黎　曼

黎曼， G.F.B. (Riemann， Georg Friedrich Bernhard) 1826 年 9 月 17 日生於德國漢諾威的布雷斯塞倫茨 (Breselenz)；1866 年 7 月 20 日卒於義大利塞拉斯卡 (Selasca)。 數學。

黎曼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Riemann.html`

黎　曼

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

黎曼， G.F.B. (Riemann， Georg Friedrich Bernhard) 1826 年 9 月 17 日生於德國漢諾威的布雷斯塞倫茨 (Breselenz)；1866 年 7 月 20 日卒於義大利塞拉斯卡 (Selasca)。 數學。

貝恩哈德•黎曼的父親是路德教牧師， 母親是法官的女兒， 他們共有六個孩子 (二男四女)， 貝恩哈德排行第二。 由於家庭生活困難， 營養不良， 導致多數子女過早死亡， 他們的母親在他們長大成人之前也去世了。

黎曼還是小孩子的時候， 他的父親就把家搬到奎克博爾恩的牧師管區去， 小黎曼從他父親那裡受到入門教育， 從一開始就表現出如飢似渴的學習慾望。 他最早的興趣是在波蘭歷史方面。 剛剛五歲， 就要他父親一遍又一遍地講述這個英雄國家的悲慘故事。 大約六歲時， 他開始學算術， 他天生的數學才能顯露出來了， 他不僅解決了所有留給他的問題， 而且發明更難的題來捉弄他的兄弟姐妹。 十歲時， 他跟著一位職業教師學習更高級的算術和幾何， 而學生很快超過老師， 他往往得出更好的解答。 十四歲時。 黎曼到漢諾威同他的祖母一起住， 進入當地文科中學學習。 兩年後， 他的祖母去世， 黎曼又轉到呂耐博格的預科中學， 他在這裡一直學習到十九歲。

文科中學校長 C. 施馬爾夫斯 (Schmalfuss) 早已觀察到黎曼的數學才能， 曾把自己私人藏書借給黎曼， 而且允許他不去聽數學課。 在施馬爾夫斯的建議下， 黎曼借走 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的《 數論 》(*Essai sur la théorie des nombres*)， 這是一本 859 頁的大四開本的書。 六天之後， 黎曼歸還了這本書。 他很快掌握了該

書內容， 這無疑就是黎曼對於質數興趣的來源。 他還通過研究 L. 歐拉 (Euler) 的著作而掌握了微積分及其各個分支。

1846 年春， 十九歲的黎曼在格丁根大學註册， 爲專修語言和神學的學生， 他也去聽數學及物理課程， 如 M.A. 史泰納 (Stern) 關於方程論和定積分的課， 以及 C.F. 高斯 (Gauss) 關於最小二乘法和 C.B. 哥德什密特 (Goldschmidt) 關於地磁學的課。 1847 年春， 黎曼轉到柏林大學， 他從 C. 雅可比 (Jacobi) 、 P. 狄利克雷 (Dirichlet) 、 J. 施泰納 (Steiner) 、 G. 艾森斯坦 (Eisenstein) 那裡受敎， 而進入新的數學領域。 他從這幾位大師中的每一位都學到了許多東西。 他從雅可比那裡學習高等力學和高等代數， 從狄利克雷那裡學習數論和分析， 從施泰納那裡學習近世幾何學， 而從只比他大三歲的愛森斯坦那裡學到橢圓函數。 他鑽研了 A.L. 柯西 (Cauchy) 等人的著作， 得出單複變函數以及柯西 − 黎曼方程的概念。 黎曼在柏林上了兩年大學， 在 1848 年政治動亂之際， 他參加保王的學生聯合會的活動， 而且參加累人的十六小時輪流值班來保護王宮中驚恐不安的國王。 1849 年春， 他回到格丁根去完成他的數學學業並準備取得博士學位。

他在格丁根大學又唸了三個學期， 他聽哲學課並且非常有興趣地上 W. 韋伯 (Weber) 的實驗物理課。 他熱衷於研究 J.F. 赫爾巴特 (Herbart) 的哲學結果， 並在 1850 年得出結論：“能夠建立起一套完備的、 周密的數學理論， 它包括從單個質點的基本定律進而到現實連續充實的空間中我們見到的過程， 不管是引力、 電磁還是熱學的。” 這表明黎曼反對物理中 “超距” 作用理論而贊成場論。 1850 年秋天， 他參加了剛剛由韋伯、 G.K.J. 烏爾里希 (Ulrich) 、 史泰納、 J.B. 李斯亭 (Listing) 建立起的數學物理學討論班。 在這個討論班上所做的物理實驗耗費了時間， 耽誤了他寫博士論文。 但是李斯亭的拓撲思想無疑對黎曼有巨大影響。 李斯亭在高斯影響下於 1848 年出版的《 拓撲學初步研究 》

(*Vorstudien zur Topologie*) 是這方面頭一部著作。 1851 年 11 月初， 黎曼在高斯指導下提交他的博士論文 “單複變函數一般理論基礎”(*Grundlagen für eine Allgemeine Theorie der Functionen einer Veränderlichen Complexen Grösse*)， 12 月 10 日通過答辯取得博士學位。 高斯對他博士論文的評論是 “黎曼先生提交的博士論文提供了可信的證據， 說明作者在他的論文中所論述的主題的大部分所進行的充分、 完全和深入的研究顯示一個具有創造性的、 活躍的、 眞正數學的頭腦以及了不起的富有成果的創造性。 文章淸楚、 簡潔， 有的地方很漂亮， 大多數讀者將會喜歡這個更淸楚的安排， 它不僅符合博士論文所要求的各項標準， 而且遠遠超出了它們。 ”

取得博士學位以後， 黎曼沒有積極謀取格丁根觀象台助手的空缺， 而是進一步去取得講師資格， 爲此， 他計劃提交一篇關於三角級數 (傅里葉級數) 的論文。 1852 年的秋天， 狄利克雷來到格丁根度假， 使黎曼受益不淺。 他就自己的論文徵求狄利克雷的意見， 後來寫道：“狄利克雷和我在一起談了兩個小時， 他把他的筆記給了我， 而這正是我準備就職論文所需要的， 否則就要在圖書館花費大量時間進行艱苦的研究才能得到這些。 他還和我一起研讀我的論文， 對我非常友好。 考慮到我們之間地位的巨大差異， 對此我是根本不敢想像的， 我希望他以後還能記得我。 ” 1853 年， 黎曼又熱衷於考慮數學物理的問題， 這耽誤了論文的寫作。 一直到年底， 他才完成了就職論文。

在他能夠取得他所謀求的沒有薪水的講師 [1] 職位之前， 他還必須通過一次試驗性的演講。 他給系裡提供三個題目， 他原本打算希望他們選擇前面兩個題目中的一個， 因爲這兩個題目他已經有所準備， 但是他無意中提出了第三個題目 − 幾何學基礎。 這個題目是高斯已經考慮了六年之久的， 而且他也沒有什麼準備。 但高

[1] 當時的講師收取聽課學生學費而沒有薪水。

斯卻指定了第三個題目。 黎曼在 1854 年作的講演 “論作爲幾何基礎的假設”(*Über die Hypothesen， welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 不僅是數學上的一篇傑作， 而且在表述上也是典範。 高斯特別興奮， 他感到黎曼的結果遠遠超過了他的預料。 在從系裡的講演會回來時， 高斯向威廉、 韋伯表示他對黎曼提出的思想的高度評價， 在談話時所帶有的熱情對高斯本人來說是十分罕見的。

1854 年夏， 黎曼取得講師資格後， 回奎克博恩家鄉稍事休息，9 月份回到了格丁根， 在德國自然科學家及醫師協會第三十一屆年會上， 發表了一篇倉促準備的關於電在非導體中分佈規模的講演， 同時繼續他關於電的數學理論的研究， 並準備一篇關於諾比里色環的論文， 這是他最早發表的兩篇論文。 他第一次開課的題目是 “偏微分方程及其在物理學上的應用”， 有八個學生來聽他的課， 使他非常高興。 他也逐漸改變害羞的毛病， 能夠更好地講課。

1855 年初高斯去世， 狄利克雷繼承了高斯的職位。 他幫黎曼獲得副教授的職位而未成功， 不過， 黎曼可以得到 200 塔勒的年薪。 1857 年， 他終於獲得副教授的職位， 年薪 300 塔勒。 1859 年 5 月， 狄利克雷去世， 他成了狄利克雷的繼任者， 經濟狀況才有改善。

1855 − 1856 年冬季學期， 黎曼開了一門全新的阿貝爾函數論課程， 聽講者只三位， 其中之一是 R. 戴德金 (Dedekind)。 1857 年， 他發表了關於阿貝爾函數的論文。 大約同時， 他又發表了關於超幾何級數的論文。 他在 1856 − 1857 年冬季學期開的複變函數論課程中也涉及超幾何級數， 特別是常微分方程的所謂黎曼 − 希爾伯特問題。 1859 年 8 月， 他被選爲柏林科學院通訊院士， 9 月份同戴德金一起去柏林， 受到 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 等人的熱情接待。 10 月份， 他把關於 ζ 函數的數論論文提交柏林科學院， 11 月在格丁根科學會上宣讀了關於空氣柱中不連續波的傳播的

論文， 12 月被格丁根科學會接納爲正式會員 (相當於後來科學院院士)。 1860 年復活節假期， 黎曼到巴黎訪問一個月， 受到法國數學家 C. 埃爾米特 (Hermite) 的友好接待。 當時巴黎科學院已設置大獎 (1858)， 提出問題是有關熱傳導的。 爲此， 黎曼繼續他 1854 年演講的研究， 對黎曼幾何學進一步加以發展。 1861 年 6 月， 他寫成拉丁文論文呈交巴黎科學院， 但是他的文章過於簡略， 沒有把必要的計算完全寫出來， 因此沒有得獎 (也沒有人獲獎， 巴黎科學院於 1868 年撤消了這個大獎)。

1862 年， 三十六歲的黎曼結婚了。 他的妻子愛麗絲 • 科赫 (Elise Koch) 是他妹妹的朋友。 婚後不到一個月， 黎曼在 1862 年 7 月得了肋膜炎， 由於康復不完全， 結果導致肺結核。 他的有影響的朋友勸說政府給他一筆錢， 讓他到義大利的溫和氣候中休養， 於是他到義大利過了這個冬天。 第二年春天， 在他返回德國的旅程中， 他對他訪問過的許多義大利城市的藝術寶藏非常喜愛。 他離開義大利時充滿了希望， 可是到達格丁根時， 他的病情更加嚴重了， 因爲他在回來的旅程中注意不夠， 穿過史普呂根山隘的厚厚的積雪時受了風寒。 第二年 (1863 年) 8 月， 他回到義大利， 先在比薩停留， 他的女兒伊達 (Ida) 出生了。 這年冬天格外寒冷， 阿諾河也結了冰。 5 月份， 他移居到比薩郊外的一個小鎮上， 在這兒， 他的妹妹海倫 (Helene) 去世， 他自己的病由於合併黃疸症而發展得越來越嚴重。 使他非常遺憾的是， 他不得不拒絕比薩大學提供給他的教授職務。 格丁根大學慷慨地延長他的休假期， 以使他能在比薩渡過下一個冬天。 在比薩， 他被義大利的數學界朋友所包圍， 實際上義大利數學家 E. 貝蒂 (Betti)、 F. 布廖斯奇 (Brioschi)、 及 F. 卡索拉蒂 (Casorati) 在 1858 年訪問格丁根時就結識了黎曼， 在黎曼等人的影響下， 義大利現代數學得到了復興。 不過黎曼病情進一步惡化， 他非常想家。 在萊格豪恩和熱那亞謀求恢復健康未成之後， 他在 10 月份回到了格丁

根， 在那裡渡過了冬季。 這段時期， 一旦體力許可， 他就進行研究工作。 1865 年， 他發表了生前最後一篇論文 “關於 θ 函數的零點”(*Über das Verschwinden der Theta–Functionen*)。 爲了做恢復健康的最後努力， 他回到義大利， 他的最後的日子是在大湖畔的謝拉斯卡別墅中度過的。 死後他被安葬在比甘左勒公墓。

去世之前， 黎曼又得到一系列榮譽。1866 年 3 月他被選爲柏林科學院國外院士 (因當時德國尚未統一， 柏林科學院屬於普魯士王國， 而黎曼所在的格丁根屬漢諾威王國)， 同時被選爲巴黎科學院通訊院士， 1866 年 7 月 14 日被選爲英國皇家學會的國外會員。

黎曼的著作不多， 生前除了博士論文之外， 只發表了十篇論文。他去世之後， 戴德金接手他的全集編輯工作， 戴德金在 1868 年發表了黎曼就職演說、就職論文等三篇文章。連同另外四篇共十八篇論文是他正式發表的全部論文。這十八篇論文同十二篇遺稿由戴德金及 H. 韋伯 (Weber) 編輯， 作爲《黎曼全集》(*Bernhard Riemann's Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*) 於 1876 年出版， 後加進一些遺稿並補充一些遺稿內容於 1892 年再版。 1902 年， M. 諾特 (Noether) 和 W. 威延格 (Wirtinger) 編輯出版《黎曼全集， 附錄》(*Gesammelte Mathematische Werke Nachträge*)， 其中收進三份講演及一些數學註記。 1892 年版及 1902 年版合訂本於 1953 年再版。 1990 年， R. 納拉西姆漢 (Narasimhan) 編輯《黎曼全集》最新版本， 除了 1892 年及 1902 年版全部內容外， 還加進新材料及十幾篇研究論文及資料。 黎曼講課筆記已有多種出版， 但有的很難說是黎曼講課的忠實記錄。

黎曼是對現代數學影響最大的數學家之一， 我們從他當時的數學水準來看， 他作爲偉大的分析學家， 其成就可以分成八個領域來論述。 前四個領域是關於複分析方面的， 他第一個有意識地將實域過渡到複域， 開創了複變函數論、代數函數論、常微分方程

解析理論及解析數論諸方向；後四個領域主要涉及實分析，在積分理論、三角級數論、微分幾何學、數學物理方程等方面取得重大突破。重要的是一個多世紀之前的成就卻直接同現代數學中的拓撲方法、一般流形概念、聯繫拓撲與分析的黎曼－洛赫定理、代數幾何學特別是阿貝爾簇以及參模等緊密相連，他的空間觀念及黎曼幾何更預示著廣義相對論，正是他觸發了現代數學的革命性變革。

一、複變函數論

黎曼與柯西及魏爾斯特拉斯被公認爲複變函數論三大奠基人。但他們的出發點及研究方向各有不同：柯西代表分析方向。黎曼代表幾何方向，魏爾斯特拉斯代表函數論方向，在黎曼發表他的博士論文之前，柯西已對複變函數論進行了三十年之久的研究，他已得出複變函數的合理定義，得出柯西－黎曼方程，還發現了複變函數的積分，並得出其積分定理，得出留數、柯西積分公式以及冪級數展開式。他和他的後繼者對於多值函數也有所涉及，但柯西並不太理解多值函數。他甚至對極點與支點的區別也不太清楚。他遺留下的這個領域正是黎曼發揮他的創造性的地方。

1. 通過複變函數的導數定義，建立複變函數論的基礎

黎曼給單值解析函數下了一個嚴格的定義：他定義

$$w = f(z) = u + iv$$

在一點及其鄰域內解析，如 u、v 連續可微並滿足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{、} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{。}$$

這就是後來所說的柯西－黎曼方程。這個方程以前也出現過，但

黎曼第一個明確提出函數 w 的導數 $\frac{dw}{dz}$ 的存在性是指 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 的極限必須對於 $z+\Delta z$ 趨向於 z 的每一條途徑都相同。

2. 對多值函數定義黎曼曲面

這是黎曼最重要的創造之一。對於複平面的區域，他定義分歧覆蓋曲面，使得對於多值函數 $f(z, w) = 0$，z 的每一個值，如果有 n 個 w 值同它對應，就引進 z 平面上 n 葉覆蓋曲面，每一葉對應 w 值的一個分支。而且在每一葉上都引進一個點對應 $z = \infty$。但是這 n 葉覆蓋曲面並非彼此無關地重疊在 z 平面之上，而是在 w 取值相同的點 (稱爲支點) z 處相重合成一點，這樣就得到多值函數 $f(z, w) = 0$ 的黎曼曲面，它的本質在於如果 z 在函數 $f(z, w) = 0$ 黎曼曲面 (即在某些點相重的 n 葉覆蓋曲面的集合) 上變動時，w 成爲 z 的單值函數。說到底，黎曼曲面即多值函數的單值化曲面。爲了更好地描述函數值的變動情況，黎曼引進分支截線的概念，分支截線是連接兩個支點的連線。當 z 穿過某一個分支截線時，w 值就從一個分支變到另一個分支，於是黎曼曲面的各葉通過分支截線相互連接在一起。有了黎曼曲面，單值函數的某些定理就可以推廣到多值函數，黎曼就這樣推廣柯西積分定理，不過他假定函數的解析區域在黎曼曲面上是單連通的。

3. 黎曼曲面的拓撲

黎曼是第一個研究曲面拓撲的人，他引進橫剖線的方法來研究曲面的連通性質。對於具有邊界的曲面，橫剖線是兩端點落在邊界上的不自交曲線 (對於閉曲面情形，它就退化爲一條簡單閉曲線)。對於平面或球面，任意閉曲線可以把它分成兩部分，我們稱爲單連通曲面。對於非單連通曲面，須要用一些橫剖線把它分開，它才能成爲單連通曲面。黎曼定義連通數 (他稱爲基

數 Grundzahl) 來刻劃連通性。 一個曲面稱爲 N 連通的或連通數爲 N，如果能用適當的 $N-1$ 條橫剖線把它變成一個單連通曲面。 黎曼建立了黎曼曲面的支點數目與連通數之間的關係： 設黎曼曲面的支點爲 r_1、 $\cdots$ 、 r_r， 在 r_i 處有 w_i 葉相重， 整個曲面有 q 葉， 則連通數

$$N = \sum_i w_i - 2q + 3 。$$

4. 黎曼曲面上的函數論

黎曼研究的基本問題是黎曼曲面上函數的存在性及唯一性問題。 他比以前數學家的先進之處在於， 函數的存在不必通過構造出解析表達式來證明， 函數可以通過其奇點來定義， 這對後世數學有重要影響。 關於黎曼曲面上的函數論， 他首先對單連通區域 "證明" 兩個基本定理：

(1) 如果一個函數 $u(x,\ y)$ 在區域 Q 內是調和函數， 即滿足拉普拉斯方程

$$\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 ，$$

則 u 具有所有階導數且是一個解析函數 $f(z)$ 的實部。

(2) 黎曼在 1851 年論文末尾宣佈所謂黎曼映射定理： 兩個給定的單連通區域 (包括黎曼面上的單連通區域) 可以一對一地保形地相互映射， 一個區域的一個內點和一個邊界點可以映射到另一個區域上任意選取的一個內點和一個邊界點上。

5. 狄利克雷原理

黎曼給出其證明並有效地表述及運用狄利克雷原理， 這個原理是他從狄利克雷的課程中學來的。 在他之前， 高斯、 G. 格林 (Green) 及 W. 湯姆遜 (Thomson， 即後來凱文勳爵 (Lord Kelvin)

也用過， 其中斷言， 如果積分

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \ dxdy$$

有極小値， 則存在一個函數 u， 使該積分達到極小。 但魏爾斯特拉斯對此原理產生過懷疑。 F. 克萊因 (Klein) 評論說："黎曼有著完全不同的意見， 他完全認識到魏爾斯特拉斯批評的正確性及合理性， 但是他說過，"正如有一次魏爾斯特拉斯曾告訴我那樣， 他用狄利克雷原理只是因爲它是手頭好用的、 方便的工具， 他還說， 他的存在定理仍是正確的。" 歷史的確證明了黎曼的數學直觀的天才是多麼驚人。

二、 阿貝爾函數論

關於阿貝爾函數， 黎曼發表過兩篇文章： 一是 "阿貝爾函數論"(*Theorie der Abel'schen Functionen*)， 一是 "論函數的零點" (*Über das Verschwinden der The ta–Funktionen*)， 是前一篇的續篇。 前一篇的由四部分構成， 是他生前發表最深刻的、 有豐富內容的著作。

阿貝爾積分及阿貝爾函數是橢圓積分、 超橢圓積分以及橢圓函數、 超橢圓函數的推廣， 所謂阿貝爾積分是指形如

$$\int R(W,\ Z)dZ$$

的積分， 其中 $R(W,\ Z)$ 表示 W、 Z 的有理函數， 同時 W、 Z 滿足代數方程 $f(W,\ Z) = 0$。 雖然橢圓積分及超橢圓情形已經得到很好的處理， 但是一般情形是對當時數學家能力的試金石。 正因爲如此， 黎曼和魏爾斯特拉斯才由於他們研究阿貝爾函數的卓越成果而取得他們在數學界的卓越地位。 黎曼正是因爲有了黎曼曲面這個工具， 才能得心應手解決這方面的問題。

1. 阿貝爾積分的表示及分類

黎曼對由 $f(Z,\ W)=0$ 定義的黎曼曲面上所有阿貝爾積分進行了分類。

第一類阿貝爾積分， 在黎曼曲面上處處有界。 線性獨立的第一類阿貝爾積分的數目等於曲面的虧格 p，如果曲面的連通數 $N=2p+1$， 這 p 個阿貝爾積分稱爲基本積分。

第二類阿貝爾積分， 在黎曼曲面上以有限多點爲極點。

第三類阿貝爾積分， 在黎曼曲面上具有對數奇點。

每一個阿貝爾積分均爲以上三類積分的和。

黎曼還引進相伴曲面觀念。 設黎曼面由 $F(S,\ Z)=0$ 定義， F 對 S 是 n 階， 對 Z 是 m 階， 則相伴曲面由 $Q(S,\ Z)=0$ 定義，Q 對 S 是 $n-2$ 階， 對 Z 是 $m-2$ 階， 這時第一類阿貝爾積分表爲

$$\int Q(S,\ Z)dZ/\left(\frac{\partial F}{\partial S}\right)\text{。}$$

黎曼面上的有理函數也可藉助相伴曲面來表示。

2. 黎曼 − 洛赫定理

這是代數函數論及代數幾何學最重要的定理。 黎曼得到的黎曼不等式， 是黎曼 − 洛赫定理的原始形態， 黎曼研究的出發點之一是黎曼面上指定單極點的亞純函數的數目， 他證明以 μ 個給定一般點爲極點的單値函數形成 $\mu-p+1$ 維線性簇， 但對於特殊一組 m 個點， 維數 L 還要增加， 因此黎曼得出黎曼不等式

$$L\geq\mu-p+1\text{。}$$

黎曼的學生 G. 洛赫 (Roch) 補充一項使之成爲等式， 此即代數函數論及代數幾何中心定理。 把黎曼 − 洛赫定理推廣到代數曲面已極爲困難。 1954 年， F. 希策布魯赫 (Hirzebruch) 將它推廣到一般代數簇， 其後 A. 格羅登迪克 (Grothendieck) 進一步推廣， 阿蒂亞 − 辛格指標定理也是它的推廣。

3. 黎曼矩陣、 黎曼點集與阿貝爾函數

每虧格爲 p 的黎曼面 X 上所有一階全純形式有一基 ω_1、 $\cdots$、 ω_p， X 上有 $2p$ 條互不同倫的閉曲線 (同調基) r_1、 $\cdots$、 r_{2p}， 造 $2j$ 個複 p 維向量

$$\pi_i = \left(\int_{r_j} \omega_1, \cdots, \int_{r_j} \omega_p \right) \in C^p \text{，} j = 1 \text{、} \cdots \text{、} 2p \text{。}$$

它們在實數域上線性獨立， 在 C^p 中生成格 Λ， 則 C^g/Λ 是複環面爲 X 的雅可比簇， 黎曼通過適當選取 $(\omega_1, \cdots, \omega_p)$ 及 $(r_1, \cdots, r_{2p})$ 使 $2p \times p$ 矩陣

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_{2g} \end{pmatrix} \text{具有} \begin{pmatrix} I \\ B \end{pmatrix} \text{的形式，}$$

其中 I 爲 $p \times p$ 單位矩陣， B 爲複對稱矩陣， 其虛部爲正定， 這種矩陣 Π 或 B 稱爲黎曼矩陣。 它滿足黎曼等式及黎曼不等式， 稱爲黎曼週期關係。 黎曼認識到週期關係是非退化阿貝爾函數存在的充分且必要條件， 但他既沒有表達完全， 也沒有提供證明。 魏爾斯特拉斯儘管花了很大力氣， 仍未能得出一個完全證明。 最後 H. 龐加萊 (Poincaré) 完成了證明 (1902)。

4. 函數及雅可比反演問題

爲了研究雅可比簇， 黎曼推廣雅可比 θ 函數， 引進黎曼 θ 函數， 其定義爲 p 個複變量 z_1、 $\cdots$、 z_p 的函數

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \theta(z_1, \cdots, z_p; B) \\ &= \sum_{n_1, \cdots, n_p \in z} \exp\left\{ \pi i \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} b_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + 2\pi i \sum_{\alpha=1}^{p} n_\alpha z_\alpha \right\} \end{aligned}$$

其中 $B = (b_{\alpha\beta})$， α、 $\beta = 1$、 $\cdots$、 p。 顯然， $\theta(z)$ 的零點對格子間的平移保持不變。 $\theta(z)$ 的零點集在 $J(x)$ 內的像 Θ 稱爲 θ 除子。

有了 θ 函數， 黎曼定義阿貝爾－雅可比映射

$$A: X \to J(X) 。$$

它把 $x \in X$ 映到 $\left(\int_{x_0}^{x} \omega_1, \cdots, \int_{x_0}^{x} \omega_p\right)$，其中 $x_0 \in X$ 是選定基點。 他證明了下面兩個定理。

(1) 阿貝爾定理： 在黎曼面上指定兩組點集 $(x_1, \cdots, x_k)$、$(y_1, \cdots, y_k)$，$x_i \neq y_j$，i、$j = 1$、 $\cdots$ 、k，則在 X 上存在一個亞純函數以 $(x_1, \cdots, x_k)$ 爲零點， 以 $(y_1, \cdots, y_n)$ 爲極點的充分必要條件是

$$\sum_{j=1}^{k} A(x_j) = \sum_{j=1}^{k} A(y_j) 。$$

阿貝爾原來的定理是關於代數微分的積分的加法定理， 黎曼首先認識到它與亞純函數的關係。

(2) 阿貝爾函數的雅可比反演定理： 如 $e \in J(x)$，$W' \not\subset +e$ 且 X_1、 $\cdots$ 、X_p 爲 X 上 $\theta(A(x)-e)$ 的零點， 則

$$\sum_{j=1}^{p} A(x_j) = e - K ，$$

其中 K 是不依賴於 e 的常數， 且 $(x_1, \cdots, x_p)$ 除順序之外是唯一的。 雅可比反演問題是十九世紀最重要問題之一， 除了橢圓積分及超橢圓積分情形之外， 一直未獲解決。 魏爾斯特拉斯在 1856 年解決該問題， 但全文一直到 1902 年才發表。

黎曼晚年的一個成就是證明 $p = 3$ 情形的托雷里 (Torelli) 定理， 即 $(J(X), \Theta)$ 決定 X。 爲此他把 θ 函數推廣成具有特徵的 θ 函數。 利用這種廣義 θ 函數及其導數在 0 點的值即所謂 θ 常數， 就可以定出虧格爲 p 的黎曼面所依賴的參數。

5. 雙有理變換的概念和參模

黎曼對於由兩個代數函數 $F(s, z) = 0$、 $F_1(s_1, z_1) = 0$ 定義的黎曼面，引進了一個等價關係， 即雙有理等價， 也就是通過

$(s,\ z)$ 與 $(s_1,\ z_1)$ 之間的有理函數一一對應，使 F 變到 F_1 或 F_1 變到 F。以後的代數幾何學，研究雙有理不變量及雙有理等價類成爲中心課題。對於平面代數曲線，黎曼提出描述虧格爲 p 的雙有理等價類集合的問題。黎曼通過 v 函數推出 $p > 1$ 時這集合依賴於 $3p-3$ 個任意複常數，他稱這些常數"類模"(Klassenmoduln)，後簡稱爲模或參模 (Moduli)，當參模是"一般的"(既不滿足特殊條件) 時，黎曼給出該參模等價類中定義方程 $F(s,\ z) = 0$ 的最小階數。關於參模的結構的研究是現代數學的熱門話題。

三、超幾何級數與常微分方程

黎曼在 1857 年的論文中把超幾何級數稱爲高斯級數。超幾何級數最早是歐拉在他的《積分學原理》第二卷 (1769) 給出的。他研究超幾何方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

並給出其級數解

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{r(r+1)2!}x^2 \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)3!} + \cdots \end{aligned}$$

他稱之爲超幾何級數。他在其它論文中還給出其積分表示和一些關係式。高斯在 1812 年的論文中把 y 記作 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$，他認識到超幾何級數幾乎包含天文學計算中用到的所有微擾展開式，特別包含巴塞耳函數、勒讓德 (球) 函數爲其特例。高斯證明超幾何級數的收斂性，建立了一些關係式。E.E. 庫默爾 (Kummer) 在 1836 年進一步得出超幾何級數許多性質及關係式。黎曼的成就在於他把超幾何級數及超幾何微分方程由實域擴充到複域，並且避開研究函數必須用其具體表達式來計算的傳統而用公理的方法得出高斯、庫

默爾等人通過繁複計算才得出的關係式。 他最重要的成就在於把複變函數論引進常微分方程而預示微分方程的解析理論。 他的具體作法是引進複值函數 P 函數

$$P\left\{\begin{matrix} a, & b, & c & \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{matrix}\right\},$$

它滿足三個條件： (1) 除了 a 、 b 、 c 之外， P 是 x 的有限單值函數； (2) 任何三個 P 函數 P' 、 P'' 、 P''' 都存在線性關係

$$C'P' + C''P'' + C'''P''' = 0，$$

其中 C' 、 C'' 、 C''' 是常數； (3) P 函數可寫成 $C_\alpha P^{(\alpha)} + C_{\alpha'}P^{(\alpha')}$ 使

$$P^{(\alpha)}(x-Q)^{-\alpha} \text{ 、 } P^{(\alpha')}(x-Q)^{-\alpha'}$$

在 $x = a$ 處仍是單值， 且既 $\neq 0$， 也 $\neq \infty$， 同樣， P 之數可表爲

$$C_\beta P^{(\beta)} + C\beta' P^{(\beta')}，$$
$$C_\gamma P^{(\gamma)} + C_{\gamma'}P^{(\gamma')}，$$

分別在 $x = b$、 $x = c$ 具有類似性質， 且六個量 α 、 β 、 γ 、 α' 、 β' 、 γ' 滿足下面兩個條件： ① 差 $\alpha - \alpha'$ 、 $\beta - \beta'$ 、 $\gamma - \gamma'$ 均非整數； ② $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 1$。

黎曼在他 1857 年 2 月寫的一篇遺稿 (於 1876 年發表)“具有代數係數的線性微分方程的兩個一般定理”(*Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differential gleichungen mit algebraischen Coefficienten*) 中， 引進了單值變換 (Monodromy)。 這思想在黎曼關於高斯級數的論文中已見端倪。 高斯知道， 超幾何微分方程有三個奇點 0、 1、 α， 它作爲二階微分方程有兩個獨立特解 y_1 和 y_2， 其它解均爲這兩解的線性組合。 黎曼的思想是當 y_1 、 y_2 沿繞奇點的路

經變化時必經歷線性變換

$$\begin{aligned} y_1' &= C_{11}y_1 + C_{12}y_2 \text{,} \\ y_2' &= C_{21}y_1 + C_{22}y_2 \text{。} \end{aligned}$$

對於所有繞奇點的路經， 這些變換組成群。 他證明對於超幾何微分方程， 單值群的性質可完全決定群函數的性質。 在遺稿中， 他把結果推廣到 m 個奇點 n 個獨立函數的情形， 他證明給定線性變換後， 這 n 個獨立函數滿足一個 n 階線性微分方程， 但他沒有證明這些奇點 (支點) 和這些變換可以任意選取， 從而留下了著名的黎曼問題。 希爾伯特把它列入二十三個問題中的第 21 問題， 從而被稱爲黎曼 − 希爾伯特問題。 在一些肯定情形解決之後， 1992 年， 俄國數學家通過反例宣佈這個問題已被否定解決。

四、 解析數論

黎曼是現代意義下解析數論的奠基者， 生前他只在 1859 年發表過一篇論文 “論給定數以內的質數數目”(*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*)。 在黎曼之前， 高斯曾對 x 以內的質數數目 $\pi(x)$ 猜想有漸近公式

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{。}$$

黎曼並沒有證明質數定理， 甚至連提也沒有提到它。 黎曼的目標是具體求出 $\pi(x)$ 或者更確切地說， 與 $\pi(x)$ 密切相關的函數 $\zeta(s)$ 的無窮級數的明顯表示。 黎曼第一個指出要解決這個問題， 首先要研究作爲複變量 $s = \sigma + it$ 的 ζ 函數， 特別是它的零點的分佈。 歐拉在證明質數無窮多時已經得出過實變量的 ζ 函數

$$\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-x}} \right) \text{。}$$

黎曼把 ζ 函數由實變量過渡到複變量， 並證明： (1) $\zeta(s)$ 是 s 的解析函數， 除了在 $s = 1$ 處有一個單極點之外， 在全平面正則； (2)

$\zeta(s)$ 滿足函數方程

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\cos\frac{1}{2}s\pi\Gamma(s)\zeta(s)\text{；}$$

(3) $\zeta(s)$ 在 $s=-2$、 -4、 -6、 $\cdots$ 處有零點， 且除了 s 的實部屬於 $[0,\ 1]$ 的帶狀區域時可能有複零點外， 沒有其它的零點。

黎曼在論文中指出六個猜想：

(1) 他斷言，$\zeta(s)$ 有無窮多個複零點， 全都位於臨界帶狀區域 $0\leq\sigma\leq 1$ 上。

(2) 設 $\zeta(s)$ 在矩形 $0\leq\sigma\leq 1$、 $0\leq t\leq T$ 間， 零點的數目爲 $N(T)$， 他用簡單的複變函數論推斷當 $T\to\infty$ 時， $N(T)$ 近似等於

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\text{。}$$

(3) 他定義複變函數

$$\xi(s)=\frac{s(s-1)}{2}\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\zeta(s)\text{。}$$

用 ρ 表示 $\xi(s)$ 的變根， 則 $\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|}$ 發散、 $\sum\limits_{\rho}\frac{1}{|\rho|^2}$ 收斂。 其中 $\sum\limits_{\rho}$ 表示對所有複根求和。

(4) 他簡單證明 $\xi(s)$ 的乘積公式

$$\xi(s)=\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)\text{，}$$

但他沒有考慮 $\sum\limits_{\rho}\log(1-\frac{s}{\rho})$ 的虛部， 也沒有考慮其收斂性， 因此證明是不完全的。

(5) 他猜想 “非常可能” 全部複零點的實部都等於 $\frac{1}{2}$， 這就是通常所說的黎曼猜想。

(6) 黎曼在論文的後半部得出 $\pi(x)$ 與 $\zeta(s)$ 關係的公式， 即

$$\Pi(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) + \int_{x}^{\infty} \frac{1}{u^2-1} \frac{du}{u \log u} + \text{常數}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \cdots \\ \mathrm{li}(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} + \int_{1+\epsilon}^{x} \right) \frac{du}{\log a} \text{。} \end{aligned}$$

通過黎曼的工作及他的猜想， $\zeta(s)$ 在解析數論中處於中心的地位。 1859 年， 黎曼在給魏爾斯特拉斯的信中提到 $\zeta(s)$ 在臨界帶上的另外一種表示， C.L. 西格爾 (Siegel) 追查這個表示的下落， 在格丁根圖書館手稿部發現黎曼的一個不完全的手稿。 西格爾對它進行了仔細的研究， 得出所謂黎曼 − 西格爾公式， 它大致是把 $R_e(s) > 1$ 的級數部分同 $R_e(s) < 0$ 的函數方程所得出的表示部分結合在一起， 給出 $\zeta(s)$ 在臨界帶的較好的漸近表示。 黎曼給出誤差的完全漸近展開， 還作了許多數值計算。 但西格爾工作發表時， G. 哈代 (Hardy) 及 J. 李特爾伍德 (Littlewood) 於 1991 年已發表了類似的結果並給出誤差項的上界， 這說明黎曼方法對求臨界帶上 ζ 函數的行爲很重要。

五、 實分析 − 函數觀念、 黎曼積分、 傅里葉級數、 連續不可微函數

數學分析的許多進展是與傅里葉級數分不開的。 黎曼在他的就職論文 “論函數通過三角級數的可表示性”(*Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch einer trigonometrische Reihe*) 中， 對傅里葉級數的歷史作了回顧。 J. 傅里葉 (Fourier) 在他的《 熱的解析理論 》(*Théorie analytique de la Chuleur*， 1822) 中指出， 任意的 (有界)

在 $(-\pi,\ \pi)$ 上定義的函數可以展開成形如

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的三角級數， 其中

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx\text{，} \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\text{。} \end{aligned}$$

但是傅里葉對於函數、 積分的概念十分模糊， 更沒有收斂的觀念。 狄利克雷在 1829 年的論文中第一次給出給定函數 $f(x)$ 的傅里葉級數收斂並且收斂到 $f(x)$ 本身的充分條件， 從而給傅里葉分析奠定嚴格基礎。 他還第一次給出嚴格的函數概念。 黎曼在討論狄利克雷的論文之後， 提出： (1) 更進一步擴充函數的觀念； (2) 對於更一般的函數建立可積性理論； (3) 建立 $f(x)$ 的傅里葉級數收斂到 $f(x)$ 的充分且必要條件。 爲此， 黎曼得出函數是實數集之間的任意對應這個現代定義， 並且對函數定義黎曼可積性， 把可積函數從連續函數擴大到在有限區間內具有無窮多個間斷點的函數。 他給出兩個黎曼可積性的充分必要條件： 一個是 $f(x)$ 的振幅大於給定數 λ 的區間總長度並隨各區間長度趨於零而趨於零， 另一個是定義各區間的上和及下和

$$\begin{aligned} \overline{S} &= M_1\Delta X_1+\cdots+M_n\Delta X_n\text{，} \\ \underline{S} &= m_1\Delta X_1+\cdots+m_n\Delta X_n\text{。} \end{aligned}$$

M_i 及 m_i 分別是區間 ΔX_i 上 $f(x)$ 最大值及最小值， 令 $D_i = M_i - m_i$， 則 $f(x)$ 黎曼可積的充要條件對於 Δx_i 的一切選法都有

$$\lim_{\max\Delta x_i\to 0}(D_1\Delta x_1+\cdots+D_n\Delta x_n)=0\text{。}$$

黎曼積分雖然後來爲 H. 勒貝格 (Lebesgue) 所發展， 但黎曼積分仍是數學特別是物理應用的主要分析工具。 有了更一般的函數及其黎曼可積性的觀念， 黎曼進一步發展了傅里葉級數理論， 他刻畫可用三角級數表示的函數如下：

令

$$(T)\frac{1}{2}a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

爲三角級數， 滿足當 $n\to\infty$ 時， a_n 、 $b_n\to 0$。 把 (T) 形式積分兩次， 得出連續函數

$$F(x)=\frac{1}{4}a_0x^2+\alpha x+\beta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\text{。}$$

其中 α 、 β 爲實常數。 記

$$(\Delta_h^2F)(x)=\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}\text{。}$$

黎曼得出：

(1) (可表性定理) 如果級數 (T) 在點 x 收斂， 則

$$\lim_{h\to 0}(\Delta_h^2F)(x)$$

存在且在 x 處等於 (T) 的和。

(2) 無須任何收斂性假定， 有

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{2h}=0\text{。}$$

(3) (局域性定理) 三角級數 (T) 在一個區間 I 上的收斂性與發散性只依賴於 F 在 I 上的值。 實際上， G. 康托爾 (Cantor) 還從黎曼的結果中看出唯一性定理： 若三角級數 (T) 對於每一 $x\in[0,\,2\pi]$ 收斂於 0， 則 (T) 恆等於 0， 即 $a_n=0\ (n\geq 0)$ 、 $b_n=0\ (n\geq 1)$。 通過這個定理， 康托爾得出唯一性集並進而建立點集論。

除此之外，黎曼是最早認識到連續性及可微性的區別的數學家之一，他在上述論文末尾造出一個在任意小區間上都有無窮個點沒有導數的連續函數。他的例子如下：設 (x) 爲 x 與最接近的整數之差，當 x 是兩整數的中點時，令 $(x)=0$，因此

$$-\frac{1}{2}<(x)<\frac{1}{2}\text{，}$$

他定義

$$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{4}+\frac{(3x)}{9}+\cdots\text{，}$$

則 $f(x)$ 對所有 x 值收斂且可積。$F(x)=\int f(x)dx$ 對一切 x 連續，但在 $f(x)$ 的間斷點上不可導。

魏爾斯特拉斯在講課中提到，黎曼在 1860 年授課時給出過一個處處不可微的連續函數的例子，即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2}\text{。}$$

但他講他不知道黎曼是否肯定這函數處處不可微或是在某些點可微。實際上，有人在 1970 年證明這函數在 π 的某些有理倍數的點可微。也許魏爾斯特拉斯已知道這一點，因此，魏爾斯特拉斯頭一個給出眞正處處不可微連續函數的例子

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^nx)\pi\text{，}$$

當 $0<b<1$、$ab>1+\frac{3\pi}{2}$、a 爲奇數時是處處不可微函數。

六、幾何學

黎曼的空間觀念使數學及物理學發生空前的變革。但是這種先進的思想一直到半個多世紀之後才逐漸變得明顯起來。黎曼的幾何論文有兩篇，一篇是他的授課資格的演講，另一篇是所謂 “巴黎之

作”， 即 “論熱傳導問題”(*Über eine Frage der wärme leitung*)。 他在這些論文中的思想後來爲許多數學家所發展。

1. 黎曼的空間觀念

黎曼的演講是面對整個哲學系的教師的， 爲了使聽衆理解， 整個講演充滿哲學味道， 只有一個數學公式。 黎曼在講演中提到他受到兩方面的影響： 一是高斯關於曲面的研究， 一是赫爾巴特的哲學思想。 全文分三大部分， 第一部分是 n 維流形的觀念， 第二部分是 n 維流形的測度關係， 第三部分是對空間的應用。

黎曼首先引進 n 維流形的概念。 他的 n 維流形實際上是 n 重延量， 他把流形的部分稱爲量子 (Quanta)， 把流形分爲連續流形與離散流形。 他的重要思想是把連續流形的理論分兩類， 一類只涉及區域關係， 另一類涉及大小關係， 用現代術語來講， 前者是拓撲的理論， 後者是度量的理論。 康德認爲空間是先驗的概念。 黎曼不同意這種觀點， 他認爲如果空間是先驗的， 那也只是空間的拓撲部分， 至於空間的度量必須由經驗確定。 黎曼提到空間的構造， 他的造法與現代不同， 他造的 $n+1$ 維流形是通過 n 維流形同 1 維流形遞歸地構造出來的。 反過來， 低維流形可以通過高維流形固定某些數量簡縮而成。

黎曼的空間觀念發展了高斯內蘊幾何學的思想， 流形不依賴於外圍空間。 它本身可以是彎曲的， 因此每一點在該空間中局部不一定相同， 爲了刻畫局部度量， 黎曼選擇最簡單的度量

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j \text{。}$$

其中 $|g_{ij}|$ 是正定對稱二次型， 具有這種度量的流形或空間， 後來稱爲黎曼流形或黎曼空間。 但黎曼指出， 高階度量也是容許的， 因此， 他在某種意義下預示了芬斯拉空間。 如果流形的線元

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \text{，}$$

他稱爲平坦的。 在 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個獨立變量中， n 個變量決定其位置， 另 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個變量決定流形的度量關係。 因此， 在每一點的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個曲面方向上的曲率給定之後， 這流形的度量關係就完全確定了。 假如每點， 每一方向上曲率都等於 α， 那麼這個常曲率流形的線元可表示爲

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

這就是黎曼在就職演說中的唯一公式。 當常曲率流形曲率爲 0 時， 便得出平坦流形， 即與歐氏空間局部等度量。

黎曼就職演說第三部分涉及我們所在的三維空間， 實際上是三維流形。 首先， 他給出空間局部歐氏的三個條件。 由於空間即使是局部歐氏的 (平坦的)， 我們也可以賦予它不同的度量， 因此不可能期望只從拓撲的考慮中得出歐氏平行定理。 空間的度量必須由實驗來確定。 他認爲天文學將判定哪種幾何學適合我們這個物理空間。 數學家所能作的只是分析我們的基礎假定是什麼。 黎曼還明確指出空間的無界性 (封閉性) 與無限性的區別， 而且空間的無界性比起我們對外在世界的其它經驗有著更大的確定性。 他的文章最後說， 作爲現實基礎的空間或者是離散流形， 或者是連續流形， 如果這樣， 度量關係的基礎必須從外界通過作用其上的結合力得到， 判別這點則是物理學而非數學的事。 最後， 他暗示了他的空間的非歐性。

2. 黎曼幾何學

在 1854 年的就職論文中，黎曼已經建立黎曼空間的幾何學，即黎曼幾何學的基礎。他給出黎曼度量，提出截面曲率的概念，在所有這些曲率中，可以由 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 個推得其餘，他還引進常曲率空間概念，並給出常曲率空間的黎曼度量。在 "巴黎之作" 的第二部分，黎曼研究了下列問題：在什麼條件下，$\sum\limits_{i,j} g_{ij}dy^idy^j$ 可以變成已知形式 $\sum\limits_{i,j} a_{ij}dx^idx^j$，其中 a_{ij} 是給定常數係數。他引進了 P_{ijk} 以及 $(ij,\ kl)$，相當於 (略有不同) 後來所謂克里斯托弗記號及黎曼曲率張量的分量。他給出一個二次微分變成另一個的必要條件，並用 $(ij,\ kl)$ 來表示。他還給出 ds^2 可變成常係數的條件。他的工作很快由繼承人所發展，在物理學上起著積極的作用。

七、數學物理

黎曼在數學物理方面最主要的論文是 1860 年關於聲波的論文 "論有限振幅平面聲波的傳播"(*Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*)。無窮小振幅的聲波傳播問題早已解決，黎曼考慮一維有限振幅的情形。黎曼假定氣體壓強 P 以一種確定關係依賴於其密度 ρ，他證明初始擾動分裂爲兩個波：壓縮波與膨脹波，壓縮波壓縮得越厲害，波速增加得越快；而膨脹波膨脹得越厲害，波速就減少得越快。這樣，有限振幅的波傳播中，波形不斷改變，而且形成速度的間斷 − 這就是激波。黎曼不僅從理論上證明激波的存在，而且在數學上提供了新的方法，他解的是滿足一定初值條件的二元波動方程

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial r\partial s} - m\left(\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{\partial\omega}{\partial s}\right) = 0\text{。}$$

他引進共軛方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}+\frac{\partial m v}{\partial r}+\frac{\partial m v}{\partial s}=0，$$

且 v 滿足一定的條件。 這個共軛方程一般較容易解， 得出的解稱爲黎曼函數。 黎曼還得到聯繫 ω 及 v 的公式， 於是可得出原來方程的解。 黎曼的方法後來爲許多人所推廣。

八、 物理學

黎曼一生都對物理學保持濃厚的興趣。 他致力於研究熱學、 聲學、 電學、 磁學、 光學， 並多次講課涉及這些問題。 他的物理論文不完全是理論推導， 而且有許多實驗數據。 晚年， 他的 “耳的力學”(*Mechanik des Ohres*) 沒有完成， 經人整理發表在醫學刊物上。

黎曼的研究在生前就已受到重視， 在他去世後不久發表的論文以及《全集》第一版 (1876) 出版後， 更是得到廣泛的傳播。 但是， 他的許多思想一直到三、 四十年之後才爲人們所認識， 這段歷史比較複雜， 現簡述如下：

(1) 複分析。 從十九世紀七十年代起， 魏爾斯特拉斯的冪級數觀點佔統治地位， 從柯西－黎曼路線來研究解析函數的相對較少， 這種情況一直到 1900 年 E. 古薩 (Goursat) 的論文發表之後才改變。 他證明 $f(z)$ 連續且導數存在足以保證解析性， 從而由柯西及黎曼的路線出發可以推導魏爾斯特拉斯的結果， 使三個方向融合在一起。 除此之外， 黎曼的論文中一個主要問題是狄利克雷原理。 1870 年， 魏爾斯特拉斯明確指出黎曼的狄利克雷原理不嚴格， 這就使得當時許多數學家繞開狄利克雷原理而採取其它辦法來解狄利克雷問題。 其中包括 H. 施瓦茲 (Schwarz) 的交錯法 (1870)， C. 諾伊曼 (Neumann) 的算術平均法 (1870) 以及 H. 龐加萊 (Poincaré) 的掃散法 (1890) 等， 而把狄利克雷原理丟在一邊。 一直到 1900 年左右， D. 希爾伯特 (Hilbert) 才指出在一定

條件下，狄利克雷原理的確成立，從而恢復了它作爲有力數學工具的地位。黎曼的拓撲學思想沿著兩條路線發展，一條由義大利的 E. 貝蒂 (Betti) 開始，他把黎曼的結果向高維推廣，在 1871 年引進貝蒂數，後經龐加萊發展成爲組合拓撲學的基礎；另一條由 W.K. 克利福德 (Clifford)、F. 克萊因 (Klein) 和他的學生 W. 迪克 (Dych) 所發展，他們通過各種辦法簡化黎曼面，從而開創了曲面的拓撲學。

(2) 代數函數論。黎曼開創了現代代數幾何學，但他用的是超越方法。當他在世時，R.F.A. 克萊布什 (Clebsch) 就開創了幾何方向，從而眞正地把代數幾何學建成。其後又有 A.W.von 布里爾 (Brill) 及 M. 諾特 (Noether) 的代數幾何方向，R. 戴德金 (Dedekind) 的代數方向，L. 克羅內克 (Kronecker) 的算術方向。但黎曼的原始思想－虧格、雙有理變換、參模等概念以及黎曼－洛赫定理始終是指導其發展的一條主線。

(3) 微分方程。1865 年，L. 富克斯 (Fuchs) 在黎曼思想基礎上創立了複域的常微分方程論。在他的影響下，龐加萊創立了自守函數理論，克萊因定義了單値群。

(4) 黎曼 ζ 函數。黎曼 ζ 函數從一出現就構成解析數論的核心。沿著黎曼指出的方向 (1896 年)，J. 阿達瑪 (Hadamard) 等證明了質數定理，黎曼的六個猜想中的五個在 1890－1920 年間全部獲解，最後一個猜想即黎曼猜想是解析數論的首要問題，其解決將是數學中最重要的突破之一。

(5) 黎曼幾何。黎曼的授課資格演講在 1868 年發表之後，隨即引起許多新工作來處理和發展他的新幾何。E. 貝爾特拉米 (Beltrami)、E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 及 R. 李普希茨 (Lipschitz) 在 1868－1870 年發表論文，解決了黎曼在 “巴黎之作” 中研究的等價問題，即在兩個不同的坐標系 $x^1, \cdots, x^n$ 與 $x'^1, \cdots, x'^n$ 中給

定兩個二次微分形式

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \sum_{i,j} g_{ij}dx^i dx^j \text{，} \\
ds'^2 &= \sum_{i,j} {g'}_{ij}dx'^i dx'^j \text{，}
\end{aligned}
$$

其中 $1 \leq i$、 $j \leq n$， 求存在坐標變換

$$x'^i = x'^i(x^1, \cdots, x^n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

將一個微分形式變到另一個的條件。 克里斯托弗的解中包含後來所謂 "克里斯托弗記號" 及協變微分的概念。 在此基礎上 G. 里奇 (Ricci) 於 1887 − 1896 年建立了張量分析， 並在 1901 年同他的學生 T. 列維 − 齊維塔 (Levi–Civita) 合寫一篇總結性的論文， 對這種算法給出更明確的表述， 從而使黎曼幾何成爲強有力的工具。 1916 年， A. 愛因斯坦 (Einstein) 的廣義相對論用到黎曼幾何與張量分析， 並把幾何與物理自然地結合， 促成黎曼幾何與相對論物理的進一步發展， 特別是產生一系列更一般的幾何學 (包括黎曼預示過的芬斯拉空間的幾何學) 及聯絡的概念。 H. 外爾 (Weyl) 又發展所謂規範場觀念， 這些工作推動了數學和物理學的新的統一。

文　　獻

原始文獻

[1] *Bernhard Riemann Gesammelte Mathematisch–Werke*, Springer, 1990。

[2] *Riemanns Vorlesungen zur Funktionen theorie*, Allgemeiner Teil, E. Neuenschwander ed., Technische Hochschule Darmstadt, 1987

研究文獻

[3] J. Dieudonné, *History of algebraic geometry*, Wadsworth. Inc, 1985。

[4] H.M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academi Press, 1974。

[5] A. Brill and M. Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 3(1894), S. 107－566

[6] F. Klein, *Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, Leipzig, 1882。

[7] F. Klein, *Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 4 (1894/1895), S. 71－87。

[8] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik in 19. Jahrhundert*, 2 Bände, Springer, 1926－1927。

[9] M. Bollinger, *Geschichfliche Entwicklung des Homologiebegriffs*, Archive for History of Exact Sciences, 9 (1972/1973), 94－170

[10] U. Bottazzini, *Riemanns Einfluss auf E. Betti und F. Casorati*, Archive for History of Exact Sciences, 9 (1977/1978), 27－37。

[11] R. Courant, *Bernhard Riemann und die Mathematik der letzten hundert Jahre*, Die Naturuissen schaften, 14 (1926), S. 813－818, 1265－1277。

[12] E. Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Boston Mass., 1980。

[13] E. Scholz, *Herbart's influence on Bernhard Riemann*, Historia Mathematica, 9(1982), 413－440。

[14] E. Scholz, *Riemanns früh Notizen zum Mannigfaltikgeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie*, Archive for History of Exact Sciences, 27(1982), 213－232。

[15] E. Neuenschwander, *A brief report on a number of recently discovered sets of notes on Riemann lectures and on the transmission of the Riemann Nachlass*, Historia Mathematica, 15 (1988), 101－113。

[16] R. Dedekind, *B. Riemann's Lebenlauf*, Gesammelte mathematische Werke, 1892, 539－558。