哈　密　頓

哈密頓， W.R. (Hamilton， William Rowan) 1805 年 8 月 4 日生於愛爾蘭都柏林 (Dublin)；1865 年 9 月 2 日卒於都柏林。 力學、 數學、 光學。

哈密頓之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hamilton.html

哈 密 頓

易 照 華

(南京大學)

哈密頓， W.R. (Hamilton， William Rowan) 1805 年 8 月 4 日生於愛爾蘭都柏林 (Dublin)； 1865 年 9 月 2 日卒於都柏林。 力學、 數學、 光學。

哈密頓的父親阿其巴德 (Archibald Rowan Hamilton) 爲都柏林市的一個初級律師。 哈密頓自幼聰明， 被稱爲神童。 他三歲能讀英語， 會算術； 五歲能譯拉丁語、 希臘語和希伯來語， 並能背誦荷馬史詩； 九歲便熟悉了波斯語、 阿拉伯語和印地語。 十四歲時， 因在都柏林歡迎波斯大使宴會上用波斯語與大使交談而出盡風頭。

哈密頓自幼喜歡算術， 計算很快。 1818 年遇到美國 “計算神童”Z. 科爾伯恩 (Colburn) 後對數學產生了更深厚的興趣。 1820 年再相逢時， 哈密頓已閱讀了 I. 牛頓 (Newton) 的《 自然哲學的數學原理 》(*Mathematical principles of natural philosophy*)， 並對天文學有強烈愛好， 常用自己的望遠鏡觀測天體； 還開始讀 P.-S. 拉普拉斯 (Laplace) 著作《 天體力學 》(*Mécanique céleste*)， 1822 年指出了此書中的一個錯誤。 同年開始進行科學研究工作， 對曲線和曲面的性質進行了系列研究， 並用於幾何光學。 他的報告送交愛爾蘭科學院後， R.J. 布林克利 (Brinkley) 院士評論說： “這位年輕人現在是這個年齡 (17 歲) 的第一數學家。 ”

1823 年 7 月 7 日， 哈密頓以入學考試第一名的成績進入著名的三一學院， 得到正規的大學訓練， 後因成績優異而多次獲得學院的古典文學和科學的最高榮譽獎。 他在 1823 年到 1824 年間完成了

多篇有關幾何學和光學的論文，其中在 1924 年 12 月送交愛爾蘭皇家科學院會議的有關焦散曲線 (caustics) 的論文，引起科學界的重視。

1827 年 6 月 10 日，年僅二十二歲的哈密頓被任命爲敦辛克天文台的皇家天文研究員和三一學院的天文學教授。

哈密頓有兄弟姐妹八人，家庭負擔很重；爲減輕父親經濟壓力，他畢業後帶著三個妹妹住到敦辛克天文台。哈密頓不擅長天文觀測，在天文台工作的五年中，仍主要從事理論研究；但因與外界很少聯繫，工作成果並未引起重視。

1832 年，哈密頓成爲愛爾蘭皇家科學院院士後非常活躍，與學術界人士廣泛交流討論，包括一些詩人和哲學家。他從 S.T. 柯爾律治 (Coleridge) 的作品中了解到 I. 康德 (Kant) 的哲學，熱情地讀完康德主要著作《純理性批判》(*Kritik der Reinen Vernunft*)。康德哲學觀點對哈密頓後期的工作有很大影響。

1834 年，哈密頓發表了歷史性論文“一種動力學的普遍方法”(*On a general method in dynamics*)，成爲動力學發展過程中的新里程碑。文中的觀點主要是從光學研究中抽象出來的。

在對複數長期研究的基礎上，哈密頓在 1843 年正式提出了四元數 (quaternion)，這是代數學中一項重要成果。

由於哈密頓的學術成就和聲望，1835 年在都柏林召開的不列顛科學進步協會上被選爲主席，同年被授予爵士頭銜。1836 年，皇家學會因他在光學上的成就而授予皇家獎章。1837 年，哈密頓被任命爲愛爾蘭皇家科學院院長，直到 1845 年。1863 年，新成立的美國科學院任命哈密頓爲十四個國外院士之一。

哈密頓的家庭生活是不幸福的。早在 1823 年，他愛上了一位同學的姐姐凱瑟琳 • 狄斯尼 (Catherine Disney)，但遭到她的拒絕，哈密頓卻終身不能忘情。在戀愛生活中一再碰壁之後，他於 1833 年草率地同海倫 • 貝利 (Helen Bayly) 結婚。雖然生育二子一

女， 終因感情不合而長期分居。 哈密頓經常不能正規用餐， 而是邊吃邊工作。 他去世後， 在他的論文手稿中找到了不少肉骨頭和吃剩的三明治等殘物。

哈密頓工作勤奮， 思想活躍。 發表的論文一般都很簡潔， 別人不易讀懂， 但手稿卻很詳細，因而很多成果都由後人整理而得。 僅在三一學院圖書館中的哈密頓手稿， 就有 250 本筆記及大量學術通信和未發表論文。 愛爾蘭國家圖書館還有一部分手稿。

他的研究工作涉及不少領域， 成果最大的是光學、 力學和四元數。 他研究的光學是幾何光學， 具有數學性質； 力學則是列出動力學方程及求解； 因此哈密頓主要是數學家。 但在科學史中影響最大的卻是他對力學的貢獻。

1. 經典力學的新里程碑

經典力學自牛頓創立 (1687) 以後， 到 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 建立 “分析力學”(1788) 之前， 稱爲牛頓力學； 1788 年以後稱拉格朗日力學； 1834 年，哈密頓的著名論文 “一種動力學的普遍方法” 發表後， 又稱爲哈密頓力學， 它是力學發展中的新里程碑， 在現代力學和物理學中有廣泛應用。哈密頓的貢獻主要有下列三個內容。

(1) **哈密頓原理**　哈密頓在 1824 − 1832 年間對幾何光學的系列研究基礎上， 認爲可找到一種普遍原理， 他認眞研究了 L. 歐拉 (Euler) 和拉格朗日的最小作用原理， 用拉格朗日函數

$$L = T - V \text{，} \tag{1}$$

建立了等式

$$S = \int_{t_o}^{t_1} L dt \text{，} \tag{2}$$

其中 T、 V 爲所討論的力學系統總動能和勢能。 勢能 V 不僅爲

廣義坐標 q_i 的函數，還依賴廣義速度 $\dot{q}_i\ (=\dfrac{dq_i}{dt})$ 和時間 t。當 V 只依賴於廣義坐標時，S 就可化爲拉格朗日原理中的作用。另外，哈密頓認爲力學系統的實際運動不一定使作用 S 爲最小；故哈密頓提出的原理叫做穩定作用原理。由 S 的一階變分爲 0，可導出力學系統的運動方程。雖然方程中的函數有改變，但仍稱爲拉格朗日運動方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}\quad (i=1、2、\cdots、n)。\tag{3}$$

(2) **哈密頓正則方程組**　從哈密頓原理求出的運動方程 (3) 是二階常微分方程組。1835 年，哈密頓利用廣義動量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

作爲另一組變量，並引入一個新的函數

$$H=-L+\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i，\tag{4}$$

H 是 p_i、q_i、t 的函數。用 H 可把運動方程 (3) 式化爲一階方程組：

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}，\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\ (i=1、2、\cdots、n)。\tag{5}$$

這樣的方程組後來被稱爲哈密頓正則方程組，函數 H 則稱爲哈密頓函數；p_i、q_i 稱正則共軛變量。

哈密頓在提出正則方程組 (5) 時指出，可選擇適當的變換，使變換後的新變量仍爲正則共軛變量，但新哈密頓函數可能少包含某些新坐標－循環坐標。每增加一個循環坐標，運動方程可降低二階，由此可作爲正則方程組的一種原則解法。這種使運動方程保

持正則方程組形式的變換， 稱爲正則變換。 後來有很大發展， 並有廣泛應用。

(3) **哈密頓－雅可比方法**　哈密頓結合作用和正則方程組的定義， 引入輔助函數 W

$$\frac{dW}{dt} = L = T - V \text{，} \tag{6}$$

對於滿足正則方程組 (5) 式的解 q_i 、 p_i 有

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \text{。} \tag{7}$$

由此可把 W 表示爲廣義坐標 q_i 和 n 個任意常數 α_i 以及時間 t 的函數， 而且滿足關係

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_i},\ q_i,\ t\right) = 0 \text{。} \tag{8}$$

(8) 式實際上是函數 $W = W(q_i,\ \alpha_i,\ t)$ 對自變量 q_i 、 t 的一個偏微分方程。 這樣就把正則方程組 (2) 式的解與偏微分方程 (8) 式的解聯繫起來了。

後來經過了 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 在 1837－1842 年的系列研究， 利用正則變換使新哈密頓函數等於 0， 也得到偏微分方程 (8)； 而且證明， 對 (8) 式的任意一個完全解 (即解出的函數 W 包含全部 n 個廣義坐標 q_i ， n 個獨立積分常數 α_i 和時間 t)，

$$W = W(q_i,\ \alpha_i,\ t) \text{，} \tag{9}$$

由相應關係

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \text{，} \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}\ (i = 1 \text{、} 2 \text{、} \cdots \text{、} n) \tag{10}$$

解出的

$$p_i = p_i(\alpha_i,\ \beta_i,\ t) \text{，} q_i = q_i(\alpha_i,\ \beta_i,\ t) \tag{11}$$

就是原正則方程組 (2) 式的通解， 其中 β_i 爲另外 n 個獨立積分常數。

這就給出了正則方程組的另一種原則解法， 叫做哈密頓－雅可比方法； 偏微分方程 (8) 就稱爲哈密頓－雅可比方程。積分常數 α_i 、 β_i 稱爲正則常數。 這些成果不僅推動力學的發展， 也在變分法和微分方程的發展中有重要作用。

哈密頓的力學貢獻很快在天體力學中廣泛應用， 用哈密頓正則方程組和正則變換建立天體運動方程及相應解法， 促使天體力學在十九世紀後期形成了發展高潮。

但在十九世紀的數學界， 對哈密頓力學有爭議。 例如著名數學家 F. 克萊因 (Klein) 就說過：哈密頓的結果很漂亮， 但沒有用。 以後的情況否定了這種看法。

二十世紀以來， 在現代物理學各分支，如波動力學、 量子力學、 相對論、 原子物理學的建立過程中，哈密頓力學都起了重要作用。 量子力學的奠基者之一 E. 薛定諤 (Schrödinger) 就說過，哈密頓力學是現代物理學的基石。 五十年代以後， 一批數學和力學家們用現代數學提高了哈密頓力學的深度， 其中代表作是蘇聯著名力學家 В. И. 阿諾德 (Арнольд) 所著的《經典力學的數學方法》(*Mathematical methods of classical mechanics*， 1974 年出俄文版， 1978 年出英譯本)。 該書在辛流形 (symplectic manifold) 上建立哈密頓力學， 使哈密頓力學現代化。

人們還發現， 哈密頓正則方程組在計算方法上有特殊優點， 只要適當建立相應的數值積分方法， 可使誤差積累很慢， 適用於計算步數很大的課題。 中國計算數學家馮康等建立的辛積分法， 符合哈密頓方程組的特點， 計算效果很好， 受到國際上的重視。

2. 四元數的創立者

哈密頓研究四元數花的時間最多， 前後約三十年。 早在 1827

年， 他就開始研究複數性質， 到 1837 年正式提出複數

$$a+bi \quad (i=\sqrt{-1}\text{，}a\text{、}b\text{ 爲實數})$$

不是 a 與 bi 的和， 而是實數 a、b 的有序偶 $(a,\ b)$。 只要明確有序偶的運算規則， 就可不用 i 而建立全部複數理論。 由此誕生複數代數。

複數可以表示平面上的向量， 但實用向量應是三維的， 是否有"三維複數"? 1830 年後， 不少著名數學家如 C.F. 高斯 (Gauss) 等都在探求。 哈密頓在弄淸複數之後， 仍按實數性質探求這種具有三個分量的 "複數"。 他終於成功了， 可是所得的新數只能是四個分量， 而且不符合乘法交換律。 哈密頓在 1843 年把所得的新數命名爲四元數， 它的一般形式爲

$$p=a+bi+cj+dk\text{，} \tag{12}$$

其中 a、b、c、d 是實數；a 稱爲四元數的數量部分， 另三項是向量部分。i、j、k 稱定性單元， 類似於三維坐標軸方向的單位向量；b、c、d 爲某點在三維坐標系中的坐標， 即四元數的向量分量。 研究成果載於他的《四元數講義》(*Lectures on quaternion*， 1853)。

哈密頓定義四元數的和差即爲數量部分及各向量分量的和差； 四元數的乘積中， 各分量相乘仍用實數乘法規則， 但定義

$$\left.\begin{array}{l} ij=k\text{，}\ jk=i\text{，}\ ki=j\text{，}\\ ij=-ji\text{，}\ jk=-kj\text{，}\ ki=-ik\text{，}\\ ii=i^2=jj=j^2=kk=k^2=-1\text{。}\end{array}\right\} \tag{13}$$

這樣， 四元數的乘法不符合交換律， 但符合結合律。

哈密頓還引進了四元數 p 的逆

$$p^{-1}=(a-bi-cj-dk)/N(p)\text{，} \tag{14}$$

而

$$N(p)=a^2+b^2+c^2+d^2 \tag{15}$$

稱爲四元數 p 的模。

另外，哈密頓還提出了以後通用的微分算子

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\text{。} \tag{16}$$

對於任一函數 $u(x,\ y,\ z)$，有

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}\,k\text{。}$$

後來人們稱 ∇u 爲函數 u 的梯度，廣泛應用於力學、電磁學和現代物理學。

哈密頓創立四元數後非常高興，自認爲與微積分一樣重要，會成爲數學和物理學中的一種關鍵工具。雖然這種估計有點過分，但四元數的創立，對後來代數學的發展確有重大作用，因爲人們可以脫離實數和複數的傳統規則，根據需要自由地創造各種數系，建立相應的代數學。不久後發展起來的向量代數和線性結合代數 (linear associative algebra) 都受到四元數的直接推動。

3. 幾何光學的重要貢獻

哈密頓的第一個研究課題是幾何光學，早在進大學前就開始了，所花的時間僅次於四元數。他的主要貢獻是用數學分析方法來研究幾何光學，並把所得結果推廣到動力學，從而提出哈密頓原理。大多數結果載於 1827 年發表的論文 “光束理論” (*Theory of systems of rays*) 及後來的補充中，具體貢獻如下。

(1) **等作用曲面**　點光源射出的光束經曲面鏡反射或折射後，存在與光線正交的曲面族。哈密頓證明多次反射或折射後同樣存在這種曲面族。在證明過程中，用到他本人發展了的最小作用原理，認爲起點在垂直於光線的曲面上變化，經多次反射或折射後，相應的終點定出了垂直於光線的一個曲面。哈密頓稱這些曲面爲等作用面。把光當作微粒或波時，結論都相同。這就把幾何

光學與力學中最小作用原理聯繫起來，哈密頓後來稱這種原理爲變作用原理 (principle of varying action)

(2) **特徵函數** 根據多次反射 (或折射) 後的光束與一曲面族正交，將坐標爲 $(x,\ y,\ z)$ 的光線方向餘弦記爲 α、β、γ，它們應爲 x、y、z 的函數。哈密頓認爲，方向餘弦必須是某函數的梯度，即存在函數 $V=V(x,\ y,\ z)$，有：

$$\alpha=\frac{\partial V}{\partial x}，\beta=\frac{\partial V}{\partial y}，\gamma=\frac{\partial V}{\partial z}。$$

因此 V 應滿足偏微分方程：

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2=1。\tag{17}$$

哈密頓稱此方程的解 $V(x,\ y,\ z)$ 爲特徵函數。顯然，若在均勻各向同性介質中，V 代表光源到 $(x,\ y,\ z)$ 處的光線長度，則是一個解。哈密頓宣稱："特徵函數包含了幾何光學的全部。"

在 1832 年發表的 "光束理論" 第三個補充中，哈密頓把特徵函數推廣到能用於初始點變化，以及不均勻和各向異性介質的情況。這樣，利用特徵函數可把光學系統表示爲初始和最終光線有關變量的函數；用最小作用原理可定出兩固定點之間的光程，於是特徵函數就把光學長度表示爲變初始點和終端點的函數。哈密頓還把特徵函數用於其它領域，取得下列重要結果。

① 哈密頓在第三個補充中，用特徵函數研究 A.F. 菲涅爾 (Fresnel) 的光波曲面後發現：在雙軸晶體情況，存在四個劈錐狀尖點。他由此預言：單光線以適當方向射入雙軸晶體後，在晶體內折射成一個錐面，射出晶體後成爲一個窄柱面；光線聚焦成一錐面射入雙軸晶體後，在晶體內與單光線一樣，射出晶體後成爲一個窄錐面。這個預言在 1832 年底，由三一學院的 H. 勞埃德 (Lloyd) 用實驗證實。

② 光線作爲粒子運動時， 與質點的力學運動相似。 哈密頓從1833 年起， 用特徵函數研究動力學課題。 最初把特徵函數作爲一質點從初始點到終端點運動過程的作用， 後來才推廣到 n 個質點系統的情況， 從最小作用原理到變作用原理， 終於形成了著名的哈密頓原理。 相應的特徵函數 V 具體表示爲

$$V = tH + S \text{。} \tag{18}$$

其中 t 爲時間、 H 爲 n 體系統的哈密頓函數、 S 即 (2) 式定義的作用。

另外，哈密頓的研究工作還涉及數學力學和光學的廣泛領域， 提出了不少新的看法。 例如， 他由動力學普遍方法引伸出所謂主關係算法 (calculus of principal relation)， 用變分法解某些全微分方程； 提出用速端曲線 (hodograph) 表示軌跡運動； 又提出不僅研究光的動力學， 還要研究光在晶狀介質傳播中黑暗的動力學， 並命名爲暗動力學 (skotodynamics)； 他對光在介質中傳播的研究導致群速度 (group velocity) 和相速度 (phase velocity) 的區分。 可惜這些工作未能深入開展下去。

文　獻

原始文獻

[1] W.R. Hamilton, *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton*, Cambridge, 1931－1967。

研究文獻

[2] T.L. Hankins, *Hamilton ，William Rowan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 6, 1972, 85－93。

[3] R.P. Graves, *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vols, Dublin, 1882－1889。

[4] R. Dugas, *Sur la pensée dynamique d'Hamilton： origines optiques et prolongement Modernes*, Révue Rcientific, 79 (1941), 15－23。

[5] A. Cayley, *Reports on the recent progress of theoretical dynamics*, British Association Reports, 1857, 1 − 42 。

[6] J.L. Synge, *Hamilton's method in geometrical optics*, Journal of the Optical Society of America, 27 (1937), 75 − 82 。

[7] E.T. Whittaker, *The sequence of ideas in the discovery quaternions*, Proceedings of the Royal lrish Academy, 50*A* (1945), 93 − 98 。

[8] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972 。