

# 克 羅 內 克

克羅內克，L. (Kronecker, Leopold) 1823 年 12 月 7 日生於德國布雷斯勞附近的利格尼茨 (Liegnitz, 今屬波蘭)；1891 年 12 月 29 日卒於柏林。數學。

克羅內克之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Kronecker.html>

# 克 羅 內 克

邵 明 湖

(遼寧師範大學)

克羅內克，L. (Kronecker, Leopold) 1823 年 12 月 7 日生於德國布雷斯勞附近的利格尼茨 (Liegnitz, 今屬波蘭)；1891 年 12 月 29 日卒於柏林。數學。

克羅內克生於一個富裕的猶太家庭，他的父親伊西多·克羅內克 (Isidor Kronecker) 是一個商人，對哲學有濃厚興趣。克羅內克進入利格尼茨預科學校之前，在家中接受私人教師的教育。在預科學校，他幸運地遇到了對他後來的數學生涯產生重要影響的第一位數學教師 E.E. 庫默爾 (Kummer)，並與之結成了終生好友。十多年後他們在柏林成爲同事。當 1881 年慶祝庫默爾獲得博士學位五十週年時，克羅內克說庫默爾提供了他“理性生活”的“最本質的部分”。庫默爾的特別指導使克羅內克很早便顯露了數學才能，但克羅內克有著廣泛的興趣，並取得優秀成績。哲學、古典語言、音樂都是他喜愛的科目，並成爲他的終生愛好。他甚至到對軍事和政治也有獨到的見解。1841 年春，克羅內克進入柏林大學。當時的柏林大學擁有 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 這樣的大師，還有奠定了橢圓函數論基礎的 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 和近代綜合幾何學的開創者 J. 施泰納 (Steiner)。狄利克雷對他的影響是深刻的，這體現在他的每一篇作品中，而雅可比的學術興趣則主導了克羅內克的一生 — 橢圓函數論始終是克羅內克興趣的中心。但施泰納的幾何學似乎從沒有引起羅內克真正的興趣。這期間，有的學期他是在波恩大學過的，因爲庫默爾成了那兒的教師。此時的克羅內克在社交生活中也非常活躍，曾參加過擊劍社團，加入學生組織。1845 年，克羅內克以討論代數數域中可逆元的論文

“論複單位元”(*De Unitatibus Complexis*) 獲柏林大學博士學位。在口試中，狄利克雷考問了他在定積分、級數、微分方程方面的知識。

此後八年，克羅內克是在家鄉度過的。他經營了舅父留下的大宗產業，並取得很大成功，成為一個商人、銀行家和農場主。這段經營保證了他餘生可以優裕地從事數學創造活動而無經濟之憂。1848年，他與表妹范妮·普勞斯尼茨(Fanny Prausnitzer)結婚，他們有六個孩子。在鄉居的八年時間裡，克羅內克一直沒有論文發表，但在商務活動之餘，他卻一直保持著與以前的老師庫默爾(當時任布雷斯勞大學教授)的頻繁通信。對數學創造的嚮往使他仍然保持了數學思維的活躍。也許這種在一定程度上的與世隔絕對克羅內克來說是一種幸運，因為這使他慢慢成熟起來。“但是”，在克羅內克去世後繼任柏林大學教授的 F.G. 弗羅貝尼烏斯(Frobenius)對此評論道：“這對他的同事們來說卻是巨大損失，因為他們不能參入他的發展過程。當他經過八年沉默之後發表他在餘暇中給出的結果時，只有不超過三位的數學家能跟上他的思路。”1853年，克羅內克發表了論文“論代數可解方程”(*Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen*)。這一年他從商業事務中脫開身訪問了巴黎，在那裡結識了 C. 埃爾米特(Hermite)和其他一些法國領頭的數學家。

1855年，克羅內克重返柏林。就在這一年，狄利克雷離開柏林接替了高斯在格丁根的職位。根據狄利克雷的提名，庫默爾被任命接替他成為柏林大學教授。次年，由於庫默爾的安排，K. 魏爾斯特拉斯(Weierstrass)來到了柏林並且成為柏林科學院成員。從此，這三位數學精英揭開了柏林數學界的新篇章。定居柏林後，克羅內克以很快的速度發表了一系列論文，內容涉及數論、橢圓函數論、代數，尤其是探討了這些學科之間的相互依賴性。1861年1月23日，經庫默爾和魏爾斯特拉斯等人的推

薦，克羅內克成爲柏林科學院院士。之後，他利用院士之便在柏林大學義務開設了一系列講座，主要是在作必要的講解之後介紹他自己的研究工作，涉及代數方程論、數論等科目。

1866 年，十九世紀極富獨創性的數學家 B. 黎曼 (Riemann) 去世。由於克羅內克出色的成就，1868 年他被聘請繼任黎曼在格丁根的教授席位。這一職位的前任是高斯和狄利克雷，其榮譽可知。但克羅內克卻婉言謝絕了，柏林大學的愜意的生活和工作使他並未認真對待來自格丁根的召喚。直至 1883 年，克羅內克一直是在無任何報酬的情況下工作著。這一年，庫默爾的退休使他得以成爲柏林大學教授。1880 年，他成爲著名的克羅爾雜誌編輯，並一直履行此職。

克羅內克成功的學術活動使他的影響越來越大。他廣泛交遊，頻繁參加英國、法國和北歐的一些科學會議。他在柏林科學院中的活動也極活躍，特別在吸收德國及外國的重要數學家成爲院士方面。從 1863 至 1866 年，他先後幫助十五位數學家成爲它的成員或取得更高的職位，包括黎曼、J.J. 西爾維斯特 (Sylvester)、R. 戴德金 (Dedekind)、E. 海涅 (Heine)、R.F.A. 克萊布什 (Clebsch)、E. 貝蒂 (Betti)、E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 等人。他先後成爲其它國家許多科學團體的成員，包括巴黎科學院 (通訊院士，1868) 和英國皇家學會 (會員，1884)。他被稱爲德國數學界的“無冕之王”。

克羅內克一生共發表近 150 篇論文，在代數學、數論、橢圓函數論等方面有突出成就。更爲可貴的是他企圖統一數學的努力。這方面的工作在 1845 年的博士論文中便已初顯端倪。他的博士論文涉及代數數理論，這一理論產生於證明費馬大定理的企圖。當時庫默爾和戴德金對此做出了重要貢獻。庫默爾沿著高斯開創的路線，利用  $n$  次本原單位根

$$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$$

把方程  $x^n + y^n = z^n$  改寫爲

$$x^n = (z - y)(z - \zeta_n y) \cdots (z - \zeta_n^{n-1} y),$$

引進了代數數的概念。唯一因子分解法則在代數數域中的不成立導致庫默爾於 1844 年開始的一系列論文中創立了理想數的理論，他藉此證明了費馬大定理對所謂“正則質數”成立。庫默爾理論的核心是將分圓整數分解成質因子的乘積，當質因子不存在時，引入理想質因子。戴德金的代數數理論對高斯的複整數和庫默爾的理想數做了一般處理，將其推廣爲一般的代數結構－理想。今天，理想的概念幾乎出現在所有的數學分支中。

克羅內克繼續庫默爾對代數數的研究，他運用一種漂亮的方法克服了唯一因子分解的困難。早在 1859 年，庫默爾便提到克羅內克關於代數數的結果，說克羅內克將要發表這一得到“完善發展的極其簡明的關於最一般代數數的理論”。但二十年過去了，克羅內克並未發表他的這一著作，因爲他自己希望得到更一般的結果。克羅內克的理論出現在 1881 年爲慶祝庫默爾取得博士學位五十週年的紀念文章中，題爲“代數量的一種算術理論概要”(*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*)。克羅內克的理論的要點是“除子”(類似於戴德金的“理想”)概念，其核心思想非常簡單明晰。實質上，他是將新討論的域的整數環嵌入一個更大的多項式環，這些多項式的係數在整數環中。這方法與人們熟知的戴德金的方法有著本質上的不同。

首先，戴德金認爲以如下方式定義“理想”是其理論的主要任務，即對代數數不成立的唯一因子分解定理對理想來說應該是成立的。而克羅內克注意到“質數”的概念是相對於所考慮的數域的。如果域擴張了，那麼原來的質數就不復如初了。爲此，質數唯一因子分解定理應屬於理論的後一部分，即應在以一種獨立於所考慮的域的方式定義了基本概念之後方可考慮。當然，在戴德金的理論中，從一個域到另一個域時必須計算理想；而克羅內克

的理論與此無關，在這裡，當域擴張或收縮時它是不改變的。

其次，克羅內克實際上是通過告知如何去計算它們而定義除子的，用戴德金的話說，這等於給出了一種算法以便確定(已知一組理想的生成元)域的一已知元是否在理想中－這是戴德金理論中所沒有的。克羅內克的方法體現了他的哲學思想。

克羅內克對代數數論的貢獻尤以所謂克羅內克－韋伯定理著名。該定理即：有理數域的任一阿貝爾擴張一定是一分圓域的子域。這也是他最重要的成果之一。今天，每一個學過代數數論的人都會了解這一定理以其簡潔和一般所體現的深刻及其在代數數論中的重要地位。這一深刻的結果是克羅內克在 1853 年發表的“論代數可解方程”中的一個副產品。但他沒有給出證明。後人曾給出幾種證明，其中最早的是 H. 韋伯 (Weber) 在 1886 年給出的，距該定理發表已三十多年。這也旁證了弗羅貝尼烏斯的話是有道理的。

由克羅內克－韋伯定理出發，克羅內克進一步提出了著名的猜想：每個虛二次域  $K$  的極大阿貝爾擴域是將  $K$  添加某種橢圓函數 (這是雙週期函數) 在全部有理點處的取值而得到的域。在 1880 年給戴德金的一封信中，克羅內克稱此猜想為“我最迷戀的青春之夢”。至第一次世界大戰期間這一猜想才為日本數學家高木貞治 (Teiji Takagi) 所證明。這也是日本近代學者的第一個具有國際水準的數學成果。

據說克羅內克在剛開始他的科學生涯時曾經有點睥睨 E. 伽羅瓦 (Galois)，我們無從知道這是否屬實，但克羅內克最早掌握了伽羅瓦的思想。就在 1853 年關於方程的代數可解性的論文中，他發展了阿貝爾和伽羅瓦關於方程可解性的結果，進一步揭示了方程可解的本質特徵。當克羅內克致力於解決這一問題時 (十九世紀 40 年代)，伽羅瓦理論還很少有人理解。後來，克羅內克同埃爾米特一樣用橢圓模函數解出了一般的五次方程，與之不同的是，克羅內

克運用了伽羅瓦思想。

克羅內克的工作中體現著深刻的代數思想。早在博士論文中，他就試圖將一組單位元素表示為群。二十五年後，他成功地構造出一套公理體系以限定有限阿貝爾群。這表明他的工作是朝著現代數學發展的。後來他創立了有理函數域論，引進了在域上添加代數量生成擴域的概念和模系的概念，並說明了代數數的理論是獨立於代數基本定理的。這是他最重要的工作之一。

克羅內克的數學活動體現了他統一數學的努力。他試圖為整個數學奠定一個基礎，從這個基礎出發可以建立完整的數學體系。在他看來，這個基礎便是算術。他關於橢圓函數的工作中，邊界公式尤其值得一提，這是在狄利克雷工作方向上的一大進步，揭示了算術與橢圓函數之間最深層的關係，並提供了後來E. 赫克 (Hecke) 用解析方法研究代數數論的基礎，它充分體現了克羅內克的統一數學觀。

克羅內克的大部分工作表明，他可以被稱作算法家。他的目標是完善技巧，給出簡明表達式以自動顯示從某一步到下一步的過程。例如克羅內克的除子理論，它當然可看成戴德金理想論的另一種形式，其基本定義很難理解，其實是一種算法，這種算法是要確定代數數域  $K$  中的已知整數  $b$  是否在由  $K$  中的已知整數組  $a_1, a_2, \dots, a_n$  生成的理想中。對算法感興趣的讀者會更易於理解他的工作。

克羅內克對數學哲學有強烈信念，試圖將一切數學(從代數學到分析)算術化是他的最高願望。他寫道：“有一天人們將成功地將所有數學算術化，就是說將數學建立在最狹義的數概念的單一基礎上。”“一切最根本的數學研究結果最終必須可以整數性質的簡單形式表達。”他的另一句話是更著名的：“上帝創造了整數，其餘一切都是人造的。”不過，我們所了解的他的哲學觀點大多是由別人轉述的。克羅內克的學生 K. 亨澤爾 (Hensel) 在克羅內克的《數論

講義》的前言中寫道：“我也必須指出克羅內克自覺地加於廣義算術的定義和證明之上的一個要求，對它的嚴格遵守將他對數論和代數的處理與幾乎所有其他的人區別開來。他相信人們在這些數學分支中能夠也必須以這種方式限定一個定義，即人們可用有限步驗證它是否適用於任意已知量。同樣，一個量的存在性證明只有當它包含一種方法，通過它可以實際地發現要證明存在的量時，才可被認為是完全嚴格的。”這些正是後來重要的數學哲學流派－直覺主義學派所堅持的信念。因此，克羅內克被認為是直覺主義學派的先驅。他的這些原則也正是現代數學的重要領域－構造性數學研究的起點。

克羅內克基於自己的哲學觀，反對魏爾斯特拉斯的數學風格。魏爾斯特拉斯不僅使用實無限，而且鍾愛像波爾查諾－魏爾斯特拉斯定理 (Bolzano-Weierstrass theorem)(有界無窮序列必有聚點) 這樣的非構造性的存在定理。克羅內克認為魏爾斯特拉斯的方法是不充分的，他要找出“現在分析學賴以存在的一切結論之謬誤”。這大大刺激了他的老同事魏爾斯特拉斯。他們原是極好的朋友，從七十年代開始，他們的關係變壞了。魏爾斯特拉斯認為克羅內克的信條對他是嚴重的威脅。這兩位數學家在很多方面截然不同：魏爾斯特拉斯高大、閒散，而克羅內克則小巧、精幹；一位擅長分析，並形成一個強大的分析學派，另一位則是代數學家。1888年，魏爾斯特拉斯對他的朋友宣稱與克羅內克完全斷交。而克羅內克卻顯然沒有認識到自己的觀點和活動是怎樣傷害了魏爾斯特拉斯，因為他一直聲稱自己是魏爾斯特拉斯的朋友。

當然，在克羅內克看來，G. 康托爾 (Cantor) 的超窮數理論是無法接受的，它與克羅內克的信條完全對立。克羅內克強烈反對並試圖阻止康托爾擴大其影響，他大概不會認識到自己對康托爾造成了何等程度的傷害。由於殫精竭慮地致力於連續統假設的證明和對自己的工作缺乏信心，康托爾一度陷入精神崩潰。來自克羅內

克這位權威的精神壓力可能也是導致於此的原因。在克羅內克看來，康托爾顯然是錯誤地追隨了魏爾斯特拉斯的一位後生。

克羅內克的哲學被不喜歡它的人稱為“暴動”(Putsch)。的確，它從來也沒有贏得多數人的贊同。但卻贏得了一些一流數學家的附和。克羅內克本人這種和者寡的情形也許不會太在意。事實上，他一生所鍾愛的代數學和數論當時並不如魏爾斯特拉斯所擅長的分析學更受大多數人的歡迎。作為教師，他講課的清晰而漂亮的開場白往往使他的聽眾認為後續課程一定是易懂的，但不久這一信念就會煙消雲散，直到只剩下少數虔誠的聽眾－許多人去聽魏爾斯特拉斯的課了。克羅內克反而很高興，他會戲謔地說可以在前幾排座位後掛一道簾子，以使聽眾與講演者之間更密切。這少數忠實的聽眾便跟隨著他，有時課後一起步行回家，並一直繼續課堂上的討論。經過弗里德里希大街的人有時會看到這樣的場面：一個矮個子的人興緻勃勃的對一圈青年人講解著什麼，他們都如此全神貫注，根本注意不到是否妨礙了交通。克羅內克一直保持著貴族式的孤傲，但他的家對學生是開放的。他的一些學生後來成為重要的數學家，但他從未努力去贏得一大批追隨者。

克羅內克的理想對於現代數學來說無疑是過於狹隘了，但他的懷疑精神對人們重新批判地檢查數學的基礎起了鼓舞作用。它導致了數學中兩種有建設性的批判運動：有限步構造性證明與存在性證明，以及從數學中驅除不能以有限個詞明確表述的定義。這些有利於人們更清楚地認識數學的本質。

## 文 獻

### 原始文獻

- [1] L. Kronecker, *Werke*, 5 vols., Teubner, 1895 – 1930。

### 研究文獻

- [2] Kurt–R. Biermann, *Kronecker, L.*, 見 *Dictionary of scientific biography*

*ography*, 7 (1972), 505 – 509 °

- [3] Frobenius, Georg, *Gedächtnisrede auf Leopold Kronecker*, 見 *Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1893 °
- [4] Bell, E. T., *Men of mathematics*, Simon & Schuster, 1937, 466 – 483 °
- [5] H. Edwards, *An appreciation of Kronecker*, 見 *The mathematical intelligencer*, 9 (1987) °
- [6] G. Prasad, *Some great mathematicians of the nineteenth century*, Vol. 2, Printed by S.C. Chatterji, 1934 °
- [7] H. Edwards, *The genesis of ideal theory*, 見 *Archive for history of exact sciences*, 23, 321 – 378 °
- [8] H. Edwards, *Kronecker's views on the foundations of mathematics*, 見 *The history of modern mathematics*, New York, I (1989), 67 – 77 °