波　爾　約

波爾約，J. (Bolyai，Jańos) 1802 年 12 月 15 日生於匈牙利特蘭尼西瓦亞的科羅日瓦 (Kolozsvár)(今羅馬尼亞盧日)；1860 年 1 月 27 日卒於匈牙利毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) (今羅馬尼亞特古穆列什)。數學。

波爾約之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Bolyai.html

波 爾 約

蔣 中 池

(鎮江師範專科學校)

波爾約，J. (Bolyai，Jańos) 1802 年 12 月 15 日生於匈牙利特蘭尼西瓦亞的科羅日瓦 (Kolozsvár)(今羅馬尼亞盧日)；1860 年 1 月 27 日卒於匈牙利毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) (今羅馬尼亞特古穆列什)。數學。

波爾約的父親 F. 波爾約 (Bolyai) 二十一歲進哥丁根大學，是著名數學家 C. F. 高斯 (Gauss) 的同學和終身好友，1804－1853 年一直是毛羅什瓦薩爾海伊 (Marosvásárhely) 福音學院頗有名望數學、物理、化學教授。在幾何基礎方面，他特別注重歐氏平行公設的研究，其數學代表作《寫給好學青年的數學原理》(*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae*) 試圖建立一個堅實而系統的幾何基礎及算術、代數、分析的基礎。波爾約的生母 S.V. 阿卡絲 (Arkos) 是一位外科醫生的女兒，死於 1821 年；後母 T. 納吉 (Nagy) 是一位鐵商的女兒。

波爾約在父親的指導下，少年時代就學習了微積分、分析力學等高深學科的基礎知識。1818 年考入維也納帝國工程學院，在數學及其它學科上顯示了天才，1822 年畢業分配至軍事部門，從事軍事研究工作。1833 年不幸遭車禍致殘，退役回到父親家裡，不久後母去世，兩人一起常有衝突，最後波爾約遷至偏僻的多馬爾德 (Domald) 地區過著隱居式的生活。1834 年，他與當地婦女 R.V. 娃本 (Orbam) 結婚，生有三個孩子，生活極端艱苦。1856 年其父去世，同年他又與妻子中斷了關係，晚年專心於文藝創作。他死於肺病，埋葬在奧匈帝國偏僻小鎮毛羅什瓦薩爾海伊的

墓地裡。

波爾約是非歐幾何創始者之一。1894 年，匈牙利數學物理學會主持修復了他的墓地，並建造雕像，供人景仰。1905 年，匈牙利科學院高度表彰了他的功績，頒發了以他命名的國際數學獎，獎勵那些爲數學進展作出巨大貢獻的人，著名數學家 J.H. 龐加萊 (Poincaré)、D. 希爾伯特 (Hilbert) 及物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 都曾獲得這個大獎。

歐幾里得《原本》(*Elements*) 第一卷的第五個公設是平行公設："若兩條直線和第三條直線相交，且在同一側所成的兩個同旁內角之和小於兩直角，則這兩條直線無限延長後必相交於該側的一點"，實質是說明"在平面上過直線外一點，只能作一條直線與它平行"。但這一公設不像其它公設那樣便於在實踐中檢驗，歐氏也只是在證明第 29 個命題時才用到它，且在此後任何命題中不再引用。一部體系嚴密的著作出現這樣文字冗長又非顯而易見的公設似乎是個缺陷，從希臘時代到十八世紀兩千餘年間，許多學者試圖證明它，然而他們大都不自覺地引用了與第五公設等效的命題，因而使願望落空。C. 托勒密 (Ptolemy)、J. 沃利斯 (Wallis)、G. 薩凱里 (Saccheri)、M. 勒讓德 (Legendre) 等都進行過這種失敗的嘗試，但也有收獲，因爲他們弄清了一系列與第五公設等價的命題，其中薩凱里作了最重要的工作，他用間接證法試證第五公設，但犯了一個錯誤，他把有限圖形的性質擴大到無限圖形，以爲在有限遠處不成立的東西在無限遠處也不成立，以致步於偉大發現的門邊而停步了。1736 年 G.S. 克呂格 (Kerügel) 在他的論文中指出：(1) 公理的實質在於經驗，而並非不證自明，人們之所以接受歐氏平行公設的眞理是基於人們對空間觀念的經驗；(2) 歐氏平行公設的可證明性值得懷疑，薩凱里並沒有得出矛盾，他只是得到似乎異於經驗的結果。對上述提示，T.H. 藍伯特 (Lambert) 作了進一步的研究，認識到一組假設如果不導致

矛盾，一定可以提供一種可能的幾何。受此影響，F.K. 施威卡特 (Schawikart) 在 1818 年送交高斯徵求意見的備忘錄中已區分了兩種幾何：歐氏幾何與假設三角形內角和不是兩直角的幾何；他的外甥 F.A. 陶里努斯 (Taurinus) 繼續進行研究，在有關著作中敍述了如何用純粹形式的分析方法展開由銳角假設所導出的幾何，他取球半徑 $r = \rho i$，證明了虛半球面上成立的公式恰好是他所研究的星空幾何中的公式。遺憾的是，他認爲只有歐氏幾何對物質空間才是正確的，而星空幾何只是邏輯上無矛盾，他不能想像使銳角假設成立的空間，因而把銳角作爲一個非實在的東西予以拋棄了。從克呂格到陶里努斯，這幾位學者都已承認第五公設的不可證明性，即第五公設相對於歐氏其它公設是獨立的；但他們都沒有認識到，就描述物質空間的性質來說，歐氏幾何並非是唯一的幾何。

由於一連串的失敗大多出於名家之手，不少人便望而卻步，直到十九世紀初，仍流行著 G.W.F. 黑格爾 (Hegel) 的論點：歐氏幾何相當完備，“不可能有更多的進展”，教會保守勢力正好利用這點宣揚上帝創造萬物是“亙古不變的”。歐氏幾何數千年的壟斷性的全線突破、非歐幾何體系的全面探討，應歸功於高斯、Н. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский) 及波爾約，而以後兩者爲主。

波爾約的父親對歐氏平行公設問題探討了大半輩子而徒勞無益。1820 年，在大學就讀的波爾約繼承了父親對平行公設的研究。開始，他也是從正面入手，試圖用歐氏其它公設來證明平行公設，結果失敗了。其父堅決反對兒子墮入在他看來是前途渺茫的深淵，1820 年寫信責令兒子必須停止這項研究，信中說：“它將剝奪你所有閒暇、健康、思維的平衡及你一生所有的快樂。這個無底的黑暗或許可以吞吃掉一千個燈塔式的牛頓，這個夜任何時候也不會在大地上光明。”但波爾約並未被如此駭人聽聞的言詞所嚇倒，他一方面深入了解和分析前人的研究過程；另方面又對自

己所作研究進行認眞的反思。 他在與 A. 脫萊坎 (Teleki) 伯爵的管家 K. 悉阿斯 (Siasr) 的交談中得到啓發， 開始用歸謬法證明， 即從反面來考慮命題， 看否定平行公設能否引起歐氏幾何的其它公設或公理相悖的結果。 在他不遺餘力的嚴密推理下， 不但沒有發現任何矛盾， 反而推出一系列全新的無矛盾的公式的結論， 爲此， 他斷言第五公設是一條獨立的公設， 若能找到替代此公設的 “平行公設”， 便可以構成一門新幾何。 這一別開生面的思想， 使他獨闢蹊徑， 構造了 “新幾何學”， 他把它稱爲絕對幾何， 後人稱爲 “虛幾何”、 “雙曲幾何” 或 “羅巴切夫斯基幾何”， 這是一種非歐幾何。 經過幾年的艱苦努力， 他於 1823 年寫成了著名論文《空間的絕對幾何學》(*Appendix explaining the absolutely true Sácnce of space*)， 時年 21 歲。 11 月 3 日， 他興奮地給父親發出信函：“我決定出版自己關於平行線的著作， ……， 我已從烏有創造了另一個全新的世界”， 他把手稿寄給父親， 請求父親幫助出版， 其父不相信這麼年輕的兒子會有什麼成就， 更看不到衝破傳統觀念的束縛對科學發展和造就人才的意義， 對兒子研究成果的反映非常冷淡， 拒絕協助出版。 1825 年 2 月波爾約回家探親， 特地把含有絕對空間理論的這一篇文稿當面送給父親看， 其父爲新幾何中依賴於一個任意常數而迷茫， 仍不能接受這種幾何學。 1826 年， 他把論文的德文抄稿寄給母校的數學老師， 請求評審和支持， 不幸抄稿遺失了。

在波爾約表現非凡的數學天才之際， 其父也於 1829 年完成了他的《寫給好學青年的數學原理》二卷， 含三個附錄。 1831 年， 經波爾約的再三請求， 其父才勉強同意將他的論文作爲該書的《附錄》之一出版， 這篇被壓縮到 24 頁的論文， 是波爾約一生中發表的唯一成果。 1831 年 6 月 20 日其父寫信給高斯， 並將兒子《附錄》樣稿寄給他， 想聽聽他的意見， 但高斯沒有回信， 1832 年 1 月 16 日又給高斯去信， 高斯在 3 月 6 日的復信中寫道：“關於你

兒子的工作， 當我一開始便說我不能稱讚他時， 你一定會感到震驚⋯⋯， 因爲稱讚他便等於稱讚我自己， 文章所有內容， 你兒子採取的思路 、 方法以及所達結果， 和我在 30 至 35 年前已開始的一部分工作完全相同， 我眞是被這些結果嚇住了， ⋯⋯， 但我本來就是不願發表的， ⋯⋯"。 信中雖誇獎波爾約是 "頭等品質的天才"， 信的結尾還有註記， 其中包括讓波爾約確定如何在他的幾何裡求四面體的體積， 但波爾約還是感到心情沉重， 他不相信別人比他更早達到同一結果， 認定高斯在這個發現上要奪優先權， 儘管他後來相信高斯所講是眞話， 仍認爲高斯沒有公開自己的發現是一個錯誤。 由於高斯的那封信， 更由於文章歷盡艱辛而出版後卻沒有引起多少反應， 當羅巴切夫斯基獨立研究的同樣成果發表後， 他甚至變得惱怒， 以致有一段時間陷於失望而影響了數學工作。 1837 年， 父子兩人克服種種困難， 參加了由萊比錫加勃羅諾協會 (The Jablonow Society in Leipzig) 贊助的關於 "虛量的嚴格幾何構造"(The rigorous geometric construction of imaginary quantities) 問題有獎徵解數學競賽， 以重振他倆在數學界的威望， 但二人的解答因太複雜而落選。 後來， 波爾約研究過絕對空間中四面體的體積， 並在 1856 年寫成一個註記。

波爾約一生中的最大成就是獨立創建絕對幾何。 他首先摒棄了歐氏第五公設， 建立了絕對空間的概念： 在空間的平面上， 過直線外一點有一束直線不與原直線相交。 當這束直線減少爲一條時， 該空間就是歐氏空間。 他用這一 "平行公設" 替代了歐氏平行公設， 再與歐氏其它公理 、 公設結合， 邏輯地演繹出一系列全新的 、 彼此相容的命題， 建立起非歐幾何。 它與歐氏幾何的主要差別， 在於共面不交線這方面。 非歐幾何中， 過定點和定直線共面的不交線有無窮多條； 而歐氏幾何中， 過定點和定直線共面的不交線只有一條。 這種非歐幾何體系是否存在? 用公理化的方法來探討 ， 即非歐幾何體系的整個公理體系是否在邏輯上相容? 如何

能唯一地確定一個非歐幾何體系? 波爾約的重大貢獻就在於他獨立地、 成功地解決了上述問題。

在本質上, 一種幾何體系就是空間的一種數理模型, 而一個幾何體系的 "公理體系" 就是它的一組特徵性質, 它提供了這個抽象模型的一種簡要描述, 也是對於這個模型的其它的性質探討的邏輯基礎。 波爾約的思想方法可描述如下: 以 A' 表示兩種幾何共同的公理集合, 以 $//_E$ 表示歐氏幾何共同的平行公理, $//_N$ 表示非歐幾何的平行公理, 則

$$\begin{cases} \text{歐氏公理體系} = A_E = A' \bigcup \{//_E\}, \\ \text{非歐公理體系} = A_N = A' \bigcup \{//_N\}。\end{cases}$$

因爲 $//_E$ 和 $//_N$ 顯然不相容, 所以他的非歐公理的合理性也就直觀地回答了: $//_E$ 不可能是 A' 的邏輯推論。 對於 $//_E$ 的邏輯關係可分爲兩類: 第一類只用 A' 中的公理就能推導出來, 這顯然是兩種幾何中所共有的; 第二類是只在歐氏幾何中成立而在他創立的新幾何中不成立的性質, 這顯然依賴於 $//_E$。 他精闢地分析了 A' 的各種邏輯推理, 研究了這些基本性質和 $//_E$ 之間的的邏輯關係, 建立起一系列深刻的定理。 在對於共面不交線與平行線的討論上, 他特別細心地分成 $//_E$ 和 $//_N$ 兩種不同情況, 指明只有與 $//_E$ 有關的命題, 兩種幾何才有完全不同的觀點。 他的幾何與歐氏幾何相比, 主要有三個新內容: (1) "平行" 是具有方向性的; (2) 三角形內角和小於二直角, 且其內角和可以任意小; (3) 三種線束型 — 平行線束 (同向)、 共點線束、 超平行線束 (同垂直於一直線)。 由於他指明的平行線意義和條數與歐氏幾何的根本差異, 在他創立的新幾何中審定了如下主要結論: (1) 平行線的不變性; (2) 平行線的對稱性; (3) 平行線的傳遞性; (4) 由 A' 可推出, 過直線 l 的線外定點 p, 恆存在至少一條和 l 共面的不交線; (5) 兩平行線在平行方向無限接近, 在相反方向則無限遠離; (6) 同一直線的垂線與斜線不一定相交, 因此過不共線三點不一定可作圓; (7)

共面不交的兩直線被第三條直線所截，同位角 (或內錯角) 不一定相等；(8) 兩三角形若有三內角對應相等，則兩三角形必全等 (即不存在相似而不全等的三角形)；(9) 薩凱里四邊形的上底角小於直角，這說明非歐平面上不存在矩形；(10) 非歐幾何中存在 “絕對的長度單位”。

波爾約非歐幾何與歐氏幾何的差異，突出地表現在三角形內角和方面。他由 A' 導出三角形的內角和小於兩直角 $2d$，且內角和隨此三角形面積的增大而減小，當面積趨於零時，它趨近於 $2d$。更確切地說，有

$$S_{\triangle ABC} = K[2d - (\angle A + \angle B + \angle C)]\,, \tag{1}$$

其中 K 是取定的一正常數，差 $2d-(\angle A+\angle B+\angle C)$ 稱爲 $\triangle ABC$ 有 “虧值”。上式表明，三角形的面積與這三角形的虧值成正比，易見當 $\triangle ABC$ 增大時，虧值亦增大，從而內角和減小。公式 (1) 與球面三角形的面積公式

$$S_{\triangle ABC} = R^2(A + B + C - \pi) \tag{2}$$

接近。實際上，當 $R = \sqrt{-K} = \sqrt{K}i$ 時，(2) 式便是 (1) 式。

波爾約在絕對三角形和球面三角形方面做出了不少出色的工作。例如：

(1) 由 A' 推出波爾約正弦定律：對於任意 $\triangle ABC$，有

$$\frac{\sin A}{\odot a} = \frac{\sin B}{\odot b} = \frac{\sin C}{\odot c}\,,$$

其中 a、b、c 這三個分別表示 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊之長，而 $\odot a$、$\odot b$、$\odot c$ 分別表示以 a、b、c 爲半徑的圓周長。他給出了這一定律的邏輯證明。

(2) 給出 $\odot r$ (半徑爲 r 的圓周長) 在三種幾何中的表達式：

$$\odot r = \begin{cases} 2\pi r \text{ (歐氏幾何)，} \\ \dfrac{1}{K}\sin Kr \ \text{ (球面幾何， } K = \dfrac{1}{\text{球半徑}}\text{)，} \\ \dfrac{1}{K}\sinh Kr \ \text{ (非歐氏幾何)。} \end{cases}$$

(3) 給出了三種幾何中的餘弦定理

$$\begin{cases} \text{歐氏幾何：} \ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \text{ 等，} \\ \text{球面幾何：} \ \cos C = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos c \text{ 等，} \\ \text{非歐幾何：} \ \cosh c = \cosh a\cosh b + \sinh a\sinh b\cos C \text{ 等。} \end{cases}$$

顯然，在球面、非歐的情形，上述公式只是 $K = 1$ 時的特殊情形。他給出的非歐三角公式實際就是半徑爲純虛數 $\sqrt{R}i$ 的球面幾何學中的三角公式，所以非歐平面與半徑爲純虛數的球面是相似的幾何現象。這種正確的認識深化了非歐幾何的研究，並推動了球面幾何學的發展。

波爾約的幾何與羅氏幾何在原理上非常相似，儘管他們的論文形式很不相同。後來，B. 黎曼 (Riemann) 又發展了他們的思想，1854 年在哥丁根大學的講演中提出了另一種非歐幾何，這種理論在他生前也未得到應有的評價。

非歐幾何最終被人們所承認是其創造者死後的事情，波爾約作爲《附錄》的論文原爲拉丁文，1867 年譯成法文，1868 年譯成義大利文，1872 年譯成德文，1891 年譯成英文。義大利數學家 E. 貝爾特拉米 (Beltremi) 在 1868 年的論著中又用微分幾何的理論作出了非歐幾何的模型，證明了只要歐氏幾何學沒有矛盾，則非歐幾何學也沒有矛盾；德國數學家 F. 克萊因 (Klein) 在 1871 年首次認識到從射影幾何中可推導度量幾何，並建立了非歐平面幾何 (整體) 的模型；希爾伯特給出歐氏幾何學的公理體系，證明了平行公理對其它公理是獨立的，因而明確了非歐幾何學成立的邏輯基

礎；愛因斯坦根據相對論證明了把我們所在的時空看作非歐空間的合理性，所以非歐空間對於空間型的問題也非常有用。這些研究最終使非歐幾何獲得了普遍的承認和應用，打破了歐氏幾何的一統天下，從根本上革新了人們的幾何學觀念。非歐幾何對於 20 世紀初關於空間和時間的物理觀念的變革也起了重要的作用，非歐幾何首先提出彎曲空間，爲更廣泛的黎曼幾何的產生創造了前提，而黎曼幾何後來成了愛因斯坦廣義相對論的數學工具，人們在廣義相對論的基礎上研究宇宙的結構，認識宇宙結構的幾何學是接近非歐幾何。在天體大範圍觀測和原子論微觀世界中有效的應用，充分顯示非歐幾何的創立有重大的哲學價值和劃時代的意義。

波爾約創立非歐幾何的功勞是不可磨滅的。非歐幾何被後世譽爲“十九世紀最有啓發性、最重要的數學成就”。它與這一時期創立的近世代數一起，改變了人們處理數學問題的觀點和方法，迎來了數學發展的新時代。

文　　獻

原始文獻

[1] D.E. Smith, *A source book on mathematics*, New York, 1959, 375－388。

[2] G.B. Halsted, *“Appendix” with an introduction*, Austin, Texas, 1891；Newed, Chicago-london, 1914。

[3] R. Bonola, *Non–Euclidean geomerty*, New York, 1955。

研究文獻

[4] P. Stickel and J. Bolyai, *Geometrische Untersuchungen*, Leipzig, 1913。

[5] D.M.M. Sommerville, *Bibliography of non-Euclidean geometry*, London, 1911。

[6] I. Tóth, *Life and work of Johann Bolyai*, Bucharest, 1953。

[7] D.J. Struik, *Bolyai，János*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 2, 1973, 269－271。