狄　利　克　雷

狄利克雷， P.G.L. (Dirichlet， Peter Gustav Lejeune) 1805 年 2 月 13 日生於德國迪倫 (Düren)；1859 年 5 月 5 日卒於格丁根。數學。

狄利克雷之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Dirichlet.html

狄　利　克　雷

袁　向　東

(中國科學院數學研究所)

狄利克雷， P.G.L. (Dirichlet， Peter Gustav Lejeune) 1805 年 2 月 13 日生於德國迪倫 (Düren)； 1859 年 5 月 5 日卒於格丁根。 數學。

狄利克雷生活的時代，德國的數學正經歷著以 C.F. 高斯 (Gauss) 爲前導的、由落後逐漸轉爲興旺發達的時期。狄利克雷以其出色的數學教學才能， 以及在數論、 分析和數學物理等領域的傑出成果， 成爲高斯之後與 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 齊名的德國數學界的一位核心人物。

狄利克雷出身於行政官員家庭， 他父親是一名郵政局長。 狄利克雷少年時即表現出對數學的濃厚興趣， 據說他在十二歲前就自掙零用錢購買數學圖書。 1817 年入波恩的一所中學， 除數學外， 他對近代史有特殊愛好； 人們稱道他是個能專心致志又品行優良的學生。 兩年後， 他遵照父母的意願轉學到科隆的一所教會學校， 在那裡曾從師物理學家 G. 歐姆 (Ohm)， 學到了必要的物理學基礎知識。

十六歲通過中學畢業考試後， 父母希望他攻讀法律， 但狄利克雷已選定數學爲其終身職業。 當時的德國數學界，除高斯一人名噪歐洲外， 普遍水準較低； 又因高斯不喜好教學， 於是狄利克雷決定到數學中心巴黎上大學， 那裡有一批燦如明星的數學家， 諸如 P.-S. 拉普拉斯 (Laplace)、 勒讓德 (Legendre)、 J. 傅里葉 (Fourier)、 S. 泊松 (Poisson)、 S. 拉克羅阿 (Lacroix)、 J.B. 畢奧 (Biot) 等等。

1822 年 5 月，狄利克雷到達巴黎，選定在法蘭西學院和巴黎理學院攻讀；其間因患輕度天花影響了聽課，幸好時間不長。1823 年夏，他被選中擔任 M. 法伊 (Fay) 將軍的孩子們的家庭教師。法伊是拿破侖時代的英雄，時任國民議會反對派的領袖。狄利克雷擔任此職，不僅收入頗豐，而且受到視如家人的善待，還結識了許多法國知識界的名流。其中，他對數學家傅里葉尤爲尊敬，受其在三角級數和數學物理方面工作的影響頗深。另一方面，狄利克雷從未放棄對高斯 1801 年出版的數論名著《算術研究》(*Disquisitiones artihmeticae*) 的鑽研。據傳他即使在旅途中也總是隨身攜帶此書，形影不離。當時還沒有其他數學家能完全理解高斯的這部書，狄利克雷是第一位眞正掌握其精髓的人。可以說，高斯和傅里葉是對狄利克雷學術研究影響最大的兩位數學前輩。

1825 年，狄利克雷向法國科學院提交他的第一篇數學論文，題爲“某些五次不定方程的不可解” (*Mémoire sur L’impossibilite de quelques équations indéterminées du cinquieme degré*)。他利用代數數論方法討論形如 $x^5 + y^5 = A \cdot z^5$ 的方程。幾週後，勒讓德利用該文中的方法證明了 $x^n + y^n = z^n$ 當 $n = 5$ 時無整數解；狄利克雷本人不久也獨立證明出同一結論。(後來狄利克雷再次研究費馬大定理時，證明 $n = 14$ 時該方程無整數解。)

1825 年 11 月，法伊將軍去世。1826 年，狄利克雷在爲振興德國自然科學研究而奔走的 A. 洪堡 (von Humboldt) 的影響，返回德國，在布雷斯勞大學獲講師資格 (他在法國未攻讀博士學位，而由科隆大學授予他榮譽博士頭銜，這是獲講師資格的必要條件)，後升任編外教授 (extraordinary professor，爲介於正式教授和講師之間的職稱。)

1828 年，狄利克雷又經洪堡的幫助來到學術空氣較濃厚的柏林，任敎於柏林軍事學院。同年，他又被聘爲柏林大學編外教授

(後升爲正式教授)，開始了他在柏林長達二十七年的教學與研究生涯。由於他講課清晰，思想深邃，爲人謙遜，諄諄善誘，培養了一批優秀數學家，對德國在十九世紀後期成爲國際上又一個數學中心產生了巨大影響。1831 年，狄利克雷成爲柏林科學院院士。同年，他和哲學家 M. 門德爾松 (Mendelssohn) 的外孫女麗貝卡 • 門德爾松－巴托爾特 (Rebecca Mendelssohn–Bartholdy) 結婚。

1855 年高斯去世，狄利克雷被選定作爲高斯的繼任到格丁根大學任教。與在柏林繁重的教學任務相比，他很欣賞在格丁根有更多自由支配的時間從事研究 (這一時期主要從事一般力學的研究)。可惜美景不長，1858 年夏他去瑞士蒙特勒開會，作紀念高斯的演講，在那裡突發心臟病。狄利克雷雖平安返回了格丁根，但在病中遭夫人中風身亡的打擊，病情加重，於 1859 年春與世長辭。

狄利克雷的主要科學工作如下。

數論

狄利克雷在柏林的早期數論工作，集中在改進高斯在《算術研究》及其它數論文章中的證明或表述方式。如高斯給出的二次互反律的第一個證明相當繁瑣，須對八種情形作分別的處理；狄利克雷簡化了這一證明，把全部情形歸結爲二種。其後，他在高斯的理論中引入了一些更深入的問題和結果。如爲解二元型理論中的某些困難問題，他開始討論三元型的課題，提出了一個富有成果的新領域。1837 年 7 月 27 日，狄利克雷在柏林科學院會議上，提交了對勒讓德的一個猜想的解答，他證明任一形如

$$an+b，n=0、1、2、\cdots$$

的算術級數，若 a、b 互質，則它含有無窮多個質數 (即算術

級數的質數定理，現稱狄利克雷定理)。他的證明利用了級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ (a_n、z 是複數) 和二元二次型類數的計算等分析學工具和方法，成爲解析數論的開創性工作。

1842 年，狄利克雷開始研究具有高斯係數的型，首次運用了 "盒子原理"(即抽屜原理或鴿籠原理) − 若將多於 n 個的物體放入 n 個盒子，則至少有一個盒子含有多於一個的物體，它在現代數論的許多論證中起重要作用。1846 年，他在屬於代數數論的單元理論的文章 "複單元理論" (*Zur Theorie der complexen Einheiten*) 中，獲得了一個漂亮而完整的結果，現稱狄利克雷單元定理：對由一個不可約方程及其 r 個實根和 s 對複根定義的代數數域 $K = Q(\alpha)$，一切單元構成的阿貝爾群的秩爲 $r + s - 1$，其有限階元部分由域中單位根組成。

1863 年，狄利克雷的《數論講義》(*Vorlesungen über Zahlentheorie*) 由他的學生和朋友 R. 戴德金 (Dedekind) 編輯出版，這份講義不僅是對高斯《算術研究》的最好註釋，而且融進了他在數論方面的許多精心創造，之後多次再版，成爲數論經典之一。

分析

狄利克雷是十九世紀分析學嚴格化的倡導者之一。1829 年，他在克列爾 (Grell) 雜誌發表了他最著名的一篇文章 "關於三角級數的收斂性" (*Sur la convergence des séries trigonométriques*)。該文是在傅里葉有關熱傳導理論的影響下寫成的，討論任意函數展成形如

$$\frac{1}{2}a_o + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \cdots$$

的三角級數 (現稱傅里葉級數) 及其收斂性。早在 18 世紀，D. 伯努利 (Bernoulli) 和 L. 歐拉 (Euler) 就曾在研究弦振動問題時考察過這類級數。傅里葉在十九世紀初用它討論熱傳導現象，但未慮

及其收斂性。 A.L. 柯西 (Cauchy) 在 1823 年開始考慮它的收斂問題。狄利克雷在文中指出柯西的推理不嚴格， 其結論也不能涵蓋某些已知其收斂性的級數。 他進而考慮形式上對應於給定函數 $f(x)$ 的三角級數的前 n 項的和， 檢驗它跟 $f(x)$ 的差是否趨於零， 後成爲判斷級數收斂的經典方法。 狄利克雷證明： 若 $f(x)$ 是週期爲 2π 的週期函數， 在 $-\pi < x < \pi$ 中， 僅有有限個極大和極小值以及有限個不連續點； 又若 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ 有限， 則在 $f(x)$ 所有的連續點處， 其傅里葉級數收斂到 $f(x)$， 在函數的跳躍點處， 它收斂於函數左右極限值的算術平均。 這是第一個嚴格證明了的有關傅里葉級數收斂的充分條件， 開始了三角級數理論的精密研究。

1837 年， 狄利克雷再次回到上述課題， 發表題爲 "用正弦和餘弦級數表示完全任意的函數" (*Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus-und Cosinusreihen*) 的文章， 其中擴展了當時普遍採用的函數概念 (即由數學符號及運算組成的表達式爲函數的概念)， 引人了現代的函數概念： 若變量 y 以如下方式與變量 x 相關聯， 即只要給 x 指定一個值， 按一個規則可確定唯一的 y 值， 則稱 y 是獨立變量 x 的函數。 爲說明該規則具有完全任意的性質， 狄利克雷舉出了 "性狀極怪" 的函數實例： 當 x 爲有理數時， $y = c$； 當 x 爲無理數時， $y = d \neq c$ (現稱狄利克雷函數)。 但狄利克雷的連續函數概念仍是直觀的， 並根據等距取函數值求和的方法定義其積分。 在些基礎上， 狄利克雷建立了傅里葉級數的理論。

數學物理

1839 年， 狄利克雷發表了三篇涉及力學的數學論文， 討論多重積分估值的方法， 用於確定橢球體對其內部或外部任意質點的引力， 開始了他對數學物理問題的研究。 這方面最重要的文章發表於 1850 年， 提出了研究拉普拉斯方程的邊值問題 (現稱狄利克雷問

題或第一邊值問題)：求滿足偏微分方程

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}=0$$

的位勢函數 $V(x,\ y,\ z)$，使它在球面邊界上取給定的值。這一類型的問題在熱力學和電動力學中特別重要，也是數理方程研究中的基本課題。狄利克雷本人曾用所謂的狄利克雷原理給出了問題的解。1852 年，他討論球在不可壓縮流體中的運動，得到流體動力學方程的第一個精確解。

文　　獻

原始文獻

[1] *G. Lejeune Dirichlet Werke*(狄利克雷文集), edited by L. Kronecker and L. Fucks, Vol.1－2., Berlin, 1889－1897。

[2] P.G.L. Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, with supplements by R. Dedekind, F. Vieweg, Braunschweig, 第四版, 1894

[3] P.G.L. Dirichlet, *Über einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale, wenn der Werth des Potentials derselben in jedem Punkte ihrer Oberfläche gegeben ist*, 1850。

[4] P.G.L. Dirichlet, *Über die Bewegung eines festen Körpers in einem Incompressibeln flüssigen Medium*, 1852。

研究文獻

[5] O. Ore, *Dirichlet, Gustav Peter Lejeune*, 見 *Dictonary of scientific biography*, Vol. 4, 1971, 123－127。

[6] Carl B. Boyer, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons. Inc, New York, 1968。

[7] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ, Press, New York, 1972。

[8] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhudert I*, Springer, 1926 (Chelsea, 1956)。