讓德 (Legendre) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 等著名數學家。他寫了一篇題爲 “關於一類極爲廣泛的超越函數的一個一般性質” 的文章，於 1826 年 10 月 30 日提交給法國科學院，不幸未得到重視。當時科學院的秘書 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 讀了論文的引言，然後委託勒讓德和柯西對論文作出評價，柯西是主要負責人。這篇論文很長而且難懂，因爲它包含了許多新概念。柯西把它放在一邊，醉心於自己的工作。勒讓德也把它忘了。事實上，這篇論文直到阿貝爾去世後的 1841 年才發表。

1826 年底，阿貝爾回到柏林。不久，他染上了肺結核病。克列爾幫助了他，請他擔任克列爾雜誌的編輯，同時爲他謀求教授職位，但未獲得成功。

1827 年 5 月 20 日，阿貝爾回到奧斯陸。回國後更失望，仍然沒有找到職位的希望，他不得不靠作家庭教師維生。在貧病交迫、茹苦含莘的逆境中，他並沒有倒下去，仍在堅持研究，取得了許多重大成果。他寫下了一系列關於橢圓函數的文章，發

現了橢圓函數的加法定理、雙週期性，並引進了橢圓函數的反演。正是這些重大發現才使歐洲數學家們認識到他的價值。1828 年 9 月，四名法國科學院院士上書給挪威國王，請他爲這位天才安排一個合適的職位，勒讓德在 1829 年 2 月 25 日科學院會議上，也對阿貝爾及其工作大加稱讚。同年 4 月 6 日，阿貝爾懷著強烈的求生慾望和繼續爲科學事業做貢獻的理想，在病魔侵襲的憂傷中，與世長辭了。就在他去世兩天後，克列爾來信通知他已被柏林大學任命爲數學教授。此後榮譽和褒獎接踵而來，1830 年 6 月 28 日，他和 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 共同獲得了法國科學院大獎。

阿貝爾在數學上的貢獻，主要表現在方程論、無窮級數和橢圓函數等方面。

所謂方程有根式解 (代數可解)，就是這個方程的解可由該方程的係數經過有限次加減乘除以及開整數次方等運算表示出來。關於代數方程的求解，從十六世紀前半葉起，已成爲代數學的首要問題，一般的三次和四次方程解法被義大利的幾位數學家解決。在以後的幾百年裡，代數學家們主要致力於求解五次乃至更高次數的方程，但是一直沒有成功。對於方程論，拉格朗日比較系統地研究了方程根的性質 (1770)，正確指出方程根的排列與置換理論是解代數方程的關鍵所在，從而實現了代數思維方式的轉變。儘管拉格朗日沒能徹底解決高次方程的求解問題，但他的思維方法卻給後人以啓示。P. 魯菲尼 (Ruffini) 於 1799 年首次證明了高於四次的一般方程的不可解性，但其 “證明” 存有缺陷。兩年以後，高斯解決了分圓方程的可解性理論問題。拉格朗日和高斯的工作是阿貝爾研究工作的出發點。中學時，他就讀過拉格朗日關於方程論的著作；大學一年級開始全面研究高斯的《算術研究》(*Disquistiones arithmecae*)。後來，他又了解了柯西關於置換理論方面的成果。然而，他當時並不曉得魯菲尼的工作。阿貝爾就是

在這種背景下思考代數方程可解性理論問題的。

1824 年，阿貝爾首次作出了一般的五次方程用根式不可解的正確證明。更詳細的證明，於 1826 年發表在克雷爾雜誌第一期上。題目爲 “高於四次的一般方程的代數解法不可能性的證明”。在這篇論文中，阿貝爾討論並修正了魯菲尼論證中的缺陷。魯菲尼的 “證明” 缺乏域的概念，所以不可能在由已知方程的係數所確定的基礎域及域的擴張下進行工作。另外，魯菲尼 “證明” 中還用到了一個未加證明的關鍵性命題，後稱阿貝爾定理。該定理說，如果一個代數方程能用根式求解，則出現在根的表達式中的每個根式，一定可以表成方程諸根及某些單位根的有理函數。阿貝爾就是應用這個定理證明高於四次的一般方程不能有根式解的。

關於高次方程不能總是代數可解的結論，促使他進一步思考哪些方程才可用根式解的問題。他在深入研究《算術研究》第七部分關於分圓方程可解性理論的基礎上，取得了獨創性的進步。他於 1828 年 3 月 29 日完成了題爲 “關於一類特殊的代數可解方程”(*Mémoire sur une classe particuliére d'équations résoluble algébrique ment*) 的文章，發表在克列爾雜誌第四卷 (1829) 上。它解決了任意次的一類特殊方程的可解性問題，分圓方程 $x^n-1=0$ 就屬於這一類。在這篇論文中，阿貝爾證明了下述定理：對於一個任意次的方程，如果方程所有的根都可用其中的一個根有理地表出 (我們用 x 表示)，並且任意兩個根 $Q(x)$ 與 $Q_1(x)$ (這裡 Q、Q_1 均爲有理函數)，滿足關係 $QQ_1(x)=Q_1Q(x)$，那麼所考慮的方程總是代數可解的。類似地，假定這個方程是不可約的，它的階數爲 $\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\cdots\alpha_\omega^{\nu_\omega}$，其中 α_1、α_2、$\cdots$、α_ω 均爲不同的質數，那麼可把原方程的解法分別化成 ν_1 個 α_1 階方程、ν_2 個 α_2 階方程、ν_3 個 α_3 階方程的解法、$\cdots$ 等等。

實際上，阿貝爾證明了下述事實 (用現代術語敍述)：假定 $\phi(x)$

是具有 n 個根 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的 $n(n=\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\cdots\alpha_\omega^{\nu_\omega})$ 階不可約方程，它所有的根均可表成其中一個根 (如 x_1) 的有理函數。即 $x_1=Q_1(x_1)$、$x_2=Q_2(x_1)$、$\cdots$、$x_n=Q_n(x_1)$，這裡 Q_1 是恆等映射。阿貝爾證明了在有理函數 Q_k ($k=1$、2、$\cdots$、n) 中，如果用另一個根 x_i $(1<i\leq n)$ 代替 x_1，則 $Q_k(x_i)$ ($k=1$、2、$\cdots$、n) 是以不同順序排列的原方程的根。或者說，根

$$x_i=Q_1(x_i)、Q_2(x_i)、\cdots、Q_n(x_i)$$

是根 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的一個置換。方程根進行這樣置換的個數是 n。阿貝爾考慮並證明了這些置換的性質，如果方程根的置換群是可交換群，則方程 $\phi(x)=0$ 的解法可簡化爲低次的輔助方程的解法，這些輔助方程可依次用根式求解。在分圓方程的情形，方程的置換群是循環群。阿貝爾並沒有在文章中明確構造這種置換群，僅採用有理函數所假定的可交換性：$QQ_1(x)=Q_1Q(x)$。現在通常把具有這種性質的方程稱爲阿貝爾方程，具有可交換性的群叫做阿貝爾群。他在工作中，實質上引進了在給定數域中不可約多項式的概念，即係數在域 F 中的一元多項式不能表示成兩個係數在 F 中的次數較低的多項式的乘積。

阿貝爾的遺作中有一篇是值得深入研究的未完成的手稿，即“關於函數的代數解法”(*Sur la résolution algébrique des fonctions*，1839)。文中敍述了方程論的發展狀況，重新討論了特殊方程可解性的問題，爲後來 E. 伽羅瓦 (Galois) 遺作的出版開闢了道路。在前言部分，阿貝爾暗示出一種重要的思維方法，他認爲解方程之前，應首先證明其解的存在性，這樣可使整個過程避免 “計算的複雜性”。在代數方程可解性理論研究中，他還提出了一個研究綱領，就是在他的工作中須要解決兩類問題：一是構造任意次數的代數可解的方程；二是判定已知方程是否可用根式求解。他試圖全部刻畫可用根式求解的方程的特性。但因早逝而沒有完成這個工作，他只解決了第一類問題。幾年後，伽羅瓦接過他的工

作， 用群的方法徹底解決了代數方程的可解性理論問題， 從而建立了現在所謂的伽羅瓦理論。

除了代數方程論之外， 阿貝爾還從事分析方面的研究。

分析學是十七世紀以來在微積分基礎上形成的一大數學分支。 十八世紀， 它已發展成爲一門相對獨立的學科， 具備了極爲豐富的內容並被廣泛應用， 但它自己尙未形成邏輯嚴密的理論體系， 到十九世紀， 分析學中不嚴密的論證導致的局限性和矛盾愈益顯著， 分析的嚴密化逐漸引起數學家的關注。

阿貝爾是十九世紀分析嚴格化的倡導者和推動者。 他於 1826 年給漢斯廷的一封信中明確寫道：“將來我的工作一定要完全致力於純粹數學抽象意義方面的研究。 我將把全部精力應用於進一步揭露人們在分析中確實發現的驚人的含糊不清的地方。 這樣一個完全沒有計劃和體系的分析， 竟有那麼多人研究過它， 眞是奇怪。 最壞的是從來沒有嚴格地對待過分析。 在高等分析中只有很少幾個定理是用邏輯上站得住脚的方式證明的。 人們到處發現這種從特殊到一般的不可靠的推理方法， 而非常奇怪的是這種方法只導致了極少幾個所謂的悖論。 眞正有趣的是尋找這種原因。” 這段話一方面如實地反映了當時分析學發展的情況； 另一方面也明確了阿貝爾工作的主要方向。 在這方面， 他一直強調分析中定理的證明， 特別關心當時數學缺乏嚴密性的問題。 他於 1826 年 1 月 16 日給霍姆彪的信中寫道：“我非常驚訝地看到下列事實。 如果除開最簡單的情況， 那麼在全部數學中沒有一個無窮級數的和是被嚴格定義的。 換句話說， 數學中最重要的部分是沒有根基的。 誠然， 數學的大部分是正確的， 而這正是令人驚訝的地方。 我要努力找出這個道理， 這是一個十分有趣的題目。” 他於 1826 年最早使用均勻收斂的思想證明了連續函數的一個均勻收斂級數的和在收斂區域內部連續。 在無窮級數工作方面， 他還得到了一些收斂判別準則以及關於冪級數求和的定理。 這些工作確立了他在分析學發展中的

重要地位。

橢圓函數又稱雙週期的亞純函數。它的名稱來源於求橢圓的周長，它是利用橢圓積分的反演引入的特殊函數，是三角函數的廣泛和自然的推廣。橢圓函數論可以說是複變函數論在十九世紀發展中最重要的成就之一。阿貝爾和雅可比是公認的橢圓函數論的奠基者。

關於橢圓積分的研究可以追溯到十七世紀後半葉，後來，數學家們如歐拉、勒讓德和高斯等均做了大量的工作。歐拉的加法定理是橢圓積分理論的主要結果。勒讓德作爲橢圓積分理論的奠基人之一，在歐拉加法定理提出後的四十年中，他是僅有的一個在這一領域提供重大成果的人。但他未能像阿貝爾和雅可比那樣洞察到，探索橢圓積分的關鍵在於考察橢圓積分的反函數，即橢圓函數。勒讓德高度評價了阿貝爾和雅可比的工作，認爲他們兩人都將躋身於“當代第一流分析學家之列。”對於橢圓函數論，高斯生前雖然沒有發表過任何文章，但在他去世之後，人們在他的遺稿中發現，他已得到了橢圓函數論的許多關鍵性結果。阿貝爾也許就是從高斯所作的評論，特別是他的《算術研究》中的陳述受到啓發而從事這一工作的。

1826 年，阿貝爾撰寫論文“關於一類極爲廣泛的超越函數的一個一般性質”，對橢圓函數進行了創造性研究。在這篇文章中，他研究了形如 $\int R(x,\ y)dx$ 的積分 (現稱阿貝爾積分)，其中 $R(x,\ y)$ 是 x 和 y 的有理函數，並且存在 x 和 y 的二元多項式 f，使 $f(x,\ y)=0$。他還證明了關於上述代數函數積分之和的定理，即所謂的阿貝爾定理：若干個這種積分之和可以用 P 個這樣的積分加上一些代數的與對數的項表示出來，其中 P 只依賴於方程 $f(x,\ y)=0$，它是這個方程的虧格 (genus)。這是虧格概念的首次出現。阿貝爾的定理是橢圓積分加法定理的推廣，也是阿貝爾積分的一條關鍵性定理。

阿貝爾又於 1827 年發表了他的 “關於橢圓函數的研究”， 這是他最長的文章。 在這篇論文中， 他藉助於橢圓積分的反函數把橢圓積分理論歸結爲橢圓函數的理論。 具體地說， 阿貝爾所考察的橢圓積分是這樣一些積分， 其中被積函數是三次或四次多項式的平方根的有理函數。 在這些積分之中， 重要的是函數

$$u(s)=\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} 。$$

其反函數 $s(u)$ 同樣起著重要作用， 它恰好是橢圓函數 snu。 使用符號 snu 是爲了表示它是普通的正弦函數的推廣。 橢圓函數名稱便來源於此。 在最基本的情形， 即 $K=0$， 我們可分別得到

$$u(s)=\text{arcsin}、\ s=\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \text{ 和 } s(u)=\sin u 。$$

可見， 橢圓函數是三角函數的一個廣泛和自然的推廣。

阿貝爾在他 1827 年的論文中還建立了橢圓函數的加法定理， 它類似於橢圓積分的加法定理。 藉助於這個定理， 他發現了橢圓函數的雙週期性， 從而奠定了橢圓曲線 (它們都可以表示成平面中的三次曲線) 的理論基礎。 另外， 利用這種性質還可以對橢圓函數做出如下定義： 只有極點的雙週期解析函數是橢圓函數。

阿貝爾的一系列工作爲後人留下豐厚的數學遺產， 爲群論、 域論和橢圓函數論的研究開拓了道路。 他的數學思想至今深刻地影響著其它數學分支。 C. 埃爾米特 (Hermite) 曾這樣評價阿貝爾的功績： 阿貝爾留下的一些思想， 可供數學家們工作 150 年。 克列爾在他的雜誌上， 爲阿貝爾寫了長篇的頌辭：

“阿貝爾的全部著作鐫刻著無比的創造天才和非凡的、 有時是驚人的思維力量，如果考慮到這位作者的年齡， 就更令人驚嘆不已了。 我們看到， 他能夠以一種不可抵抗的力量， 透過一切障礙， 向下深入到問題的本質上， 以不可想像的能量向它進攻； 又能夠從上面來考慮問題， 高高地翱翔於問題的目前狀態之上， 所

有的困難在這個天才的無敵的攻擊之下， 都化爲烏有。 …… 然而， 阿貝爾贏得人們的尊敬和無限懷念不僅是因爲他的偉大的才能， 而且由於他純潔的品質和高尚的心靈， 以及少有的謙虛， 這些非凡的品德使得他作爲一個人來說也同他的天才一樣被人們所珍愛”。

文　　獻

原始文獻

[1] N.H. Abel, *Oeuvres complétes de N. H. Abel, mathématician*, Christiania, 1839。

[2] N.H. Abel, *Oeuvres complétes de N.H. Abel, Mathématician*, 2 vols., Christiania, 1881。

[3] N.H. Abel, *Mémoire sur les équations algébriques, ou I'on démontre I'impossibilité de la résolution de I'équation général du einquiéme degré*, Christiania, 1824； *Oeuvres Complétes I*, 28－33。

[4] N.H. Abel, *Démonstration de I'impossibilité de la résolution algébrique des équation générales qui passent le quatrieme degré*, Journal für die Reine und Angewandte mathematik, 1 (1826)； *Oeuvres Complétes I*, 66－87。

[5] N.H. Abel, *Mémoire sur une proriété générale d'une classe trésétendue de fonctions transcendants*, Présente á I'Academie des sciences á paris le 30 octobre 1826； *Oeuvres complétes I*, 145－211。

[6] N.H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 2 (1827)； *Oeuvres complétes I*, 263－388。

[7] N.H. Abel, *Mémoire sur une classe particuliére d'équations résolubles algébriquement*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4 (1829)； *Oeuvres Complétes I*, 478－507。

[8] N.H. Abel, *Precis d'une théorie des fonctions elliptiques*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 4(1829)； *Oeuvres complétes I*,518－617。

[9] N.H. Abel, *Sur la résolution algébrique des équations*, 見 *Oeuvres complétes II*, christiania, 1881, 217－243。

研究文獻

[10] O. Ore, *Abel, Niels Henrik*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. I, 1970, 12－17(中譯本：Abel 傳，數學譯林，1 (1982)，I，64－71)。

[11] O. Ore, *Niels Henrik Abel, Mathematician extraordinary*, University of Minnesota press, 1957。

[12] B.L. Vander Waerden, *A history of algebra*, Springer–verlag Berlin Heideberg, 1985。

[13] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[14] H. Wussing, *The genesis of the abstract group concept*, The MIT Press, 1984。

[15] L. Novy, *Origins of modern algebra, The Netherlands*, 1973。

[16] E.T. Bell, Men of mathematics, London, 1937, 346－367。

[17] Roger Cooke, Abel's theorem, 見 The history of modern mathematics, Vol. I： Ideas and their reception, Academic Press, 1989, 389－421。