貝 爾 特 拉 米

貝爾特拉米， E. (Beltrami， Eugenio) 1835 年 11 月 16 日生於義大利克雷莫納 (Cremona)； 1900 年 2 月 18 日卒於羅馬。數學。

貝爾特拉米之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Beltrami.html

貝　爾　特　拉　米

王　青　建
(遼寧師範大學)

貝爾特拉米， E. (Beltrami， Eugenio) 1835 年 11 月 16 日生於義大利克雷莫納 (Cremona)； 1900 年 2 月 18 日卒於羅馬。 數學。

貝爾特拉米出生在一個藝術之家。 祖父喬瓦尼 (Giovanni) 是一位寶石雕刻師， 擅長製作浮雕寶石。 父親歐金尼奧 (Eugenio) 從事微型繪畫業。 貝爾特拉米本人是位音樂愛好者， 對數學與音樂之間的聯繫尤感興趣， 這或許得益於家庭的藝術薰陶。

1853 年貝爾特拉米就讀於帕維亞 (Pavia) 大學學習數學。 這是義大利的著名學府之一， G. 卡爾達諾 (Cardano)、 G. 薩凱里 (Saccheri)、 L. 馬斯凱羅尼 (Mascheroni) 等數學名家曾在此學習或執教。 貝爾特拉米在校師事於當時任應用數學教授的 F. 布廖斯奇 (Brioschi)， 並在以後的科學生涯中與這位教授有很相像的經歷。 布廖斯奇早年也在帕維亞大學讀書， 後來回母校執教十年， 1865 年任參議員， 1884 年起任國家科學院 (林琴學院) 院長； 貝爾特拉米亦爲母校執教了十五年， 1898 年任國家科學院院長， 次年成爲參議員。 這種師生足跡的巧合在數學史較爲罕見。

1856 年， 貝爾特拉米因經濟困難被迫離開學校， 爲一個鐵路工程師當秘書。 最初在維羅那 (Verona)， 後來到了義大利文化古都米蘭。 除工作外， 業餘繼續進行數學研究， 在那裡寫出並發表 (1862 年) 了他的第一篇數學論文。

1861 年 3 月義大利王國建立。同年貝爾特拉米在波倫亞 (Bologna) 受聘爲代數和解析幾何候補教員。 第二年正式執教於波倫亞大學， 同時擔任了公共教育代理人及評議員。1864 年轉

教於比薩大學，任測地學教授。1866 年返回波倫亞大學任理論力學教授。在比薩時與數學家 E. 貝蒂 (Betti) 成爲好友；在波倫亞又與擅長幾何研究的 A.L. 克雷莫納 (Cremona) 共事，由此開始了他數學創造的輝煌時期，其聲望與日俱增。1870 年羅馬成爲義大利首都，新擴建的羅馬大學立即聘請貝爾特拉米爲該校理論力學教授，但他直到 1873 年才赴任。同年當選爲國家科學院院士。1876 年又回到母校帕維亞大學任數學物理教授，同時講授高等力學。1891 年再去羅馬大學執教。1899 年在他擔任國家科學院院長職務僅一年和成爲王國參議員的當年卒於羅馬。

貝爾特拉米的數學著作主要分爲兩部分：1872 年以前著重論述曲線和曲面的微分幾何學，其中尤以構造僞球面模型最爲著名。1872 年以後轉向應用數學研究，在流體力學、位勢理論、波動理論、熱力學、光學、彈性理論及電動力學方面做出一定成績。

十九世紀是微分幾何學長足發展時期，C.F. 高斯 (Gauss)、G. 拉梅 (Lamé)、G.F.B. 黎曼 (Riemann) 等人做了很好的奠基工作。由於在數學理論及應用方面都有廣泛的研究課題，微分幾何學吸引了大批數學家。貝爾特拉米置身於這種學術環境中，又有其老師及同事的影響，從事數學研究之初便全力投入這一領域。

1862 年貝爾特拉米發表的第一篇論文便論述曲線的微分幾何。1864 年他在《數學雜誌》(*Giornale di Matematiche*) 第二期上發表文章 “分析應用於幾何的研究” (*Ricerche di analisi applicata alla geometria*)，擴展了法國數學家拉梅幾年前在較局限的範圍內關於微分不變量的研究，第一個對曲面論的不變量作了研究，給出了具有幾何意義的兩個微分不變量，被認爲是微分幾何中不變量方法應用的開端。第二年他又以同樣的題目在該學刊第三期上發表文章，指出只有在常曲率曲面上，線 (元) 素能寫成 $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ 的形式，即只有測地線能用 u 與 v

的線性表示來描述。 對正曲率 R^{-2}， 該形式是

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2[(v^2+a^2)du^2 - 2uvdudv + (u^2+a^2)dv^2] \\ &\quad \times(u^2+v^2+a^2)^{-2} \text{。} \end{aligned}$$

就局部而言， 測地線在這種情形中如同一個球面上的大圓。 將 R 變爲 iR， a 變爲 ia $(i=\sqrt{-1})$， 則

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2[(a^2-v^2)du^2 + 2uvdudv + (u^2+a^2)dv^2] \\ &\quad \times(a^2-u^2-v^2)^{-2} \text{。} \end{aligned}$$

通過這種方式得到的線 (元) 素定義常曲率 $-R^2$ 的曲面， 爲在 $u^2+v^2<a^2$ 區域內的測地線提供了一種新的幾何模型。 如果在這樣一種曲面上的測地線能與非歐幾里得幾何的 “直線” 相一致的話， 這種幾何確實就是羅巴切夫斯基的非歐幾何。 1866 年， 他又在《數學紀事》(*Annali di Matematica*) 第 7 期上發表文章， 獨立認識到常曲率曲面是非歐幾里得空間， 並給出雙曲幾何模型。

1868 年， 貝爾特拉米在《數學雜誌》第 6 期上發表了他最重要的數學著作 “論非歐幾何學的解釋” (*Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*)， 系統總結了他這幾年在微分幾何學中的成果， 並用它們來建立非歐幾何的模型。 非歐幾何在十九世紀二、 三十年代創立後只有少數數學家對它感興趣， 原因之一是其抽象性大大超出人們的想像。 高斯去世 (1855) 後他的有關非歐幾何的通信及手稿引起人們的注意， 因名家效應導致一批人轉向對它的研究。 貝爾特拉米這篇論著的發表是非歐幾何發展史上的一個里程碑。 其主要結論是： 如果非歐幾何中有矛盾， 這種矛盾也將在曲面的歐氏幾何中出現。 它從理論上消除了人們對非歐幾何的誤解。

貝爾特拉米一開始就宣稱： 如果數學家對非歐幾何學的研究成功， 將註定會深深地改變經典幾何學的整個面貌。 對於非歐幾何已取得的成果， 他主張 “冷靜地， 同時避免狂熱與非難地討論它

們是科學家的職責。 並且， 在數學科學中， 新概念的成功不能否定業已取得的事實。” 以此爲宗旨， 他在曲面上給出雙曲幾何的有限表示法， 證明了只要把曲面上的測地線看作直線， 雙曲平面有限部分的幾何在負的常曲率的曲面上成立， 曲面上的長度和角度就是歐氏曲面上的長度和角度。 對一個這樣的曲面， 貝爾特拉米爲了避免迂迴說法， 乾脆稱之爲 “僞球面” (pseudospherical)， 它是由一條名爲曳物線 (tractrix) 的曲線繞漸近線旋轉而成的。 這是非歐幾何平面有限部分的模型。 貝爾特拉米相信這是非歐幾何的 “一個眞實的基礎 (substrato)”， 並據此證明了 “一塊” 羅巴切夫斯基平面可以在負的常曲率曲面上實現。 他巧妙地利用 “映射” 將一種幾何變爲另一種幾何， 使得非歐幾何從虛幻中走了出來， 成爲眼見爲實的 “正派” 幾何。 該文第二年被法國《高等師範學校科學年鑑》(*Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*) 全文譯載。 他的方法又被 F. 克萊因 (Klein)、 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 等人發揚光大， 發展成爲數學思維的一個新領域。 其中比較著名的例子是進一步闡述非歐幾何的貝爾特拉米－克萊因模型。

貝爾特拉米承認他的這篇論述僅對平面部分有效， 同時懷疑將其推廣到空間是否有效。 就在此時， 他讀到了由 J.W.R. 戴德金整理出版 (1867) 的黎曼文集中 “關於幾何基礎的假設” (*Ueber die Hypothesen*， *welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 一文， 其中的流形概念對他有很大啓發。 接著他就在《數學紀事》上發表文章 “常曲率空間的基本理論” (*Teoria fondamentale deglispazi di curvatura costante*， 1868－1869)， 將他關於非歐幾何的表述擴展到 $n > 2$ 的流形中， 並研究了某些特殊的僞球面， 得到高維非歐幾何學的一些結果。 他的工作使一個半世紀以前 G. 薩凱里 (Saccheri) 關於平行公設的第一個眞正的科學研究 (1733) 得以復活， 並且有了一個較爲圓滿的結局。 巧合的是薩凱里不僅也是義大利數學家， 而且也曾在帕維亞大學長期執教。 該校學者取得的

幾何成果或許可看作其影響深遠的一個方面。

貝爾特拉米等人的研究能導出下述結論：在常曲率面上可以有三種幾何－負的常曲率面上的非歐幾何、正的常曲率曲面上的球面幾何以及零曲率曲面上的歐氏幾何，這三種幾何彼此不相矛盾，各構成一個完整的體系，但又歸於一個總體系中－一個幾何的“三位一體”。

貝爾特拉米在“論非歐幾何學的解釋”中創用的方法對射影幾何發展史亦有一定影響。他以圖形的射影性質爲基礎，在兩個曲面之間建立一一對應，利用坐標變換推出“平面射影幾何在常曲率曲面上就它們的測地線而言是正確的”的結論，繼而建立了“沒有任何平行前提假定的平面射影幾何的基礎”。這是射影幾何應用的良好例證。此外他還在純粹數學中論述過高等代數的有關問題。

貝爾特拉米在應用數學研究中的突出成就就是在分析問題中引進幾何方法，這成爲他有關論著的特性，例如“流體動力學研究”(*Richerche sulle cinematica dei fluidi*，1871－1874) 等等。他僅論述位勢理論的著作就有約五十種之多，其中包括了彈性理論、流體動力學、靜電學與電動力學、磁學與電磁學。他將他的幾何研究應用於數學物理中，試圖把力學、位勢理論和彈性理論擴展到非歐幾里得空間。在曲線空間中，位勢理論和彈性理論的系統化結構的基礎是微分參數理論，其主要定義和結果都表示爲第一類或第二類微分參數。爲了將這些結果推廣到空間，給出任意坐標系下的微分參數是必要的。貝爾特拉米對此做了奠基工作。他還從數學角度解釋一些物理現象，例如得到常曲率空間各向同性物體的平衡方程，給出麥克斯韋方程的力學解釋，闡述了彈性理論中應力分量的“貝爾特拉米方程”。他在羅馬大學多年開設彈性理論講座，並提出一些有關的基本理論和概念，如內阻力、光顫動、光折射等等。他的研究還涉及熱力學、光學、熱的傳導和機械問題。他被譽爲多產作者和“義大利的一位著名分析

大師”。

貝爾特拉米去世後，羅馬科學院開始編輯他的《數學文集》(*Opere matematiche*)，1902 年出版了第一卷，其中有克雷莫納寫的一篇長達 13 頁的貝爾特拉米傳記梗概。這套文集共有四卷，直到 1920 年才在米蘭出齊。其中將他在純粹數學和應用數學方面的成果進行了彙總。數學中還有些概念和公式是以他的名字命名的，例如微分參數、映像、曲率公式等，這標誌著人們對他的崇敬與紀念。

文　　獻

原始文獻

[1] E. Beltrami, *Opere matematiche*, 見 *Facoltà di Scienze della R. Università di Roma*, Ed. 4 Vols., Milano： Hoepli, 1902－1920

[2] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea*, Giornale di matematiche, 6(1868),284－312。

[3] E. Beltrami, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, Annali di matematica, ser. 2 (1868－1869), 232－255。

研究文獻

[4] L. Bianchi, *Eugenio Beltrami*, 見 *Enciclopedia italiana*, Vol. 6, 1930, 581。

[5] G.H. Bryan, *Eugenio Beltrami*, Proceedings of the London Mathematical Society, 32 (1900), 436－439。

[6] G. Loria, *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*, Bibliotheca mathematica, ser. 3, 2 (1901),392－440。

[7] D.J. Struik, *Beltrami, Eugenio*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 1, 1970, 599－600。

[8] R. Bonola, *Non-euclidean geometry*, Dover Publications, Inc., New York, 1955, 130－139, 234－236。

[9] M.J. Greenberg, *Euclidean and non-euclidean geometries-development and history*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1974, 127－129, 183－185。

[10] M. Kline,*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972, Chap. 37－38。

[11] R. Tazzioli, *Ether and theory of elasticity in Beltrami's work*, Archive for History of Exact Sciences, 46 (1993), 1, 1－38。