切 比 雪 夫

切比雪夫， П. Л. (Чебышев， Пафнутий Львович， 英文譯名 Pafnuty Lvovich Chebyshev) 1821 年 5 月 16 日生於俄國卡盧加 (Kaluga)； 1894 年 12 月 8 日卒於聖彼得堡 (St. Petersburg)。 數學。

切比雪夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Chebyshev.html`

切 比 雪 夫

劉 鈍
(中國科學院自然科學史研究所)

蘇 淳
(中國科學技術大學)

切比雪夫， П. Л. (Чебышев， Пафнутий Львович， 英文譯名 Pafnuty Lvovich Chebyshev) 1821 年 5 月 16 日生於俄國卡盧加 (Kaluga)； 1894 年 12 月 8 日卒於聖彼得堡 (St. Petersburg)。 數學。

帕夫努季・利沃維奇・切比雪夫出身於貴族家庭。 他的祖輩中有許多人立過戰功。 父親列夫・帕夫洛維奇・切比雪夫 (Лев Павлович Чебышев) 參加過抵抗拿破侖 (Napoleon) 入侵的衛國戰爭， 母親阿格拉費娜・伊萬諾夫娜・切比雪娃 (Аграфена Ивановна Чебышева) 也出身名門， 他們共生育了五男四女， 切比雪夫排第二。 他的一個弟弟弗拉季米爾・利沃維奇・切比雪夫 (Владимир Львович Чебышев) 後來成爲砲兵將軍和聖彼得堡砲兵科學院的教授， 在機械製造與微震動理論方面頗有建樹。

切比雪夫的左脚生來有殘疾， 因而童年時代他經常獨坐家中， 養成了在孤寂中思索的習慣。 他有一個富有同情心的表姐， 當其餘的孩子們在莊園裡嬉戲時， 表姐就教他唱歌 、 讀法文和做算術。 一直到臨終， 切比雪夫都把這位表姐的相片珍藏在身邊。

1832 年， 切比雪夫全家遷往莫斯科。 而爲了孩子們的教育， 父母請到了一位相當出色的家庭教師 П. Н. 波戈列日斯基 (Погорелский)， 他是當時莫斯科最有名的私人教師和幾本流行的初等數學教科書的作者。 切比雪夫從家庭教師那裡學到了很多東西， 並對數學產生了強烈的興趣。 他對歐幾里得 (Euclid)《 原本 》(*Elements*) 當中關於沒有最大質數的證明留下了極深刻的印象。

1837 年， 年方十六歲的切比雪夫進入莫斯科大學， 成爲哲學

系下屬的物理數學專業的學生。在大學階段，摩拉維亞出生的數學家 Н. Д. 布拉什曼 (Брашман) 對他有較大的影響。1865 年 9 月 30 日切比雪夫曾在莫斯科數學會上宣讀了一封信，信中把自己應用連分數理論於級數展開式的工作歸因於布拉什曼的啓發。在大學的最後一個學年，切比雪夫遞交了一篇題爲 “方程根的計算” (Вычисление корней уравнений，1841) 的論文，在其中提出了一種建立在反函數的級數展開式基礎之上的方程近似解法，因此獲得該年度系裡頒發的銀質獎章。

大學畢業之後，切比雪夫一面在莫斯科大學當助教，一面攻讀碩士學位。大約在此同時，他們家在卡盧加省的莊園因爲災荒而破產了。切比雪夫不僅失去了父母方面的經濟支持，而且還要負擔兩個未成年的弟弟的部分教育費用。1843 年，切比雪夫通過了碩士課程的考試。並在 J. 劉維爾 (Liouville) 的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal des methématiques pures et appliquées*) 上發表了一篇關於多重積分的文章。1844 年，他又在 L. 克列爾 (Crelle) 的同名雜誌 (*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*) 上發表了一篇討論泰勒級數收斂性的文章。1845 年，他完成了碩士論文 “試論概率論的基礎分析”(Опыт елементарного анализа теории вероятностей，1845)，於次年夏天通過了答辯。

1846 年，切比雪夫接受了聖彼得堡大學的助教職務，從此開始了在這所大學教書與研究的生涯。他的數學才幹很快就得到在這裡工作的 В. Я. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский) 和 М. В. 奧斯特羅格拉茨基 (Остроградский) 這兩位數學前輩的賞識。1847 年春天，在題爲 “關於用對數積分”(Об интегрировании с помощью логарифмов，1847) 的晉職報告中，切比雪夫徹底解決了奧斯特羅格拉茨基不久前才提出的一類代數無理函數的積分問題，他因此被提升爲高等代數與數論講師。他在文章中提出的一個關於二項微分式積分的方法，今天可以在任何一本微積分教程之

中找到。1849 年 5 月 27 日，他的博士論文“論同餘式” (Теория сравнений，1849) 在聖彼得堡大學通過了答辯。數天之後，他被告知榮獲聖彼得堡科學院的最高數學榮譽獎。切比雪夫於 1850 年升爲副教授，1860 年升爲教授。1872 年，在他到聖彼得堡大學任教二十五周年之際，學校授予他功勳教授的稱號。1882 年，切比雪夫在聖彼得堡大學執教三十五年之後光榮退休。

三十五年間，切比雪夫教過數論、高等代數、積分運算、橢圓函數、有限差分、概率論、分析力學、傅里葉級數、函數逼近論、工程機械學等十餘門課程。他的講課深受學生們歡迎。A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 評論道：“他的課程是精練的，他不注重知識的數量，而是熱衷於向學生闡明一些最重要的觀念。他的講解是生動的、富有吸引力的，總是充滿了對問題和科學方法之重要意義的奇妙評論。”

1853 年，切比雪夫被選爲聖彼得堡科學院候補院士，同時兼任應用數學部主席。1856 年成爲副院士，1859 年成爲院士。切比雪夫曾先後六次出國考察或進行學術交流。他與法國數學界聯繫甚爲密切，曾三次赴巴黎出席法國科學院的年會。他於 1860 年、1871 年與 1873 年分別當選爲法蘭西科學院、柏林皇家科學院的通訊院士與義大利波隆那科學院的院士，1877 年、1880 年、1893 年分別成爲倫敦皇家學會、義大利皇家科學院與瑞典皇家科學院的外籍成員。同時他也是全俄羅斯所有大學的榮譽成員、全俄中等教育改革委員會的成員和聖彼得堡砲兵科學院的榮譽院士。他還是聖彼得堡和莫斯科兩地數學會的熱心支持者。他發起召開的全俄自然科學家和醫生代表大會對於科學界之間的相互了解與科學在民衆中的影響起到了很大的作用。

十九世紀以前，俄國的數學是相當落後的。在彼得大帝去世那年建立起來的科學院中，早期數學方面的院士都是外國人，其中著名的有 L. 歐拉 (Euler)、尼古拉•伯努利 (Bernoulli，Nikolaus

III)、 丹尼爾•伯努利 (Bernoulli， Daniel) 和 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 等。 俄羅斯沒有自己的數學家， 沒有大學， 甚至沒有一部像樣的初等數學教科書。 十九世紀上半葉， 俄國才開始出現了像 H. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский)、 布尼亞科夫斯基和奧斯特羅拉格茨基這樣優秀的數學家； 但是除了羅巴切夫斯基之外， 他們中的大多數人都是在外國 (特別是法國) 接受訓練的， 而且他們的成果在當時還不足以引起西歐同行們的充分重視。 切比雪夫就是在這種歷史背景下從事他的數學創造的。 他不僅是土生土長的學者， 而且以他自己的卓越才能和獨特的魅力吸引了一批年輕的俄國數學家， 形成了一個具有鮮明風格的數學學派， 從而使俄羅斯數學擺脫了落後境地而開始走向世界前列。 切比雪夫是聖彼得堡數學學派的奠基人和當之無愧的領袖。 他在概率論、 解析數論和函數逼近論領域的開創性工作從根本上改變了法國、 德國等傳統數學大國的數學家們對俄國數學的看法。

切比雪夫是在概率論門庭冷落的年代從事這門學問的。 他一開始就抓住了古典概率論中具有基本意義的問題， 即那些 “幾乎一定要發生的事件” 的規律 − 大數定律。 歷史上的第一個大數定律是由雅格布•伯努利 (Bernoulli， Jacob I) 提出來的， 後來 S-D. B. 泊松 (Poisson) 又提出了一個條件更寬的陳述， 除此之外在這方面沒有什麼進展。 相反， 由於有些數學家過份強調概率論在倫理科學中的作用甚至企圖以此來闡明 “隱蔽著的神的秩序”， 又加上理論工具的不充分和古典概率定義自身的缺陷， 當時歐洲一些正統的數學家往往把它排除在精密科學之外。

1845 年， 切比雪夫在其碩士論文中藉助十分初等的工具 − $\ln(1+x)$ 麥克勞林展開式， 對雅格布•伯努利大數定律作了精細的分析和嚴格的證明。 一年之後， 他又在克列爾的雜誌上發表了 “概率論中基本定理的初步證明”(*Démonstration èlèmentaire d’une proposition génerale de la théorie des probabilités*， 1846) 一

文， 文中繼而給出了泊松形式的大數定律的證明。 1866 年， 切比雪夫發表了 “論平均數” (О средних величинах， 1866)， 進一步討論了作爲大數定律極限值的平均數問題。 1887 年， 他發表了更爲重要的 “關於概率的兩個定理”(О двух теоремах относительно вероятностей， 1887)， 開始對隨機變量和收斂到正態分佈的條件， 即中心極限定理進行討論。

在這一系列的研究中， 切比雪夫首先引出並提倡使用的隨機變量的概念， 後來成了概率論與數理統計當中最重要的概念。 他創造的 “矩方法” 可以解決許多困難的極限估值問題， 直到今天仍被廣泛應用。 導致產生這一方法的， 是他在 1882 年建立的一個著名不等式： 若 ξ 是一個隨機變量， a 是其平均數， σ 是 $|\xi-a|^2$ 的平均數， 則對於任何正數 k， 使 $|\xi-a|\geq k\sigma$ 成立的概率不超過 $\dfrac{1}{k^2}$， 這就是切比雪夫不等式。 這一關係後來成了一系列更爲精確地估計概率的工作的先導。 他在中心極限定理的研究中提出了估計收斂速度的猜想， 即在一定條件下， 有可能按照 $n^{-\frac{1}{2}}$ (n 爲項數) 的方冪漸近展開獨立隨機變量和的分佈函數。 這一猜想完全被後來的研究所證實並影響到本世紀對收斂速度的均勻估計和分佈函數的漸近展開研究。

切比雪夫引出的一系列概念和研究題材爲俄國以及後來蘇聯的數學家繼承和發展。 A. A. 馬爾科夫 (Марков) 對 “矩方法” 作了補充， 圓滿地解決了隨機變量的和按正態收斂的條件問題。 李雅普諾夫則發展了特徵函數方法， 從而引起中心極限定理研究向現代化方向上的轉變。 以二十世紀三十年代 A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров) 建立概率論的公理體系爲標誌， 蘇聯在這一領域取得了無可爭辯的領先地位。 近代極限理論 − 無窮可分分佈律的研究也經 C. H. 伯恩斯坦 (Бернштейи)、 A. Я. 辛欽 (Хинчин) 等人之手而臻於完善， 成爲切比雪夫所開拓的古典極限理論在

二十世紀抽枝發芽的繁茂大樹。關於切比雪夫在概率論中所引進的方法論變革的偉大意義，蘇聯著名數學家柯爾莫哥洛夫在 "俄羅斯概率科學的發展" (Роль русской науки в развитии теории вероятностей，ИБИД，стр.，53 – 64) 一文中寫道："從方法論的觀點來看，切比雪夫所帶來的的根本變革的主要意義不在於他是第一個在極限理論中堅持絕對精確的數學家 (A. 棣莫弗 (de Moivre)、P-S. 拉普拉斯 (Laplace) 和泊松的證明與形式邏輯的背景是不協調的，他們不同於雅格布•伯努利，後者用詳盡的算術精確性證明了他的極限定理)，切比雪夫的工作的主要意義在於他總是渴望從極限規律中精確地估計任何次試驗中的可能偏差並以有效的不等式表達出來。此外，切比雪夫是清楚地預見到諸如 '隨機變量' 及其 '期望 (平均) 值' 等概念的價值，並將它們加以應用的第一個人。這些概念在他之前就有了，它們可以從 '事件' 和 '概率' 這樣的基本概念導出，但是隨機變量及其期望值是能夠帶來更合適與更靈活的算法的課題。"

切比雪夫對解析數論的研究集中在他初到聖彼得堡大學任教的頭四年內，當時他正擔任著高等代數與數論的講師，同時兼任歐拉選集數論部分的編輯；後一任命是布尼亞科夫斯基向聖彼得堡科學院推薦的。1849 年，歐拉選集的數論部分 (*L. Euleri commentationes arithmeticae collectae*，1849) 在聖彼得堡正式出版了。切比雪夫爲此付出了巨大的心血，同時他也從歐拉的著作中體會到了深邃的思想和靈活的技巧結合在一起的魅力，特別是歐拉所引入的 ξ 函數及用它對質數無窮這一古老命題所作的奇妙證明，吸引他進一步探索質數分佈的規律。

質數分佈的規律是數論中的基本問題，自歐幾里得以來許多大數學家都爲此絞盡腦汁而沒有獲得什麼實質性的進展。如果以 $\pi(x)$ 表示不大於 x 的質數的個數，所謂質數分佈問題就是要找出一個用 x 來表示的 $\pi(x)$ 的公式。法國數學家 A.M. 勒讓德 (Legendre) 和

德國數學家 C.F. 高斯 (Gauss) 分別研究過 400000 和 3000000 以內的質數表， 前者認爲

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - A}(A = 1.08366)，$$

後者斷言 $\pi(x)$ 與 $\int_2^x \frac{dx}{\ln x}$ 的差非常小， 他們又猜測 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$， 這一猜測就是著名的質數定理。

在德國， 當時正由 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、 稍後又由 B. 黎曼 (Riemann) 倡導著一場革新數論研究方法的運動， 他們應用數學分析爲工具來考察這一古老的學科， 在許多重要問題上獲得長足進步。 其實這種思想在歐拉的著作中就已現端倪，ξ 函數正是分析學中的一個結果， 兼具分析之長和諳熟歐拉思想的切比雪夫自然就成了這場方法論革新運動在俄國的呼應者。

他的博士論文極大地推進了質數定理的研究， 即在假定 $\frac{\pi(x)}{x/\ln x}$ 極限存在的前提下證明了 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$ (存在性的問題是半個世紀後才由法國數學家 J. 阿達瑪 (Hadamard) 最終解決的)。 這篇寫成於 1849 年的論文可以說是質數分佈規律研究的一個里程碑， 它後來在 1879 年和 1901 年兩度在聖彼得堡印刷； 並被相繼翻譯成德文 (*Theorie der Congruenzen*， 1888) 和義大利文 (*Theoria delle congruenze*， 1895) 而分別在柏林和羅馬出版。 在博士論文的基礎上， 他又於當年用法文撰寫了 "確定小於某個數的全部質數之數目的函數" (*Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers in fèrieurs á une limite donnée*， 1849)， 其中用實數域的 ζ 函數證明了勒讓德公式中的最佳逼近值 A 不是 1.08366 而是 1， 並對可使勒讓德表達式與高斯表達式同時適用的 x 值的下限進

行了估計， 即當 $x > 1247689$ 時， $\dfrac{x}{\ln x - 1.08366}$ 與 $\int_2^x \dfrac{dx}{\ln x}$ 的差可以忽略不計。

第二年， 切比雪夫又向科學院提交了另一篇重要的論文 "論質數" *(Mèmoire sur les nombres premiers*， 1850)， 其中給出了精確的估計式 $0.92129\cdots < \dfrac{\pi(x)}{x/\ln x} < 1.10555\cdots$。 他又引入了今日被稱爲切比雪夫函數的 $\Theta(x) = \sum\limits_{p\le x} \ln p$ 和 $\Phi(x) = \sum\limits_{n\le x} \Lambda(n)$， 它們在數論中有重要的用途。 除此之外， 他在該文中還附帶地解決了法國數學家 J. 貝特朗 (Bertrand) 提出的關於質數分佈規律的又一個猜測： 對於任何一個大於 $\dfrac{7}{2}$ 的數 x 來說， 在 x 與 $2x-2$ 之間至少存在著一個質數。

切比雪夫關於函數逼近論的創造性構想孕育在 1852 年， 當時他接受了科學院的一項使命到西歐進行數學與技術的綜合考察。 在大約半年的時間裡， 他參觀了許多著名的工廠和博物館， 同時與西歐的數學家進行了數學交流。 C. 埃爾米特 (Hermite) 爲首的法蘭西學派在函數論方面的工作給他留下了特別深刻的印象。 切比雪夫就向科學院提交了題爲 "涉及平行四邊形的機械原理" (*Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*， 1854) 的研究報告， 這是他在函數逼近論領域的第一篇論文。

函數逼近論的思想來源於機器設計： 假定按照理想設計的機器依曲線 $f(x)$ 運動， 而實際製造出來的機器運動的軌跡是 $g(x)$ (這種情況是常見的， 就像瓦特平行四邊形只能近似地將圓周運動轉換成直線運動一樣)； 再假定全部零件的參數 a_1 、 a_2 、 $\cdots$ 、 a_n 完全確定了機器， 切比雪夫提出用 $\max\limits_x |f(x) - g(x,\, a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n)|$ 作爲衡量設計的尺度， 顯然它是參數 a_i 的函數； 函數逼近論的中心問題就是要尋找使這一函數達到最小值的一組參數。 如果上述曲

線 $g(x)$ 由一個多項式來表示，那麼使設計標尺達到最小值的 $g(x)$ 就叫最佳逼近多項式，在這篇論文中，切比雪夫證明了最佳逼近多項式的一系列性質，引入了切比雪夫交錯組和符號判別法，證明了具有切比雪夫交錯組的多項式就是最佳逼近多項式。特別地，他找到與零偏差最小的多項式 $T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)$，即在區間 $(-1,\ 1)$ 上，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\cdot\arccos x)=x^n-\frac{n}{1!}\cdot\frac{x^{n-2}}{2^2}\\ &\quad+\frac{n(n-3)}{2!}\cdot\frac{x^{n-4}}{2^4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\frac{x^{n-6}}{2^6}+\cdots\end{aligned}$$

與零的最大偏差爲 2^{1-n}。

在下一篇論文“函數近似逼近的最小值問題” (*Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions*，1859) 中，切比雪夫把問題推廣到一般的函數 $g(x,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ 之上，並就 g 爲實函數的兩個具體例子給出了詳細的分析，還附帶地得到了幾個關於確定代數方程實根範圍的判定定理。

在函數逼近論的研究中，切比雪夫創造了許多新的概念和方法。爲了紀念他的奠基性工作，後人把 $T_n(x)$ 叫做切比雪夫多項式，把最佳均勻逼近叫作切比雪夫逼近，把若干函數逼近論的定理叫作切比雪夫逼近定理。他還研究了平方逼近、三角逼近和有理函數逼近等不同的課題。除此之外，他的工作與數學其它分支也有著廣泛的聯繫，引導出一些富有價值的成果。例如在論文“積分的極值” (*Sur les valeurs limites des intégrales*，1874) 中，切比雪夫考察了矩問題，即對於區間 $(A,\ B)$ 上正的未知函數 $f(x)$，已知其各階矩

$$\int_A^B f(x)dx=c_0、\ \int_A^B xf(x)dx=C_1、\ \cdots、$$

$$\int_A^B x^m f(x)dx = C_m，$$

要求對積分 $\int_a^b f(x)(A < a < b < B)$ 的範圍給出一個精確的估計。在論文 “論積分” (*Sur les quadratures*，1874) 中，切比雪夫運用函數逼近論，發展了埃爾米特提出的一種定積分的近似計算法。數十年內，切比雪夫在函數逼近論領域碩果累累，這些成果又與正交理論、多項式論、矩陣論、內揷法、近似積分、誤差理論，最小二乘法以及概率論等內容密切聯繫，極大地豐富了十九世紀數學分析的內容。

這一開拓性的工作很快引起了世人的注意。德國數學家 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)、R. 李普希茨 (Lipschitz) 及切比雪夫的學生 A. H. 科爾金 (Коркин)、E. И. 佐洛塔廖夫 (Золотарёв) 等人相繼爲函數逼近論做出了貢獻。進入二十世紀以來，法國數學家 E. 波萊爾 (Borel) 和蘇聯數學家伯恩斯坦爲代表的現代逼近理論更是大放異彩，成爲純粹數學應用於現代科技的一個光輝典範。

理論聯繫實際是切比雪夫科學工作的一個鮮明特點。他自幼就對機械有濃厚的興趣，在大學時曾選修過機械工程課。就在第一次出訪西歐之前，他還擔任著聖彼得堡大學應用知識系 (準工程系) 的講師。這次出訪歸來不久，他就被選爲科學院應用數學部主席，這個位置直到去世後才由李雅普諾夫接任。應用函數逼近論的理論與算法於機器設計，切比雪夫得到了許多有用的結果，它們包括直動機的理論、連續運動變爲脈衝運動的理論。最簡平行四邊形法則、絞鏈槓桿體系成爲機械的條件、三絞鏈四環節連桿的運動定理、離心控制器原理等等。他還親自設計與製造機械。據統計，他一生共設計了四十餘種機器和八十餘種這些機器的變種，其中有可以模仿動物行走的步行機，有可以自動變換船槳入水和出水角度的划船機，有可以度量大圓曲率並實際繪出大圓弧的曲線規，還有壓力機、篩分機、選種機、自動椅和不同

類型的手搖計算機。他的許多新發明曾在 1878 年的巴黎博覽會和 1893 年的芝加哥博覽會上展出，一些展品至今仍被保存在蘇聯科學院數學研究所、莫斯科歷史博物館和巴黎藝術學院裡。

1856 年，切比雪夫被任命爲炮兵委員會的成員，積極地參與了革新炮兵裝備和技術的工作。他於 1867 年提出的一個計算圓形炮彈射程的公式很快被彈道專家所採用，他關於插值理論的研究也部分地來源於分析彈著點數據的需要。他在聖彼得堡大學教授聯席會上作的“論地圖製法”(Черчение географических карт，1856) 的報告精闢地分析了數學理論與實踐結合的意義，這份報告也詳盡討論了如何減少投影誤差的問題。在法國科學院第七次年會上，切比雪夫提出了一篇名爲“論服裝裁剪” (*Sur la coupe des vêtements*，1878) 的論文，其中提出的“切比雪夫網”成爲曲面論中的一個重要概念。

切比雪夫終身未娶，日常生活十分簡樸，他的一點積蓄全部用來買書和製造機器。每逢假日，他也樂於同侄兒女們在一起輕鬆一下，但是他最大的樂趣是與年輕人討論數學問題。1894 年 11 月底，他的腿疾突然加重，隨後思維出現了障礙，但是病榻中的他仍然堅持要求研究生前來討論問題，這個學生就是後來成爲俄國在代數領域中的開拓者的 Д. А. 格拉韋 (Граве)，1894 年 12 月 8 日上午 9 時，這位令人尊敬的學者在自己的書桌前溘然長逝。他既無子女，又無金錢，但是他卻給人類留下了一筆不可估價的遺產 – 一個光榮的學派。

聖彼得堡數學學派是伴隨著切比雪夫幾十年的舌耕筆耘而成長起來的。它深深地紮根在大學這塊沃土裡，它的成員們大都重視基礎理論和實際應用，善於以經典問題爲突破口，並擅長運用初等工具建立高深的結果。十九世紀下半葉，俄國數學主要就是在切比雪夫的領導下，首先在概率論、解析數論和函數逼近論這三大領域實現了突破。科爾金、佐洛塔廖夫、Ю. В.

索霍茨基 (Сохоцкий) 、 К. А. 波謝 (Поссе) 、 馬爾科夫 、 李雅普諾夫 、 格拉韋 、 Г. Ф. 伏羅諾伊 (Вороной) 、 С. И. 沙圖諾夫斯基 (Шатуновский) 、 А. Н. 克雷洛夫 (Крылов) 、 Н. Е. 茹科夫斯基 (Жуковский) 、 В. А. 斯捷克洛夫 (Стеклов) 等人又在複變函數 、 微分方程 、 代數 、 群論 、 數的幾何學 、 函數構造 、 數學物理等領域大顯身手 ， 使俄國數學在十九世紀末大體跟上了世界先進的潮流 ， 某些領域的優勢則一直保留到今日 。

現在 ， 蘇聯已經是一個數學發達的國家 ， 蘇聯數學界的領袖們仍以自己被稱爲切比雪夫和聖彼得堡學派的傳人而自豪 。

文　　獻

原始文獻

[1] Научное наследие П. Л. Чебышева, 2 Тома, Москва-Ленинград, 1945 。

[2] Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева, 5 Томов, Москва-Ленинград, 1944 – 1951 。

研究文獻

[3] В. Е. Прудников, П. Л. Чебышев, Ученый и педагог, Москва, 1964 。

[4] И. Я. Депман, С. -Петербургское математическое общество, Исторцко-математцческце цсолебованця, 13(1960), стр. 11 – 106 。

[5] A.P. Youschkevitch, *Pafnuty Liovich Chebyshev*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 3, 222 – 232 。

[6] 劉鈍 、 蘇淳 ， 聖彼得堡數學學派的奠基人 – 紀念 П. Л. 切比雪夫逝世九十週年 ， 自然辯證法通訊 ， 6(1984) ， 6 ， 第 62 – 74 頁 。