伽　羅　瓦

伽羅瓦，E. (Galois，Evariste) 1811 年 10 月 25 日生於法國巴黎附近的拉賴因堡 (Bourg La Reine)；1832 年 5 月 31 日卒於巴黎。數學。

伽羅瓦之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Galois.html

伽 羅 瓦

鄧 明 立

(河北師範學院)

伽羅瓦， E. (Galois， Evariste) 1811 年 10 月 25 日生於法國巴黎附近的拉賴因堡 (Bourg La Reine)； 1832 年 5 月 31 日卒於巴黎。 數學。

伽羅瓦的父親 N.G. 伽羅瓦 (Galois) 是法國資產階級革命的支持者， 爲人正直厚道。 他在 1815 年拿破侖發動 “百日政變” 期間， 當選爲拉賴因堡市的市長。 伽羅瓦的母親是一位當地法官的女兒， 聰明而有教養， 但個性倔強， 甚至有些古怪。 她是伽羅瓦的啓蒙老師， 爲他的希臘語和拉丁語打下了基礎， 並且把她自己對傳統宗教的懷疑態度傳給了兒子。

1823 年 10 月， 十二歲的伽羅瓦離別雙親， 考入路易絲 • 勒格蘭皇家中學 (Louis-le-Grand)， 開始接受正規教育。 在中學的前兩年， 他因希臘語和拉丁語成績優異而多次獲獎； 但在第三年 (1826)， 伽羅瓦對修辭學沒有下足夠的功夫， 因而只得重讀一年。 在這次挫折之後， 他被批准選學第一門數學課。 這門課由 H.J. 弗尼爾 (Vernier) 講授， 他喚起了伽羅瓦的數學才能， 使他對數學發生了濃厚的興趣。 他一開始就對那些不談推理方法而只注重形式和技巧問題的教科書感到厭倦， 於是， 他毅然拋開教科書， 直接閱讀數學大師們的專著。 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的經典著作《 幾何原理 》(*Eléments de géometre*， 1792)， 使他領悟到數學推理方法的嚴密性； J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的《 解數值方程 》(*Résolution des équations numeriques*， 1769)、 《 解析函數論 》(*Théorie des fonctions analytiques*， 1797) 等著作， 不僅僅使

得他的思維更加嚴謹， 而且其中的思想方法對他的工作產生了重要的影響； 接著他又研究了 L. 歐拉 (Euler)、 C.F. 高斯 (Gauss) 和 A.L. 柯西 (Cauchy) 的著作， 爲自己打下了堅實的數學基礎。 學習和研究數學大師的經典著作， 是伽羅瓦獲得成功的重要途徑。 他深信自己能做到的， 決不會比他們少。 他的一位教師說： “他被數學的鬼魅迷住了心竅。” 然而， 他忽視了其它學科， 導致了他首次 (1828) 報考巴黎綜合工科學校失敗。

1828 年 10 月， 伽羅瓦從初級數學班升到 L.P.E. 理查德 (Richard) 的數學專業班。 理查德是一位年輕而富有才華的教授， 並且具有發掘科學英才的敏銳判斷力和高度責任感。 他認爲伽羅瓦是最有數學天賦的人物， “只宜在數學的尖端領域中工作。” 於是， 年僅十七歲的伽羅瓦開始著手研究關於方程理論、 整數理論和橢圓函數理論的最新著作。 他的第一篇論文 “週期連分數的一個定理的證明”(*Démonstration d'un théoréme sur les fractions continues périodiques*)， 於 1829 年 3 月發表在 J.D. 熱爾崗 (Gergonne) 主辦的《純粹與應用數學年刊》(*Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上， 它更爲清楚地論述和說明了歐拉與拉格朗日關於連分式的結果。

據伽羅瓦說， 他在 1828 年犯了和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 在八年前犯的同樣錯誤， 以爲自己解出了一般的五次方程。 但他很快意識到了這一點， 並重新研究方程理論， 他堅持不解， 直到成功地用群論闡明了這個帶普遍性的問題。 1829 年 5 月 25 日和 6 月 1 日， 他先後將他的兩篇關於群的初步理論的論文呈送法國科學院。 科學院請柯西做論文的主審。 然而， 一些事件挫傷了這個良好的開端， 而且在這位年輕數學家的個性上留下了深深的烙印。 首先， 伽羅瓦的父親由於受不了保守的天主教牧師的惡毒誹謗於 7 月 2 日自殺身亡。 之後不到一個月， 伽羅瓦參加了巴黎綜合工科學校的入學考試， 由於他拒絕採用主考官建議的解答方

法，結果又遭失敗。最後他不得已報考了高等師範學院，於 1829 年 10 月被錄取。

柯西審核的伽羅瓦的論文，新概念較多，又過於簡略，因此柯西建議他重新修改。1830 年 2 月，伽羅瓦將他仔細修改過的論文再次呈送科學院，科學院決定由 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 主審。不幸，傅里葉 5 月份去世，在他的遺物中未能找到伽羅瓦的手稿。

1830 年 4 月，伽羅瓦的論文“關於方程代數解法論文的分析”發表在 B.D. 費呂薩克 (Férussac) 的《數學科學通報》(*Bulletetin des Sciences Mathématiques*) 上。同年 6 月，他又在同一雜誌上發表了兩篇論文 – “關於數值方程解法的註記” 和 “數的理論”，這期雜誌上還刊登著柯西和 S.D. 泊松 (Poisson) 的文章，這充分說明了伽羅瓦已在數學界贏得了聲譽。

伽羅瓦進入師範學院一年，正當他做出卓越的研究工作之時，法國歷史上著名的 1830 年 “七月革命” 爆發了。伽羅瓦作爲一名勇敢追求眞理的共和主義戰士，反對學校的苛刻校規，抨擊校長在 “七月革命” 期間的兩面行爲。爲此，他於 1830 年 12 月 8 日被校方開除。於是，他便根據自己的意志投身於政治活動。1831 年 5 月 9 日，在一個共和主義者的宴會上，伽羅瓦舉杯對國王進行了挑釁性的祝酒，於第二天被捕。罪名是教唆謀害國王生命的未遂罪。6 月 15 日被塞納陪審法院釋放。在此期間，伽羅瓦繼續進行數學研究。他於 1831 年 1 月 13 日開了一門關於高等代數的公開課，以講授自己獨創的學術見解謀生。但是，這個設想並未獲得多大成功。1831 年 1 月 17 日，他向科學院呈送了題爲 “關於方程根式解的條件” 的論文，這次負責審查論文的是泊松和 S.F. 拉克羅阿 (Lacroix)。雖然泊松認眞地審閱了它，可得出的結論卻是 “不可理解”。在他們給科學院的報告中說：“我們已經盡了最大努力來研究伽羅瓦的證明，他的推理顯得不很淸楚，到目

前爲止， 我們還不能對它作出正確評價， 因爲有說服力的證明還沒有得到。 因此， 在這篇報告中， 我們甚至不能給出他的證明思想。” 最後， 泊松建議伽羅瓦進一步改進並詳細闡述他的工作。

1831 年 7 月 14 日， 伽羅瓦率衆上街示威遊行時， 再次被捕， 他被關押在聖佩拉吉監獄。 他在獄中頑強地進行數學研究， 一面修改他關於方程論的論文， 研究橢圓函數， 一面著手撰寫將來出版他著作時的序言。 1832 年 3 月 16 日， 由於宣佈霍亂正在流行， 伽羅瓦被轉移到一家私人醫院中服刑。 他在那裡陷入戀愛， 後因愛情糾紛而捲入一場決鬥。 4 月 29 日， 伽羅瓦獲釋。 5 月 29 日， 即決鬥的前一天， 伽羅瓦給共和主義者的朋友寫了絕筆信， 尤其在給 A. 舍瓦列耶 (Cheralier) 的信中， 表明他在生命即將結束的時候， 仍在整理、 概述他的數學著作。 第二天清晨， 在岡提勒的葛拉塞爾湖附近， 他與對手決鬥， 結果中彈致傷後被送進醫院。 1832 年 5 月 31 日， 這位未滿 21 歲的數學家與世長辭了。

伽羅瓦最主要的成就是提出了群的概念， 用群論徹底解決了代數方程的可解性問題。 人們爲了紀念他， 把用群論的方法研究代數方程根式解的理論稱之爲伽羅瓦理論。 它已成爲近世代數學的最有生命力的一種理論。

群論起源代數方程的研究， 它是人們對代數方程求解問題邏輯考察的結果。 對於方程論， 拉格朗日有過卓越的概括。 在 1770 年前後， 他利用統一的方法 (現在稱爲拉格朗日預解式方法)， 詳細分析了二次、 三次、 四次方程的根式解法， 提出了方程根的排列置換理論是解決問題的關鍵所在。 他的方法對於求解低次方程卓有成效， 但對一般的五次方程卻沒有任何明確的結果， 致使他對高次方程求解的問題產生了懷疑。 P. 魯菲尼 (Ruffini) 於 1799 年首次證明了高於四次的一般方程的不可解性， 但其證明並不完善。 在 1824 − 1826 年， 阿貝爾修正了魯菲尼證明中的缺陷， 嚴

格證明了一般的五次或五次以上的代數方程不可能有根式解。 其間， 高斯於 1801 年建立了分圓方程理論， 解決了二項方程的可解性問題， 這對於伽羅瓦理論的創立至關重要。 1815 年， 柯西對於置換理論的發展做出了貢獻。 固然高於四次的一般方程不能有根式解， 但是有些特殊類型的方程 (如二項方程 、 阿貝爾方程等) 仍然可以用根式求解。 因此， 全面地刻畫可用根式求解的代數方程的特性問題， 乃是一個需要進一步解決的問題。 伽羅瓦的理論正是在這樣的背景上發展起來的。

伽羅瓦繼承和發展了前人及同時代人的研究成果， 融會貫通了各流派的數學思想， 並且憑著他對近代數學概念特性的一種直覺， 超越了他們。 他系統地研究了方程根的排列置換的性質， 首次定義了置換群的概念， 他認爲了解置換群是解決方程理論的關鍵。 在 1831 年的論文中， 伽羅瓦把具有封閉性的置換的集合稱爲 “群”。 當然， 這只是抽象群的一條重要性質而已。 群是近代數學中最重要的概念之一， 它不僅對數學的許多分支有深刻的影響， 而且在近代物理 、 化學中也有許多重要的作用。 因此， 群的概念需要以高度抽象的形式來表達。 現在公認群是元素間存在二元運算 (例如乘法) 並具有下列四條性質的集合：

(1) (封閉性) 集合中任意兩個元素的乘積仍屬於該集合；

(2) (結合性) 乘法滿足結合律， 即 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$；

(3) (存在單位元) 集合中存在單位元 I， 對集合中任意元素 a 滿足 $I \cdot a = a \cdot I = a$；

(4) (存在逆元) 對集合中任一元素 a， 存在唯一元素 a^{-1}， 使得 $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = I$。

伽羅瓦是利用群論的方法解決代數方程可解性問題的。 他注意到每個方程都可以與一個置換群聯繫起來， 即與它的根之間的某些置換組成的群聯繫； 現在稱這種群爲伽羅瓦群。 對於任一個取有理數值的關於根的多項式函數， 伽羅瓦群中的每個置換都使該函

數的值不變。 反過來， 如果伽羅瓦群中的每個置換都使一個根的多項式函數的值不變， 則這多項式函數的值是有理的。 因此， 一個方程的伽羅瓦群完全體現了它的根 (整體) 的對稱性。 伽羅瓦的思想方法大致是這樣的： 他將每個方程對應於一個域， 即含有方程全部根的域 (現在稱之爲方程的伽羅瓦域)， 這個域又對應一個群， 即這個方程的伽羅瓦群。 這樣， 他就把代數方程可解性問題轉化爲與方程相關的置換群及其子群性質的分析問題。 這是伽羅瓦工作的重大突破。

具體說來， 假設方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的係數生成的域爲 F， E 是方程的伽羅瓦域， 它是將方程的根添加到 F 上所生成的域， 現在稱之爲伽羅瓦擴張。 讓 G 表示方程的伽羅瓦群。 這個方程是否可用根式求解的關鍵問題是： 數域 F 是否可以經過有限次添加根式而擴張爲根域 E。 也就是說是否存在有限多個中間域： F_1、 F_2、 $\cdots$ 、 F_{s-1}、 $F_s=E$， 使 $F=F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_s=E$。 其中每個 F_i 都是由 F_{i-1} 添加 F_{i-1} 中的數的根式所生成的擴域。 不妨假定， F 是含有這個方程的係數及 1 的各次方根的最小域， 且每次所添加的根式均爲質數次根。 那麼， 這樣的中間域 F_i 與 F_{i-1} 之間有何關係呢? 伽羅瓦經過認眞的研究， 認爲關鍵取決於使 F_{i-1} 保持不變的 F_i 的自同構變換群的結構。 可以證明， 這樣的自同構群是質數階的循環群， 且階數爲 $[F_i:F_{i-1}]$。 域上的自同構群概念的引入， 使域與群發生了聯繫， 即建立了伽羅瓦域的子域與伽羅瓦的子群之間的一一對應關係。 事實上， 保持 $F=F_0$ 的元素不動的 E 的每個自同構決定方程根的一個置換， 它屬於伽羅瓦群 G； 反之， G 中每個置換引起 E 的一個自同構， 它使 F 的元素不動。 這樣就建立了 E 的自同構群和方程的伽羅瓦群之間的同構。 由此建立 E 的子域 (包含 F) 和 G 的子群之間的一一對應： 保持子域 F_i 元素不動的 G 中全部置換構成 G 的一個子群 G_i， 讓 G_i 與 F_i 對應， 而且反過來也可用 G_i

來刻劃 F_i， 即 F_i 是 E 中對 G_i 的每個置換保持不動的元素全體。

伽羅瓦還利用方程的 $n!$ 值的線性係數 θ (n 表示方程根的個數) 來定出方程的伽羅瓦群。雖然這種計算並非易事， 但的確給出了計算伽羅瓦群的一種方法， 而且伽羅瓦在這裡給出了域擴張的本原元素的概念。

在代數方程可解性的研究中， 伽羅瓦的主要思想是對給定方程的係數以及經過有限次擴張的中間域給出了一個群的序列， 使得每個擴域相對應的群是它前一個域相應的群的子群。伽羅瓦基本定理就描述了中間域與伽羅瓦群的子群之間的對應關係。利用這種關係， 可由群的性質描述域的性質； 或由域的性質描述群的性質。因此， 伽羅瓦的理論是域與群這兩種代數結構綜合的結果。

伽羅瓦的工作主要基於兩篇論文 – “關於方程根式解的條件” 和 “用根式求解的本原方程”。這兩篇論文於 1846 年由 J. 劉維爾 (Liouville) 編輯出版。此後， 人們便開始介紹和評價伽羅瓦的工作， 他的思想方法逐漸爲人們所接受。在這些論文中， 伽羅瓦將其理論應用於代數方程的可解性問題， 由此引入了群論的一系列重要概念。

當伽羅瓦將二項方程作爲預解方程研究時， 他發現其相應的置換子群應是正規子群且指數爲質數才行。正規子群概念的引入及其性質和作用的研究， 是伽羅瓦工作的又一重大突破。屬於伽羅瓦的另一個群論概念是兩個群之間的同構。這是兩個群的元素之間的一一對應， 使得如果在第一個群中有 $a \cdot b = c$， 則對第二個群的對應元素， 有 $a' \cdot b' = c'$。他還引進了單群和合成群的概念。一個沒有正規子群的群是單群， 否則是合成群。他表述了最小單群定理： 階是合成數的最小單群是 60 階的群。

伽羅瓦還利用正規子群判別已知方程能否轉化低次方程的可解性問題。用現代語言可將他的思想方法描述如下： 首先定義正規子群的概念， 即群 G 的子群 N 叫做 G 的正規子群， 是指對於每個

$g \in G$、 $g^{-1}Ng = N$； 其次是尋找極大正規子群列， 確定極大正規子群列的一系列合成因子。 如果一個群所生成的全部合成因子都是質數， 伽羅瓦就稱這個群爲可解的。 他利用可解群的概念全面刻畫了用根式解方程的特性， 給出了判別方程可解性的準則： 一個方程可用根式解的充要條件是這個方程的伽羅瓦群是可解群。 雖然這一準則不能使一個確定方程的精確求解更爲簡單， 但它確實提供了一些方法， 可以用來得出低於五次的一般方程， 以及二項方程和某些特殊類型方程的可解性的有關結果， 還可以直接推導出高於四次的一般方程的不可解性。 因爲一般的 n 次方程的伽羅瓦群是 n 個文字的對稱群 S_n； 當 $n > 4$ 時， n 次交錯群 A_n 是非交換的單群 (不可解)， A_n 又是 S_n 的極大正規子群。 由此可推出 S_n 是不可解的。 既然對於所有這樣的 n 值， 都存在其 S_n 是伽羅瓦群的 n 次方程， 所以一般的高於四次的方程不可能得到根式解。

在 "關於方程代數解法論文的分析" 中， 伽羅瓦提出了一個重要定理 (未加證明)： 一個質數次方程可用根式求解的充要條件是這個方程的每個根都是其中兩個根的有理函數。 伽羅瓦用它判別特殊類型方程的根式解問題。 他所研究的這種方程， 現在稱之爲伽羅瓦方程， 是阿貝爾方程的推廣。 在 "數的理論" 一文中， 伽羅瓦用現在所謂的 "伽羅瓦虛數" 對同餘理論作了推廣並將之應用於研究本原方程可用根式求解的情況。 關於伽羅瓦虛數， 在伽羅瓦之前只知道特徵 0 的域， 如有理數域、 實數域、 複數域等， 伽羅瓦在這篇論文中給出了一類新的域， 即伽羅瓦域， 現在稱爲有限域， 它們是質數特徵的域。 有限域在現在通訊中的重要作用是盡人皆知的。

伽羅瓦的數學遺作， 首次 (1846) 發表在劉維爾主辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上。 1897 年， E. 皮卡 (Picard) 再次出版了《伽羅瓦數學手稿》(*Ocuvres mathématiques d'Evariste Galois*)。 之後， 坦納里 (Tannery) 編輯的《伽羅瓦的手稿》(*Manuscriste d'Evariste Galois*) 於 1908 年正式出版。1962 年，R. 布爾哥涅 (Bourgne) 和 J.P. 阿茲拉 (Azra) 編輯出版了帶有評論性的典型版本《伽羅瓦數學論文全集》(*Ecrists et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*)，它彙集了伽羅瓦所有已發表的著作，以及絕大部分還保存的數學提綱、信件和原稿。這些史料證實了伽羅瓦的數學研究，與他對數學本質尤其對數學方法的追求、探索是密不可分的，展示了他對現代數學精神的遠見卓識。從中精選出的有關數學觀、方法論的原文，已成爲當今研究的方向。

伽羅瓦不僅研究具體的數學問題，而且研究能概括這些具體成果並決定數學長期發展及人們思維方式轉變的新理論－群論。由此還發展了域論。D. 希爾伯特 (Hilbert) 曾把伽羅瓦的理論稱爲“一個明確的概念結構的建立”。這種理論，對於近代數學、物理學、化學的發展，甚至對於二十世紀結構主義哲學的產生和發展，都發生了巨大影響。正像 E.T. 貝爾 (Bell) 所說的：“無論在什麼地方，只要能應用群論，從一切紛亂混淆中立刻結晶出簡潔與和諧，群的概念是近世科學思想的出色的新工具之一。”

伽羅瓦還是頭一位有意識地以結構研究代替計算的人。他使人們從偏重“計算”研究的思維方式變爲用“結構”觀念研究的思維方式，他的理論是群與域這兩種代數結構綜合的結果。在他的論文序言部分明確表述了這種思想，他提出：“使計算聽命於自己的意志，把數學運算歸類，學會按照難易程度，而不是按照它們的外部特徵加以分類－這就是我所理解的未來數學家的任務，這就是我所要走的道路。”這種深邃的數學思想，已明顯地具有現代數學的精神。

伽羅瓦“把數學運算歸類”這句話，毫無疑問是指現在所謂群論。群的功能正是將所研究的對象進行分類，而不管研究對象本身及其運算的具體內容，它是在錯綜複雜的現象中探討共同

的結構。一般說來，一個抽象的集合不過是一組元素而已，無所謂結構，一旦引進了運算或變換就形成了結構；所形成的結構中必須包含著元素間的關係，這些關係通常是由運算或變換聯繫著的。“把數學運算歸類，而不是按照它們的外部特徵加以分類”，其思想實質是：數學由研究具體的數和形的外部特徵轉變成研究一般的、抽象的結構。伽羅瓦對代數結構的探索，深化了人們關於數學研究對象的認識－按照這種觀念，數學的研究對象不是孤立的量，而是數學的結構。從自發到自覺轉變的意義上說，伽羅瓦已經處於近代數學的開端。他爲十九世紀數學家們提出的問題及任務，導致了公理方法的系統發展和代數基本結構的深入研究。因此，伽羅瓦是近世代數學的創始人。

伽羅瓦在數學上做出了巨大的貢獻，他在數學觀、認識論方面也有不少獨立的見解。他認爲科學是人類精神的產物，與其說是用來認識和發現眞理，不如說是用來研究和探索眞理。科學作爲人類的事業，它始於任何一個抓住它的不足並重新整理它的人。伽羅瓦指出：“科學通過一系列的結合而得到進展，在這些結合中，機會起著不小的作用，科學的生命是無原由的、沒有計劃的 (盲目的)，就像交錯生長的礦物一樣。” 在數學中，正像在所有的科學中一樣，每個時代都會以某種方式提出當時存在的若干問題，其中有一些迫切的問題，它們把最聰慧的學者吸引在一起，這既不以任何個人的思想和意識爲轉移，也不受任何協議的支配。伽羅瓦向往著科學家之間的眞誠合作，認爲科學家不應比其餘的人孤獨，他們也屬於特定時代，遲早要協同合作的。

伽羅瓦的奠基性的工作及其思想中孕育的開創精神，並未得到他同時代人的充分賞識和理解，其原因不是人爲的偏見，而是當時人們認識上的不足。直到伽羅瓦去世十四年後的 1846 年，劉維爾編輯出版了他的部分文章；1866 年，J.A. 塞瑞特 (Serret) 出版的《高等代數教程》(第三版) (*Cours d’algébre superieure*)，澄

清了伽羅瓦關於代數方程可解性理論的思想，建立了置換理論；1870 年，C. 喬丹 (Jordan) 出版的《置換和代數方程專論》(*Traité des substitutions et des équations algébriques*)，全面介紹了伽羅瓦的理論。從此，群論和伽羅瓦的全部工作才眞正被歸入數學的主流。伽羅瓦的理論導致了抽象代數學的興起。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Galois, *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, Journal de Mathématiques pures et Appliquées, XI (1846), 381 − 444。

[2] E. Galois, *Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, 1897

[3] E. Galois, *Manuscripts de Evariste Galois*, Paris, 1908。

[4] E. Galois, *Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois*, Paris, 1962。

[5] E. Galois, *Analyse d'un mémoire sur la résolution algébrique des équations*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830。

[6] E. Galois, *Note sur la résolution des équations numériques*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830

[7] E. Galois, *Sur la théorie des nombres*, 見 *Bulletin des sciences mathématiques de M. Férussac*, XIII, 1830。

[8] E. Galois, *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux (Dated* 6 *January* 1831*)*, Ed. J. Liouville, 1846, 見文獻 [1], 417 − 433。

[9] E. Galois, *Des équations primitives qui sont solubles par radicaux Ed. J. Liouville*, 1846, 見文獻 [1], 434 − 444。

研究文獻

[10] R. Taton, *Galois, Evariste*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 5, 1972, 259 − 264 (中譯本：伽羅瓦傳，數學譯林，2 (1983)，4，67 − 72)。

[11] B.L. Vander Waerden, *A history of algebra*, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Springer–Verlag, 1985。

[12] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。

[13] B.M. Kiernan, *The development of Galois theory from Lagrange to Artin*, Archive for History of Exact Science, 8 (1971), 41－154

[14] H. Wussing, *Die genesis des abstrakten gruppenbegriffes*, VEB Deutsher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969 (英譯本： The genesis of the abstract group concept, The MIT Press, 1984)。

[15] H.M. Edwards, *Galois theory*, Beijing China, 1984。

[16] L. Novy, *Origins of modern algebra*, The Netherlands, 1973。

[17] T. Rothman, *Genius and biographers： The fictionalization of Evariste Galois*, The American Mathematical Monthly, 89 (1982), 84－106。

[18] A. Dalmas, *Evariste Galois, révolutionaire et géométre*, Paris, 1956 (中譯本： A. 達爾瑪， 伽羅瓦傳， 商務印書館， 1981)