布 爾

布爾， G. (Boole， George) 1815 年 11 月 2 日生於英國林肯 (Lincoln)； 1864 年 12 月 8 日卒於愛爾蘭科克 (Cork)。數學、 邏輯學 。

布爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Boole.html

布　爾

張　錦　文　　　　　　李　娜
(中國科學院軟件研究所)　　　　　(河南大學)

布爾， G. (Boole， George) 1815 年 11 月 2 日生於英國林肯 (Lincoln)； 1864 年 12 月 8 日卒於愛爾蘭科克 (Cork)。
數學、 邏輯學。

布爾的父親是一位鞋匠。 布爾青少年時期， 在當地上了小學和短時間的商業學校。 他自學了希臘語和拉丁語， 後來又學會歐洲幾個國家的語言。 從商業學校畢業後， 布爾原想做一名牧師， 但由於生活所迫， 他在十六歲那年接受了中學教師的職務。 1831－1835 年， 先後在唐卡斯特和瓦丁頓的一些中學教書。 就在這個時期， 他對數學產生了深厚的興趣， 並決定繼續自學數學。 1835 年， 他在林肯市創辦了一所中學， 仍是一面教書， 一面自修高等數學。 他先後攻讀了著名科學家 I. 牛頓 (Newton) 的《自然哲學的數學原理》(*Philosophiae naturalis principia mathematica*) 和 J. 拉格朗日 (Lagrange) 的《解析函數論》(*Théorie des function analytiques*)。 1835 年發表了他的第一篇科學論文 “論牛頓”(*On Newton*)。 二十一歲時， 他就精通 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的《天體力學》(*Mécanique céleste*)， 這在當時被認爲是最深奧的學問。 這一事實足以證明他自學取得的成功。

1839 年， 二十四歲的布爾決心嘗試受正規教育， 並且申請進入劍橋大學。 當時《劍橋大學期刊》(*Cambridge Mathematical Journal*， 布爾曾投稿的雜誌) 的主編 D.F. 格雷戈里 (Gregory) 表示反對他去上大學， 他說： “如果你爲了一個學位而決定上大學學習， 那麼你就必須準備忍受大量不適合於習慣獨立思考的人的思想戒律。 這裡， 一個高級的學位要求在指定的課程上花費的辛勤勞

動與才能訓練方面花費的勞動同樣多。 如果一個人不能把自己的全部精力集中於學位考試的訓練， 那麼在學業結束時， 他很可能發現自己被淘汰了。”

於是， 布爾放棄了受高等教育的念頭， 而潛心致力於他自己的數學研究。 他寫了許多論文， 其中包括線性變換方面的某種開拓性的工作 [這一工作爲後來的 A. 凱萊 (Cayley) 和 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 所發展]。 布爾的主要貢獻在於利用代數的方法來研究推理、 證明等邏輯問題。 因而形成了代數學的一個獨立的分支， 它爲邏輯學的研究奠定了數學基礎。 從這一基礎出發就發展出了布爾代數。 1844 年， 他發表了著名的論文 “關於分析中的一個普遍方法”(*On a general method in analysis*)， 因此獲皇家學會的獎章。

1849 年， 三十四歲的布爾分別獲得牛津大學和都柏林大學的名譽博士學位。 隨即被聘爲愛爾蘭科克皇后學院 (今愛爾蘭大學) 的數學教授。 從此， 他才有了比較安穩的生活保證。 他保持這個職位一直到十五年後患病逝世爲止。 在此期間， 他於 1857 年被推選爲倫敦皇家學會會員。

1855 年， 布爾和 G. 愛維累斯特 (Iwirester) 爵士的姪女瑪麗•愛維累斯特 (Mary Iwirester) 結婚。 他們的長女瑪麗嫁給數學家 C.H. 欣頓 (Hinton)， 三個外孫都有科學建樹。 另一個女兒艾麗西亞 (Alicia) 在四維幾何方面的研究中取得成果， 以後又與數學家 H.S.M. 考克斯特 (Coxeter) 合作。 第四個女兒露西 (Lucy) 成爲英國在大學擔任化學教授的第一個婦女。 布爾最小的女兒 E. 莉蓮 (Lillian)， 便是暢銷的小說《牛虻》的作者 E.L. 伏尼契 (Voynich)。

1864 年 12 月 8 日， 布爾因患肺炎 (這是由於他堅持上課， 在 11 月的冷雨中步行三公里而受涼引起的)， 不幸於愛爾蘭的科克去世， 終年五十九歲。

布爾被 B. 羅素 (Russell) 描寫成純粹數學的發現者。 布爾的名字被用來作爲表示某種數學體系的形容詞 (甚至是不用大寫字母的)。 然而， 這並沒有使布爾的名字眞正家喻戶曉， 它只是少數人給予的一種榮譽稱號。

布爾的研究大致可分爲邏輯和數學兩部分。 他在數學上的成就是多方面的。 但在邏輯方面， 他的主要貢獻就是用一套符號來進行邏輯演算， 即邏輯的數學化。 大約二百年以前， G.W. 萊布尼茨 (Leibniz) 曾經探索過這一問題， 但最終沒有找到精確有效的表示方法。 因爲它牽涉到改進亞里士多德 (Aristotle) 的工作， 而人們對於改進亞里士多德的工作的嘗試總有點猶豫不決。 布爾憑著他卓越的才幹， 創造了邏輯代數系統， 從而基本上完成了邏輯的演算工作。 1847 年， 他出版了這方面的第一本書《邏輯的數學分析， 論演繹推理的演算法》(*The mathematical analysis of logic， being an essay towards a calculus of deductive reasoning*)， 此書並不厚， 但足以使他出名， 並且使科克的學院聘他任敎。 1854 年， 他又出版了《思想規律的研究， 作爲邏輯與概率的數學理論的基礎》(*An investigation into the laws of thought， on which are founded the mathematical theories of logic and probability*) 一書， 其中完滿地討論了這個主題並奠定了現在所謂的數理邏輯的基礎。 爲這一學科的發展鋪平了道路。

對於邏輯代數， 布爾方法則是著重於外延邏輯 (extensional logic)， 即類 (class) 的邏輯， 其中類或集合用 x、 y、 z、 $\cdots$ 表示， 而符號 X、 Y、 Z、 $\cdots$ 則代表個體元素。 用 1 表示萬有類， 用 0 表示空類或零類。 他用 xy 表示兩個集合的交集 [他稱這個運算爲選拔 (election)]， 即 x 與 y 所有共同元素的集合； 還用 $x+y$ 表示 x 中和 y 中所有元素的集合。 [嚴格地講， 對於布爾， 加法只用於不相交的集合。 後來， 由 W.S. 傑文斯 (Jevons) 推廣了這個概念。] 至於 x 的補 x'， 記作 $1-x$。 更一般地， $x-y$ 是

由不是 y 的那些 x 所組成的類。 包含關係， 即 x 包含在 y 中， 他寫成 $xy = x$。 等號 $=$ 表示兩個類的同一性。

布爾相信， 頭腦會立刻允許我們作一些初等的推理規程， 這就是邏輯的公理。 例如， 矛盾律， 即 A 不能既是 B 又是非 B， 這就是公理。 它可以表示爲

$$x(1-x) = 0\text{。}$$

對於頭腦， 下列關係也是顯然的：

$$xy = yx\text{，}$$

因而交集的這個交換性是另一條公理。 同樣明顯的是性質

$$xx = x\text{。}$$

這條公理違背了通常的代數。 布爾認爲可作爲公理的還有

$$x + y = y + x$$

和

$$x(u + v) = xu + xv\text{。}$$

用這些公理可以把排中律說成

$$x + (1 - x) = 1\text{，}$$

就是說， 任何東西不是 x 就是非 x。 布爾還把所有 X 都是 Y 表示成 $x(1-y) = 0$。 所有 Z 都是 X 表示成 $z(1-x) = 0$， 然後， 他使用自己的展開方法消去 x， 解方程得 $z(1-y) = 0$。 它的含義是： 所有 Z 都是 Y。 這樣， 布爾就用他的純代數方法， 取消了三段論前兩個前提的中項， 得出三段論的結論。 另外， 沒有 X 是 Y 可寫成 $xy = 0$； 有些 X 是 Y 表成 $xy \neq 0$； 而有些 X 不是 Y 表成

$$x(1-y) \neq 0\text{。}$$

布爾試圖從這些公理出發， 用公理所許可的規程去導出推理的規律。 作爲平凡的結論， 他有 $1 \cdot x = x$ 和 $0 \cdot x = 0$。 後來， 經德國數學家 E. 施勒德 (Schröder) 的進一步發展和美國數學家 E. 亨廷頓 (Huntington) 的深入研究， 給出了布爾代數的公理化方法的定

義：

(1) 如果 x 和 y 都屬於類 B， 那麼 $x+y$、 xy 和 x' 均屬於 B；

(2) 在所有的元素中存在一個元素 0， 使得對於每一個 x 都有 $x+0=x$； 存在一個元素 1， 使得對每個 x 都有 $x\cdot 1=x$；

(3) $x+y=y+x$、 $x\cdot y=y\cdot x$；

(4) $x+(y\cdot z)=(x+y)(x+z)$、 $x(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$；

(5) 對於每一個元素 x， 存在一個元素 x'， 使得 $x+x'=1$ 並且 $xx'=0$；

(6) 在類 B 中至少存在兩個不同的元素， 滿足上述六個條件的 $< B,\ +,\ \cdot,\ -,\ 0,\ 1 >$爲一個布爾代數。

布爾不僅構造了邏輯代數系統， 而且十分明白地對系統作了邏輯解釋。 他認爲通過分析可以看清楚， 一個系統可作多種解釋， 並不影響所涉及的關係的眞實性。 所以， 對於他的邏輯代數系統， 他給出了兩種解釋： 一種是類演算， 一種是命題演算。 在類演算裡， 他用符號 1 和 0 表示全類和空類。 這些符號最初來自他的概率論－他的第二本書的一個獨立部分。 在概率論中， 1 表示任何事件出現的所有概率之和， 0 表示不可能性。 他還將乘和加分別看作合取和析取， 並論證了它們也滿足前面的公理。 在命題演算的解釋中， 他令 X、 Y、 Z 等代表命題， 並假定命題只能接受眞、 假兩種可能情況。1 表示眞， 0 表示假， XY 表示 X 與 Y 的合取， 即 “X 並且 Y”； $X+Y$ 表示不相容的析取， 即 “X 或 Y， 但不同眞”； $1-Y$ 表示 Y 的否定。 根據這種解釋， X 爲眞記作 $X=1$， X 爲假記作 $X=0$。 如果 X 眞則 Y 假記作 $X(1-Y)=0$， X 眞且 Y 眞記作 $XY=1$。 因此， 複合命題的眞假就可以通過布爾演算由它的支命題的眞假唯一決定。 這就是現在使用的眞值表示方法。 用這種方法， 使數學家、 邏輯學家對邏輯有更廣泛更全面的理解。 美國數學家 E.T. 貝爾 (Bell) 對此評論說：“布爾割下了邏輯學這條泥鰍的頭， 使它固定， 不能再游來

滑去。”

布爾提出的類演算和命題演算的區別在於，在類演算中，X、Y、Z 等可以取任一類 (包括 0 和 1) 爲值；而命題演算中，X、Y、Z 等只能取 0 和 1 兩個值。因此，命題演算系統可以看作二值代數系統。

布爾除了把他的邏輯代數應用到概率以外，並沒有進一步發展他的代數理論。相反地，他卻在其它數學分支方面工作。他對代數幾何學、微分方程、概率論、拓撲學和控制系統的研究都有所建樹，當代數學不少研究課題溯源於他的工作。例如：

(1) 布爾空間。若令 L 是一個具有有限高度的布爾代數，X 爲 L 的全體極大理想集，$a \in L$ 且 $O(a) = (m|\ m \in X$，$a \notin m)$，取 $\{O(a)|\ a \in L\}$ 作爲基底，在 X 中定義拓撲，則 X 是緊的完全的不連通的 T_1 空間，而 $O(a)$ 爲 X 中的緊開集，那麼這樣的空間叫布爾空間。

(2) 布爾函數。一個從集 $B_2^n = \{0,\ 1\}^n$ 到 $B_2 = \{0,\ 1\}$ 的映射 f 叫 n 元布爾函數。如果令 α_1、$\cdots$、$\alpha_n \in \{0,\ 1\}$，則 $A = (\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ 稱爲 $0-1$ 向量；若 x_1、$\cdots$、$x_n \in B$ (B 是一個布爾代數)，則 $X = (x_1,\ \cdots,\ x_n) = x_1 \cdots x_n$ 稱爲布爾向量。令 $x^1 = x$、$x^0 = x'$，記 $X^A = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$，於是布爾函數可表爲 $f(X) = \sum{}^A f(A) X^A$，當 $f(A) \equiv 1$ 時，$f(x)$ 稱爲簡單布爾函數。

(3) 布爾方程。若 $f_1(X)$ 和 $f_2(X)$ 是簡單布爾函數，則 $f_1(X) = 0$ 及 $f_2(X) = 1$ 稱爲簡單布爾 $0-1$ 方程。

(4) 布爾差分。令 $f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ 爲布爾函數，稱如下的“異或運算”爲 f 關於變量 x_i 的布爾差分：

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx_i} &= f(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n) \\ &\qquad \bigoplus f(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_i',\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n)。 \end{aligned}$$

另外， 布爾展開式和布爾核整則點也是人所共知的。

布爾一生共發表了五十篇學術論文和兩部教科書， 其中主要是 “論牛頓”(1835) 和《邏輯的數學分析， 論演繹推理的演算法》(1847)， 後者是在哲學家 W. 哈密頓 (Hamilton) 與布爾的朋友 A. 德摩根 (De Morgan) 的論爭刺激下完成的。 著名的現代邏輯史家 I.M. 波亨斯基 (Bochenski) 對此書有過評價：“我們能夠在布爾時代的著作《邏輯的數學分析》中找到一種示範形式展開的清晰表達， 這方面他優於許多後人的著作， 其中包括羅素的《數學原理》(*Principia mathematica*)。” 此外， 布爾還著有《差分方程》(*Difference equation*)(1859) 和《有限差計算》(*Finite difference calculus*)(1860) 等。

布爾以自學取得成就而著稱於世， 成爲十九世紀數理邏輯的最傑出代表。 以他的名字命名的布爾代數今天已發展爲結構極爲豐富的代數理論， 並且無論在理論方面還是在實際應用方面都顯示出它的重要價值。 特別是近幾十年來， 布爾代數在自動化系統和計算機科學中已被廣泛應用。

文　　獻

原始文獻

[1] G. Boole, *Collected logical words I, II*, Open Court, 1916。

研究文獻

[2] R.L. 古德斯坦因， 布爾代數， 科學出版社， 1978。
[3] P.D. 庫克， 現代數學史， 內蒙古人民出版社， 1982。
[4] 朱水林， 形式化： 現代邏輯的發展， 人民出版社， 1987。
[5] 廖祖偉、張錦文， 邏輯代數， 科學出版社， 1984。
[6] 吳海林， 世界科學家辭典， 黑龍江科學技術出版社， 1990。
[7] I. 阿西摩夫， 古今科技辭典， 科學出版社， 1988。
[8] 曾少潛， 世界著名科學家， 科學技術文獻出版社， 1982。

[9] H.G. Flegg, *Boolean algebra and its application*, Blackie, 1964
[10] P.R. Halmos, *Lectures on Boolean algebra*, van Nostrand, 1963
[11] R. Sikorski, *Boolean algebra*, Erg. d. Math., Springer, 2nd edt., 1964。
[12] M.H. Stone, *The theory of representation for Boolean algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., 40 (1936), 37－111。