雅　可　比

雅可比，C. G. J. (Jacobi Carl Gustar Jacob) 1804 年 12 月 10 日生於德國波茨坦；1851 年 2 月 18 日卒於柏林。數學。

雅可比之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Jacobi.html

雅 可 比

井 竹 君

(中國科學院數學研究所)

> 雅可比， C. G. J. (Jacobi Carl Gustar Jacob) 1804 年 12 月 10 日生於德國波茨坦； 1851 年 2 月 18 日卒於柏林。 數學。

雅可比是猶太銀行家西蒙・雅可比 (Simon Jacobi) 和他的妻子萊曼 (Lehmann) 的第二個兒子。 雅可比有一個長他三歲的哥哥莫里茨 (Moritz)， 後來在聖彼得堡成爲著名的物理學家。 弟弟愛德華 (Eduard) 在其父去世後掌管了銀行。 他還有個妹妹雷澤 (Therese)。

雅可比自幼聰敏， 幼年隨他舅舅學習拉丁文和數學。 1816 年 11 月進入波茨坦大學預科學習。 1821 年春畢業。 當時他的希臘語、 拉丁語和歷史的成績都很優異； 尤其在數學方面， 他掌握的知識遠遠超過學校所教授的內容。 他還自學了 L. 歐拉 (Euler) 的《無窮小分析引論》(*Introductio in analysin infinitorum*)， 並且試圖解五次代數方程。

1821 年 4 月雅可比入柏林大學。 開始兩年的學習生活， 他對哲學、 古典文學和數學都頗有興趣。 該校校長評價說， 從一開始， 雅可比就顯示出他是一個 “全才”。 像 C. F. 高斯 (Gauss) 一樣， 要不是數學強烈地吸引著他， 他很可能在語言學上取得很高成就。 雅可比最後還是決定全力投身於數學。 1825 年 8 月， 他獲得柏林大學理學博士學位。 之後， 留校任教。 1825 年到 1826 年冬季， 他主講關於三維空間曲線和曲面的解析理論課程。 年僅二十一歲的雅可比善於將自己的新觀點貫穿在教學之中， 啓發學生獨

立思考， 是當時最吸引人的數學教師。 他的成功引起普魯士教育部的注意。

1826 年 5 月， 雅可比到柯尼斯堡大學任教。 在那裡他結識了物理學家 F. 諾伊曼 (Neumann) 和 H. 多費 (Dove)、 數學家 F. 巴塞耳 (Bessel)。 一年之後， 發表了幾篇關於數論中有關互反律 (後人稱爲 “雅可比符號的互反律”) 的論文， 受到高斯的讚賞。 由此開始數學創作的黃金時代。1827 年 12 月獲得副教授職位， 這次提升與高斯、 A. M. 勒讓德 (Legendre) 對他早期工作的讚揚有關 (而高斯不是一個輕易表態的人)。 1829 年發表了他的第一部傑作《 橢圓函數理論新基礎 》(*Fundamenta Nova Theoria Functionum Ellipticarum*， 1892， 見《 雅可比全集 》第一卷)。 同年夏天雅可比去巴黎旅行， 途中訪問了在格丁根的高斯， 並結識了勒讓德、 J. B. J. 傅里葉 (Fourier)、 S. D. 泊松 (Poisson) 和其他法國數學家。 1832 年 7 月被提升爲教授。 在此前一年， 即 1831 年 9 月 11 日與馬里耶 • 施溫克 (Marie Schwinck) 結婚， 他們生有五個兒子和三個女兒。 1842 年 7 月受普魯士國王的派遣， 和巴塞耳參加在曼徹斯特舉行的不列顛科學促進協會 (British Association for the Advancement of Science) 的年會， 回國途中在巴黎科學院作了報告。

在柯尼斯堡大學的十八年間， 雅可比不知疲倦地工作著， 在科學研究和教學上都做出驚人的成績。 他對橢圓函數理論的透徹研究在數學界引起轟動， 從而與 N. H. 阿貝爾 (Abel) 齊名。 雅可比在橢圓函數理論、 數學分析、 數論、 幾何學、 力學方面的主要論文都發表在克列爾的《 純粹和應用數學 》雜誌 (*Crelle's Journal für die reine und angewardte Mathematik*) 上， 平均每期有三篇雅可比的文章。 這使他很快獲得國際聲譽。 他孜孜不倦的研究工作並沒有影響他的教學活動。 每週要用 8 − 10 小時給學生講解他喜愛的課程 — 橢圓函數理論， 並將自己的研究精髓教給學生， 使學生

受到科研的薰陶， 打破了常規的教學方法。 他還開創了學術討論班， 這在當時數學界還是很新奇的事物。 當時， 他同數學家巴塞耳、 物理學家 F. 諾伊曼三人成爲德國數學復興的核心。

1843 年初雅可比患了嚴重的糖尿病。 在得到普魯士國王的捐款之後去義大利休假數月。1844 年 6 月底回到柏林， 開始接受普魯士國王的津貼， 在柏林大學任教， 並被選爲柏林科學院院士、 倫敦皇家學會會員。

1848 年革命期間， 由於他在一次即席演講中得罪了王室而失去津貼。 當維也納大學決定聘請他時， 普魯士當局意識到他的離開將會造成的損失， 因而恢復了他的待遇。

1851 年初雅可比在患流行性感冒還未痊癒時， 又得了天花， 不久去世。 他的密友 P. G. L. 狄利克雷 (Dirichlet) 在柏林科學院發表紀念講話， 總結了他在數學上的傑出貢獻， 稱他爲 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 以來科學院成員中最卓越的數學家。

雅可比最重要的貢獻是和挪威數學家 N. H. 阿貝爾 (Abel) 相互獨立地創立和發展了橢圓函數理論； 引入並研究了 θ 函數和其它一些超越函數的性質； 大膽地使用複數， 發展了複變量橢圓函數。 他的第一部傑作《橢圓函數理論新基礎》成爲該領域的經典著作。 該著作的第一部分研究變換問題， 第二部分給出橢圓函數的表示。 在第一部分， 雅可比從第一類橢圓函數的微分出發， 用二次變換將它簡化爲勒讓德的標準形式。 他研究了有理變換 $y=\dfrac{u}{v}$ 中函數 u (偶) 和 v (奇) 的性質， 並給出了三次和五次變換的例子和有關模方程的例子。 經組合兩個變換， 他得到了第一類橢圓積分的乘法公式。 他指出， 將反函數 $\varphi=amu$ 引進橢圓積分

$$t(\varphi,\ k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ ,$$

這裡 $x=\sin\varphi=\sin amu$， 然後 $\cos amu=am(k-u)$ (這裡

$k=u[\frac{\pi}{2},\ k])$，則得到

$$\Delta amu=\sqrt{1-k^2\sin^2 amu}\text{。}$$

由此他推導出大量公式。利用虛變換 $\sin\varphi=i\tan\varphi$ 他建立了關係式

$$\sin am(iu,\ k)=i\tan am(u,\ k')\text{，}$$

這裡模數 k 和 k' 滿足方程 $k^2+k'^2=1$。這樣，他得到橢圓函數的雙週期性、零點、極點。他還證明當對第一個模數和第二個模數應用同樣變換時模方程的不變性。第一部分工作的最後，他研究了滿足所有變換模數的三階微分方程。

這著作的第二部分集中研究橢圓函數用無窮級數乘積和傅里葉級數的表示問題。橢圓函數 $\sin amu$、$\cos amu$、Δamu 的第一種表示是用無窮乘積的商形式給出。記 $q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$，雅可比用 q 來表示模和週期，例如

$$k=4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}\right]^4\text{。}$$

橢圓函數還可用傅里葉級數展開式來表示。

雅可比引進函數

$$Z(u)=\frac{F^1(u)-E^1(u)}{F^1}\quad(\varphi=amu)$$

來討論第二類橢圓積分。他將第三類橢圓積分化簡成第一類和第二類橢圓積分，而第三個超越函數僅依賴於兩個變量。他又引入“雅可比函數”

$$\Theta(u)=\Theta(0)\cdot\exp\left(\int_0^u Z(u)du\right)$$

和函數 $H(u)$ 使得 $\sin amu=\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(u)}{\Theta(u)}$。這裡 $\Theta(u)$ 和 $H(u)$ 表示成無窮乘積和傅里葉級數。由橢圓函數與 Θ 函數之間關係可得

到以下的著名公式

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}=2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{q^{25}}+2\sqrt[4]{q^{49}}+\cdots 。$$

雅可比又將這工作應用於數論。 從恆等式

$$\begin{aligned}\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 &= (1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+\cdots)^4\\ &= 1+8\sum\varphi(p)(q^p+3q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+\cdots),\end{aligned}$$

其中 $\varphi(p)$ 是奇數 p 的因數之和， 他證明了有名的費馬 (Fermat) 論斷， 即任何整數可以表示成至少四個整數 (零也是整數) 的平方和。

雅可比證明了以 $e^{-\frac{an+b}{2}}$ 爲通項的級數的收斂性， 這是整個橢圓函數理論發展的基礎。

1829 − 1830 年冬季， 雅可比他第一次作橢圓函數理論的報告， 他強調雙週期性是橢圓函數的基本性質。 他用 θ 函數理論來建立橢圓函數理論。 1835 − 1836 年， 他證明有關四個 θ 函數乘積之和的著名定理， 並且將各類橢圓函定義爲 θ 函數之商， 從而第一個創立了 θ 函數理論。 1839 − 1840 年期間， 他繼續這些研究， 這部分工作收集在《 雅可比全集 》的第一集 、 第二集中， 包括了對橢圓函數歷史的概述。

關於複變量橢圓函數理論， 他研究了超橢圓積分等問題， 其中有關雙週期函數的論文 (1835 年) 成爲現代複變函數理論中的經典著作。 他對阿貝爾函數也作過研究， 發現了超橢圓函數。

在橢圓函數理論的整個發展過程中， 高斯、 勒讓德、 阿貝爾、 雅可比他們對其理論都作過精心研究。 阿貝爾和雅可比的許多發現同高斯年青時 (1798 年) 作過的但沒有發表的工作 (高斯從來不太在乎他的研究論文的發表) 相交疊。 勒讓德自 1786 年以來用

了四十年時間對橢圓積分作了系統的研究， 並將其分爲三類。 但阿貝爾和雅可比看到了問題的實質， 他們把勒讓德的思路倒過來， 研究橢圓積分的逆， 即橢圓函數， 這樣就大大地簡化了整個問題， 使得橢圓函數理論迅猛地發展起來。

橢圓函數理論在十九世紀數學領域中佔有十分重要的地位。 它爲發現和改進複變函數理論中的一般定理創造了有利條件。 如果沒有橢圓函數理論中的一些特例爲複變函數理論提供那麼多的線索， 那麼複變函數理論的發展就會慢得多。

雅可比第一個將橢圓函數理論應用於數論的研究， 得到同餘式和型理論中的一些結果， 這一思想爲後繼數學家所沿用。 他這方面的研究結果是通過 J. G. 羅森海因 (Rosenhain) 的聽課筆記流傳下來的。 他還給出元根的 “標準算法”， 該文章於 1839 年發表。

雅可比研究工作的特點是將不同的數學分支聯繫起來。 他將橢圓函數理論用於積分理論、 微分方程理論， 其中尾乘式原理就是他提出的。 他又將橢圓函數理論用於動力學和分析力學， 創立了哈密頓 — 雅可比方程積分的新理論。 這一方法解決了力學和天文學中一些十分重要的問題， 並使微分方程的研究進入一個新的發展時期。 後來， A. 克萊布什 (Clebsch) 改進了雅可比的工作； 十年之後 H. L. F. 亥姆霍茲 (Helmholtz) 把雅可比的力學原理全部用到一般物理學中。

雅可比對行列式理論也做了奠基性的工作。 1841 年初他系統地研究了行列式理論， 推廣了代數行列式的應用， 建立了函數行列式 (後來稱之爲雅可比行列式)， 並將其應用到函數組的相關性、 多重積分的變量變換和偏微分方程的研究中。

有關一階偏微分方程和分析力學的大部分研究工作是他去世之後以 “動力學講義” (*Vorlesungen Über Dynamik*) 爲題發表的 (1866 年由克萊布會發表)。

雅可比在數學物理方面也做過實質性的貢獻。 他將橢圓函數理

論應用於橢球吸引力的研究和有關旋轉流體物質結構理論中。C. 麥克勞林 (Maclanrin)、J. R. 達朗貝爾 (d'Alembert)、P. S. 拉普拉斯 (Laplace) 和 J. L. 拉格朗日 (Lagrange) 證明當均勻流體取旋轉橢球形狀且繞固定軸均勻旋轉時，其形狀不會改變。而雅可比發現即使流體形狀是一般橢球體時，也滿足平衡條件。

雅可比對數學史的研究也感興趣。1846 年 1 月作過關於 R. 笛卡兒 (Descartes) 的通俗演講，對古希臘數學也作過研究和評論。1840 年他制訂了出版歐拉著作的計劃 (因歐拉的孫子發現歐拉有許多文章未發表)。

有趣的是雅可比關於橢圓函數理論的研究工作同他強大的競爭者阿貝爾的工作保持著平行。他們獨立地創立了橢圓函數理論。同時，雅可比有一顆高貴沒有偏見的心靈。由於具有慷慨的天性，他毫不保留地讚揚了阿貝爾有關證明不能用代數方法得到一般五次方程的解的結果，儘管他對此問題作過探討而未能得到這樣的結論。

雅可比在數學和其它學科的許多領域中辛勤地工作過，是數學史上最勤奮的學者之一。他和歐拉對待數學創作具有同樣的態度，兩者都是多產的作者。就處理繁複的代數問題能力而言，除了二十世紀印度數學天才 S. 拉馬努金 (Ramanujan) 以外，他們兩人是無人可匹敵的。他們倆在處理確定問題時都能從巨大的數學方法兵工廠中找到能夠解決問題的最好武器。歐拉在純粹和應用數學之間花費的時間幾乎相等，而雅可比更傾向於研究它們內在有關的數學問題。他所理解的數學，有一種強烈的柏拉圖 (Platonic) 格調。

現代數學中的許多定理、公式和函數恆等式、方程、積分、曲線、矩陣、根式、行列式以及許多數學符號都冠以雅可比的名字，可見雅可比的成就對後人影響之深。1881－1891 年普魯士科學院陸續出版了由 C. W. 博查特 (Borchardt) 等人編輯的七卷《雅可

比全集》和增補集， 這是雅可比留給世界數學界的珍貴遺產。

文 獻

原始文獻

[1] C.G.J. Jacobi, *C.G.J. Jacobi's Gesammelte werke*, C.W. Borchardt, A. Clebsch and K. Weierstrass eds., Prussian Academy of Sciences, Berlin, 1881－1891。 (共七卷)

[2] C.G.J. Jacobi, *Canon arithmeticus*, Berlin, 1839。

研究文獻

[3] Kurt-R. Biermann, *Eine Unverö ffentliche Jugendarbeit C.G.J. Jacobi über Wiederholte Funktion*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 207, 1961。

[4] Leo Koenigsberger, *C.G.J. Jacobi, Festchrift zur Feier der hundersten Wiederkehr seines Geburstages*, Leipzig, 1904。