埃 爾 米 特

埃爾米特，(Hermite，Charles) 1822 年 12 月 24 日生於法國洛林 (Lorraine) 地區的迪約茲 (Dieuze)；1901 年 1 月 14 日卒於巴黎。數學。

埃爾米特之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hermite.html

埃 爾 米 特

孫 宏 安

(遼寧師範大學)

埃爾米特, (Hermite, Charles) 1822 年 12 月 24 日生於法國洛林 (Lorraine) 地區的迪約茲 (Dieuze); 1901 年 1 月 14 日卒於巴黎。 數學。

埃爾米特的父親費迪南・埃爾米特 (Ferdinand Hermite) 是一個有很強藝術傾向的人。 他學過工程學, 在離迪約茲不遠的一個鹽礦工作過一段時間, 後來接受他的一位姻親的邀請, 離開鹽礦從事布匹貿易工作, 隨後又把生意交給他的妻子管理, 以使自己的藝術愛好得以自由發揮。 埃爾米特是他的七個孩子中的第六個。 埃爾米特出生時右腿就有殘疾, 他終生腿瘸, 不得不拄著手杖行走。

埃爾米特從父母那裡接受了啓蒙教育。 由於生意發展的需要, 1829 年, 埃爾米特舉家遷到南錫。 在這裡, 由於生意活動佔據了父母的幾乎全部時間, 他們把幾個孩子都送入南錫公立中學作寄宿生。 中學畢業後, 埃爾米特到巴黎繼續他的學業, 先在亨利四世學院學習。 1840 年轉入路易大帝學院, 在那裡為報考巴黎綜合工科學校作準備。 這所學院是 E. 伽羅瓦 (Galois) 讀過書的地方, 教埃爾米特數學的理查德 (Richard) 教授恰好在十五年前教過伽羅瓦。 埃爾米特並不特別認眞地準備考試課程, 而是熱衷於閱讀各種書籍。 他十分認眞地研讀了 C.F. 高斯 (Gauss) 的名著《算術研究》(*Disquisitioues arithmeticae*) 並眞正掌握了它, 無論當時還是以後, 只有極少數人眞正掌握過這部著作; 他還閱讀並理解了 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 關於代數方程代數解法的著述。 他後來曾說過:“正是從這兩部著作中, 我學會了代數。” 他的考試成

績不佳卻有豐富的數學知識， 這使理查德教授有一次忍不住向他父親說， 埃爾米特是 “一個年輕的拉格朗日”。

埃爾米特的頭兩篇論文發表於 1842 年法國的《新數學年刊》(*Nowvelles Annales de Mathématiques*) 上， 是他在路易大帝學院讀書時寫的。 頭一篇是關於圓錐曲線的解析幾何的一個練習， 沒有顯示出創造性來； 第二篇則表現出非凡的創造性， 在這篇題爲 “對五次方程代數解法的探討”(*Considerations on the algebraic solution of the equation of the fifth degree*) 的論文中， 他在尙不知道 P. 魯菲尼 (Ruffini) 和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 的著作的情況下， 試圖證明五次方程根式解的不可能性， 這篇文章後來收入他的文集之中。

1842 年， 埃爾米特以總分第 68 名的較低分數被巴黎綜合工科學校錄取， 雖然他當時已經是一位數學家了， 甚至是一位比一些考他的人水準高得多的數學家。 埃爾米特在綜合工科學校只讀了一年， 就由於右腿的殘疾而被學校除名。 這時， 他已經在數學界小有名氣了， 與 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 和 J.L.F. 貝特朗 (Bertrand) 等人有密切的交往。 他希望找到一個教師職業， 把它作爲可以謀生， 同時能繼續從事研究工作的根據地。 但這需要學位， 因此， 在他二十四歲時不得不中斷研究工作， 去掌握考取學位所必須的那些他不太感興趣的東西。 1847 年， 他通過考試， 取得了學士學位。

這一期間， 他的數學水準有了很大的提高。 他已經了解到 A.L. 柯西 (Cauchy) 和 J. 劉維爾 (Liouville) 等人關於一般函數的工作， 而且也熟知 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 關於橢圓函數和超橢圓函數的工作。 埃爾米特把上述兩個領域結合起來， 表現出高度的數學才能。 他在這方面的初步工作， 確定了他在數學界的地位。 用 G. 達布 (Darboux) 的話來說， 埃爾米特這時已躋身於第一流的數學家之列。 埃爾米特這期間的主要數學工作表述在他給雅可比的 6

封信中 (1843 至 1850 年間)， 雅可比把這些信摘要刊登在《克列爾雜誌》[*Crelle's Journal*， 即《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*)， 爲 A.L. 克列爾 (Crelle) 創辦， 故名] 上， 並收入自己的著作中， 也收於 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 後來編輯的雅可比著作第二卷中。 終其一生， 埃爾米特與其他數學家的通信產生過巨大的科學影響。

埃爾米特的數學成就使他受到學界的重視， 1848 年他被任命爲巴黎綜合工科學校的入學考試委員。 此後 10 年是他十分活躍的時期， 1856 年他當選爲巴黎科學院院士， 在 48 張選票中獲得了 40 張。

1862 年， 通過 L. 巴斯德 (Pasteur) 的工作， 巴黎綜合工科學校爲埃爾米特設了一個大學講師的職務。 次年， 他又被任命爲該校的主考人， 他擔任此職直到 1867 年， 這一年他接替 J.M.C. 杜阿梅爾 (Duhamel) 擔任巴黎綜合工科學校的分析學教授職務。 同時他還成爲巴黎理學院的教授， 先教代數學， 後來教分析學。 他的分析學講義在國內外都享有盛名。1876 年， 埃爾米特辭去他在巴黎綜合工科學校的職務，1897 年辭去巴黎理學院的職務而退休。 他是許多國家的科學院和學會的名譽成員， 獲得過許多勳章。 1892 年他七十歲生日時， 歐洲科學界一起向他致意祝賀。 據說， 這是一位數學家很少能得到的殊榮。

埃爾米特的夫人是 J.L.F. 貝特朗的妹妹路易斯・貝特朗 (Louise Bertrand)， 他們有兩個女兒， 其中一個成爲 E. 皮卡 (Picard) 的妻子。 在巴黎， 埃爾米特與著名語言學家 E. 波諾夫 (Bournoff) 爲鄰， 這使埃爾米特有機會研究梵文和古波斯文獻。 1856 年， 埃爾米特患了嚴重的天花。 在病中受 A.L. 柯西 (Cauchy) 的影響， 他皈依了天主教， 之後成爲一名虔誠的天主教徒。 他的著作集後來由皮卡整理， 於 1905 − 1917 年間出版。

埃爾米特在十九世紀數學中佔有崇高的地位， 著名數學史家 P.

蒙西翁 (Monsion) 稱他爲高斯、柯西、雅可比和狄利克雷之後最重要的分析學家，這並非過譽之詞。埃爾米特在他的時代以及他之後的若干歲月中，確實是數學界中的一個鼓舞人心的形象，他在數學分析、代數以及數論等領域做出了多方面的貢獻。時至今日，人們以他的名字作了這樣一些命名：埃爾米特矩陣、埃爾米特型、埃爾米特多項式、埃爾米特雙曲空間、埃爾米特插值、埃爾米特核、埃爾米特算子、埃爾米特流形等，以此表達對這位數學大師的尊敬和紀念。這些命名也反映了埃爾米特的多方面的數學成就。

1. 二次型

二次型理論是線性代數的重要內容之一，它起源於對幾何學中二次曲線方程和二次曲面方程化爲標準型問題的研究。埃爾米特在 1847 – 1851 年間對二次型理論作了深入的研究，他有兩項創造性工作：一是引入複二次型，即以複數爲係數的複變量 x_1、x_2、$\cdots$、x_n 的表達式，後來稱爲埃爾米特 (二次) 型。如 $n=2$ 時

$$a_{11}x_1\overline{x}_1 + a_{12}\, x_1\overline{x}_2 + a_{21}x_2\overline{x}_1 + a_{22}x_2\overline{x}_2\text{，}$$

或對一般的 n

$$H(x) = \sum_{i,\ k=1}^{n} a_{ik}\overline{x}_i x_k\text{，}\ a_{ik} = \overline{a}_{ki}\text{，}$$

其中 $\overline{a}_{ki}$、$\overline{x}_i$ 分別表示 a_{ki}、x_i 的共軛複數；二是首次提出二次型的簡化法，這是 R (實數域) 上的型關於在 Z (整數環) 上等價性的理論，其基本問題是使從 R 上諸型的每一個 Z 上的等價類中選出一係數儘可能簡單 (即滿足某些所謂簡化條件) 的型來 (稱爲已化型)，並給出一種簡化法。

這兩項創造性工作對後來數學的發展都產生了影響。 現在二次型理論已推廣到多重線性代數中， 埃爾米特型在物理學、 幾何學和概率論中都有廣泛的應用， 特別是在現代量子物理學中， 有著不可取代的作用。 二次型的埃爾米特簡化法還引出個十分有趣的極小值問題。 埃爾米特簡化法與正定二次型的極小值 $\min f$ 有關， $\min f$ 是型 $f(x)$ 對於所有非零的點 x 的最小值； 可以證明， 存在一個僅與變元數 n 有關的常數 c_n， 使對所有 n 元正定型 f 均有 $\min f \le c_n df^{1/n}$， 埃爾米特取 $c_n = (\frac{4}{3})^{(n-1)/2}$。 對 c_n 的研究成爲一個重要的數學問題， 不斷有人進行， 到 1936 年， 人們已確定了 $n \le 8$ 時 c_n 的最佳值 r_n， 如 $r_1 = 1$、 $r_2^2 = \frac{4}{3}$、 $r_3^3 = 2$ 等， 但 $n > 8$ 時 r_n 的數值問題至今仍未解決。

2. 五次方程解法

1826 年， 阿貝爾證明了五次及五次以上的代數方程一般無根式解法 (或代數解法)， 但是， 怎樣解五次方程， 在當時一直作爲一個問題擺在數學家面前。 後來 G.B. 杰勒德 (Jerrard) 找到了把一般五次方程化爲

$$x^5 + px + q = 0 \tag{1}$$

形式的方法 (以及更一般地， 把 n 次方程化爲不含 x^{n-1}、 x^{n-2} 和 x^{n-3} 項形式的方法)， 因而把解一般五次方程的問題轉化爲解方程 (1) 的問題。 在此基礎上， 1858 年， 埃爾米特最先提出用橢圓模函數來解五次方程的理論和方法。 這一方法取得了成功， 而這一成功開創了代數學和分析學交叉的一個新的領域 − 自守函數論， 其中一個要點是發現和研究這樣一些函數， 用這些函數能夠以有限形式明確地解出 n 階微分方程來。 在這方面， 埃爾米特的學生 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 取得了極好的成果。

3. 正交多項式

1893 年， 埃爾米特給出了一種後來以他的名字命名的正交多項式 - 埃爾米特多項式。 所謂正交多項式指正交函數系。 通常這樣表述埃爾米特多項式：

在無限區間 $[0, +\infty)$ 中以 $w(x) = e^{-x^2}$ 爲權的正交多項式系 $\{H_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 稱爲埃爾米特多項式， 其表達式爲

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \text{。}$$

首項係數爲 1 的埃爾米特多項式爲

$$\tilde{H}_n(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n H_n(x) \text{，}$$

規範正交埃爾米特多項式爲

$$\hat{H}_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{n}2^n n!}} H_n(x) \text{。}$$

埃爾米特多項式的遞推公式爲

$$\tilde{H}_{n+2}(x) = x\tilde{H}_{n+1}(x) - \frac{n+1}{2}\tilde{H}_n(x) \text{，}$$

且滿足微分方程

$$y'' - 2xy' + 2xy = 0 \text{。}$$

埃爾米特多項式在微分方程、 函數逼近等領域中都是有用的工具。

4. 證明 e 的超越性

這是埃爾米特於 1873 年取得的一個重要而且廣爲人知的成果。 這一成果極大地推動了超越數論的發展， 具有相當深遠的意義。

超越數研究是劉維爾開創的。他最先發現了無理代數數的有理逼近的精確性有一定限度，由此構造出歷史上的第一批超越數，例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} g^{-n!}$$

對 $n = 2$、3、 $\cdots$ 都是超越數。人們自然會進一步問，在業已定義並且常用的數中有沒有超越數呢? 由於 1744 年 L. 歐拉 (Euler) 證明了 e 是無理數，1761 年 J.H. 藍伯特 (Lambert) 證明了 π 是無理數，它們是不是超越數? 這是十分自然的問題。人們同時又認爲，證明這兩個現成的數的超越性，似乎比構造出一大類超越數還要困難。1873 年，埃爾米特以其高超的技巧證明了 e 是一個超越數，這使超越數論進入了一個新的發展階段，人們開始把證明某些數是否超越數作爲主要問題來考慮，促使超越數論不斷深入發展。

1882 年，C.L.F. 林德曼 (Lindemann) 按埃爾米特的思路，證明了 π 的超越性，從而解決了從古希臘以來一直因擾人們的三大作圖問題之一的 “化圓爲方” 問題。1900 年，D. 希爾伯特 (Hilbert) 提出著名的二十三個數學問題，其中第七問題就是一個證明某類數是否超越數的問題：如果 α 是不等於 0 和 1 的代數數，β 是無理代數數，那麼 α^{β} 是否超越數? 1934 年 A. O. 格爾豐德 (Гельфонд) 肯定地解決了這一問題。由此可知，若 α 是正有理數，則常用對數 $\log \alpha$ 不是有理數，就是超越數；更一般地，對非零代數 α_1、α_2、β_1、β_2，若 $\ln \alpha_1$、$\ln \alpha_2$ 在 Q 上線性無關，則

$$\beta_1 \ln \alpha_1 + \beta_2 \ln \alpha_2 \neq 0。$$

1966 年，A. 貝克 (Baker) 把這一個結果推廣到任意個對數的情形，解決了一大類數是否越越數的判定問題，包括形如 $\alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ 的數是否超越數的判定。這是他 1970 年獲費爾茲獎的重要工作之一。可見埃爾米特開創的超越性證明對數學的發展產

生了多麼大的影響。

5. 其它成果

埃爾米特是一位熱心的數學傳播者，他經常無保留地向數學界提供他的知識、想法以致創造性的思維火花，一般通過書信、便條以及講演進行這種傳播工作。例如，他與 T.J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 兩人從 1882 年到 1894 年間至少寫過 432 封信。只要認眞閱讀埃爾米特的著作，就會發現，他提供了許多可以作爲別人發現的序幕的例子，他的數學傳播工作極大地促進了數學的發展。

埃爾米特是一個全面的數學家，除了前述各項工作外，他在數學的各領域中還取得如下成果：他深入研究了矩陣理論，證明了，如果矩陣 $M = M^*$ (M 的伴隨矩陣)，則其特徵值都是實數；提出一個屬於代數函數論的埃爾米特原理，是後來著名的黎曼－羅赫定理的特例之一；在不變量方面有較多成果，以致於 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 曾指出，“A. 凱萊 (Cayley)、埃爾米特和我組成了一個不變量的三位一體”，例如，他提出一個 “互反律”，即一個 m 次二元型的 p 階固定次數的共變式和一個 p 次二元型的 m 階固定次數的共變式之間的一種一一對應關係；埃爾米特推廣了高斯研究整係數二次型的方法，證明了它們對於任意個變量其類數仍是有限的；還把這一結果應用於代數數，證明了，如果一個數域的判別式已給出，則其範型的數目是有限的；他還把這種 “類數有限性” 用於不定二次型，取得一些重要的結果；他關於拉梅方程 (一種微分方程) 的研究在當時也有十分重要的意義。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Picard (ed.), *Oeuvres de Charles Hermite*, Vol. 1－4, Paris, 1905－1917。

[2] B. Baillaud and H. Bourget (ed.), *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, Vol. 1－2, Paris, 1905。

[3] E. Lambe (ed.), *Briefe von Ch. Hérmite an P. du Bois-Reymond aus den Jahren* 1875－1888, Archiv der Mathematik und Physik, 3rd. ser., 24 (1916), 193－220, 289－310。

研究文獻

[4] P. Mansion and C. Jordan, *Charles Hermite (*1822－1901*)*, Revue des Questions Scientifiques, 2nd ser., 19 (1901), 353－396；20(1901), 348－349。

[5] M. Noether, *Charles Hermite*, Mathematische Annalen, 55 (1902), 337－385。

[6] E.T. Bell, *Man of mathematics*, Dover Publ., New York, 1963, 448－465。(中譯本： E.T. 貝爾， 大數學家， 台灣九章出版社， 2000)。