喬　丹

喬丹，C. (Jordan，Camille) 1838 年 1 月 5 日生於法國里昂 (Lyon)；1922 年 1 月 22 日卒於巴黎。數學。

喬丹之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Jordan.html`

喬 丹

馮 長 彬　　　賴 章 榮

(贛南師範學院)

喬丹， C. (Jordan， Camille) 1838 年 1 月 5 日生於法國里昂 (Lyon)； 1922 年 1 月 22 日卒於巴黎。 數學。

喬丹出身於一個名門望族。 他的父親畢業於巴黎綜合工科學校， 是一位工程師； 他的母親是畫家 P.P. de 沙畹 (Chavannes) 的妹妹； 他的一位叔祖與他同名， 是一位相當有名的政治家， 曾參加過從 1789 年法國革命到波旁 (Bourbon) 王朝復辟之初的許多活動； 他的堂兄 A. 喬丹因發現 “較小物種” 而聞名， 該物種至今仍以其名 (Jordanons) 稱之。 作爲一名卓越的學生， 喬丹具有從 A.L. 柯西 (Cauchy) 到 H. 龐加萊 (Poincaré) 等法國數學家的共同經歷： 他十七歲以優異成績考入巴黎綜合工科學校； 1861 年， 他的博士論文發表於《綜合工科學校雜誌》(*Journal de l'ècole Polytechnique*， 12， 113 − 194)； 直到 1885 年， 他在名義上一直是一名工程師。 該職業爲他提供了相當充足的時間用於數學研究， 他發表的 120 篇論文中的大部分都是在他作爲一名工程師而退休之前寫出的。 從 1873 年到 1912 年退休， 他同時在綜合工科學校和法蘭西學院任教。 1881 年被選爲法蘭西科學院院士； 1895 年又被選聘爲聖彼得堡科學院院士； 1885 年至 1921 年一直擔任法國《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathematiques Pures et Appliquées*) 的主編及發行人； 1921 年 1 月逝世於法國巴黎。

一般認爲， 喬丹在法國數學家中的地位介於 C. 埃爾米特 (Hermite) 與龐加萊之間。 他與他們一樣， 是一位多才多藝的數學家。 他發表的論文幾乎涉及到他那個時代數學的所有分支。

他早期發表的一篇論文，用組合觀點研究多面體的對稱性，屬後來命名的“組合拓撲學”範疇，這在當時還是非常獨特的。

他作爲代數學家，年僅三十歲時就得以成名。在其後的幾十年中，他被公認爲群論的領頭人。

1845 年以前，數學家們對 E. 伽羅瓦 (Galois) 的深奧理論還一無所知。J. 劉維爾 (Liouville) 和 A. 塞瑞特 (Serret) 使之通俗化的努力也未引起重視。喬丹是使伽羅瓦理論顯著增色的第一人，也是第一位在伽羅瓦開闢的方向上系統研究有限群及其應用者。他於 1869 年證明了一個基本結果：群 G 的任一合成列

$$G \supset H \supset H' \supset \cdots \supset I \tag{1}$$

(其中每項都是其前一項的一個正規子群，且在它們中間不可能再插入其它正規子群) 中，相鄰群的階的商 (若不計及出現次序) 由該群唯一確定 (*Jour. de Math.*，14 (1869)，2，129 − 146)。實際上此定理早已出現在喬丹的“關於伽羅瓦的評述” (*Commentaire sur Galois*，刊於 *Math. Annalen*，1869，1，152) 一文中，雖然在那裡未給出證明。商群的符號也是喬丹 1872 年引進的。1889 年，O. 赫爾德 (Hölder) 證明了更強的喬丹 − 赫爾德定理：若不計及出現的次序並視同構爲同一，則商群 G/H、H/H'、$\cdots$ 唯一確定。換句話說，對群 G 的任何合成列 (1)，有相同的商群集合。

1870 年，喬丹把他前十年中關於置換群的知識及其與伽羅瓦關於方程理論的聯繫組織到他的 667 頁巨著 −《置換和代數方程專論》(*Traité des substitutions et des équations algébraique*，*Gauthier-Villars*，1870。下文簡稱爲《專論》) 中去。該名著給出了伽羅瓦理論頭一個全面而清楚的介紹。

在《專論》的第一篇“關於同餘”中，喬丹首先總結了 P. de 費馬 (Fermat) 和 C.F. 高斯 (Gauss) 關於整數間同餘和冪剩餘的主要結果，然後追隨伽羅瓦的工作，詳述了伽羅瓦域 $GF(q)$ 的結構。

《專論》篇幅的三分之一多被第二篇 “關於置換” 所佔。 喬丹和幾乎所有他的前人一樣， 把置換群定義爲置換的這樣一種集合： 集合中任兩成員的積仍屬於該集合。 我們今天在群的定義中作爲公設的其它性質， 被看作爲這種群的明顯性質或作爲附加條件而不是在定義中指定。 《專論》對置換群明白地建立了同構和同態的概念。

在本篇中， 喬丹還利用把一個群分解成其子群的陪集的方法證明：“有限群的任一子群的階是該群的階的因子。” (現稱爲拉格朗日定理， 實際上拉格朗日只證明過 “置換群的任一元的階是該群的階的因子。” 但喬丹慷慨地認爲此定理屬於拉格朗日和柯西。) 又追隨柯西， 證明了 “一個群的階可被 p 整除， 則該群包含一個 p 階的元素。” 接著， 喬丹定義了 “可遷” 及 “本原” 的概念， 證明了一些與之有關的定理。

喬丹《專論》第二篇第三章討論的是他稱之爲線性置換的概念， 寫成矩陣的形式就是

$$x' = Ax$$

在大多數情況情況下， 係數域是一個質域 $GF(p)$， 但在某些情況下也會把質域擴充到伽羅瓦域 $GF(p^r)$。 爲了把矩陣 A 簡化爲衆所周知的 “喬丹標準形”， 他必須把 “特徵方程” $\mathrm{Det}(A - \lambda I) = 0$ 的根加到基域上去。 喬丹利用他的標準形來確定與給定的一個置換 A 可交換的線性置換集。 他研究的主要問題是伽羅瓦域 $GF(p)$ 上我們現在稱之爲 “典型群” 的合成。 他實際上是一般線性群和有限域上典型群結構的最早研究者。

《專論》第三篇中， 喬丹十分巧妙地把他的結果應用於廣泛的問題之中。 他確定了一些方程的伽羅瓦群的構造， 這些方程是以一些幾何構形的參數 (如三次曲面上的二十七條線、 四次曲面上二十八條二重切線及庫默爾曲面上 16 個二重點、 $\cdots$ 等等) 爲根的。

喬丹的典型群知識也是解決可解有限群問題的關鍵。 對此問

題，喬丹從一開始就付出了巨大的努力。現在看來，要對所有可解群給出一個能刻劃它們各自特徵的完整分類似乎是不可能的。喬丹大概也認識到這一點，於是，在《專論》第四篇中，他致力於建立能機械地給出所有具有給定階數 d 的可解群的方法。他設想的解決方案實際上是一個龐大的遞推系統：假設階數爲 d 的質因子 p 的乘方 p^n 的可解群已完全清楚，然後再給出 d 階的可解群。這也許只有理論上的價值，但在研究該方案的過程中，他得到了許多重要的新概念，如群的極小正規子群及特徵爲 2 的域上的正交群 (他稱其爲 "次交換群") 等等。

《專論》包含了喬丹對 H. 阿貝爾 (Abel) 提出的問題的解答，即確定一個給定次數的、能用公式求解的方程，以及識別一個給定的方程是否屬於這一類。可解方程的群都是交換群，喬丹稱它們爲阿貝爾群，而阿貝爾群這個術語此後也就用於交換群。喬丹還導出了一個方便應用的、可解群的充要條件：群 L 可解，當且僅當存在的正規子群序列

$$I \subset F \subset G \subset H \subset \cdots \subset L$$

使商群 F/I、G/F、H/G、$\cdots$ 皆爲阿貝爾群。

《專論》問世後，喬丹的名聲遠播法蘭西內外，國外許多學生都渴望能聽到他的報告。J. 迪厄多內 (Dieudonné) 對《專論》也作了高度評價 (*Jordan's Oeuvres*，1961，卷 1)。

F. 克萊因 (Klein) 及 S. 李 (Lie) 於 1870 年來到巴黎與喬丹一起研究。這時的喬丹正研究一個全新的課題：三維空間中所有運動群的確定。他主要是受物理學家、礦物學家 A. 布雷威 (Bravais) 的啓迪開始此項研究的，布雷威爲確定晶體的可能結構而研究了運動群。喬丹於 1867 年發表的一篇題爲 "關於運動群" (*Sur les groupes de mouvemente*) 的短文中宣稱，已經完全確定三維歐氏空間中所有可能的剛體運動群；他還發表了 "關於運動群的研究報告" (*Annali di Mat.*，2，1868 – 1869)。喬丹考慮的不只是有

限的剛體， 而是整個空間的螺旋運動， 平移和旋轉爲其特例。 運動群被定義爲這樣一個集合， 它包含其中任二元素的乘積， 且每個元素都有逆。 喬丹限定自己只考慮拓撲意義下的閉集。 他既考慮了離散平移群、 連續平移群及它們的各種混合類型， 又考慮了離散旋轉群、 連續旋轉群的各種類型。 還通過平移、 旋轉的合併而得到所有的閉運動群。 喬丹因此開創了在群的標題下研究幾何變換的工作。 這很可能就是李及克萊因分別構想出他們的 “連續變換群” 及 “離散變換群” 理論的源頭 (這兩種類型都能在喬丹的分類中找到)， 也對克萊因埃朗根綱領 (Erlanger Programm， 用無限變換群對幾何進行分類) 的提出產生過直接影響。 1870 年 4 月至 6 月間， 來自挪威的李與來自德國的克萊因住在巴黎兩個鄰近的房間， 克萊因回憶說： “我們住在兩對門， 並且主要通過個人接觸、 特別是和青年數學家接觸尋找科學靈感。 喬丹給我留下深刻的印象。 他的論置換的書剛出版， 它使我們覺得深奧莫測” (*Felix Klein*， *Gesammelte math. Abhandlungea*， I， 51)。

布雷威的工作還啓發喬丹著手研究他稱之爲群的解析表示， 即今所謂群的表示理論。 把置換群用形如

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \text{，} i = 1 \text{、} 2 \text{、} \cdots \text{、} n$$

的線性變換來表示， 是喬丹開創的。 十九世紀末至二十世紀初被 F.G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 等推廣到一切有限抽象群的表示上去。

喬丹在代數領域得到的最深刻結果是他的 “有限性定理”，《專論》出版後十二年他才證明。 第一個有限性定理是關於對稱群 σ_n (n 個元的所有置換組成的群) 的子群 G 的。 對這樣的群， 喬丹稱滿足上述條件的最小數 $c > 1$ 爲 “G 的級”： 存在 G 中一個置換， 它僅變動 c 個元。 他關於這些群的有限性定理是： 若 G 是本原群且不包含交錯群 u_n， 則存在一個絕對常數 A， 使

$n \leq Ac^2 \log c$ (換句話說，對給定的級數 c，只存在有限多個本原群與對稱群及交錯群不同)。

第二個也是最爲人熟知的有限性定理，產生於一個來源於線性微分方程理論的問題。L. 富克斯 (Fuchs) 已經確定了所有解均爲變量的代數函數的二階線性方程。喬丹把 n 階方程中的類似問題簡化爲一個群論中的問題：確定複數域上一般線性群 $GL(n, C)$ 的所有有限子群。顯然，對 $n \geq 1$，有無限多個這樣的子群；但喬丹發現，對一般的 n，$GL(n, C)$ 的有限子群的無限族是一個很特殊的類型。更確切的說，存在一個函數 $\varphi(n)$，使任一有限的 n 階矩陣群 G 都包含一個正規子群 H，H 在 $GL(n, C)$ 中共軛於一個由對角矩陣組成的子群，且使指數 $(G : H)$ 不大於 $\varphi(n)$。

喬丹的最後一個有限性定理是早些時候埃爾米特在整係數二次型理論中得到的結果的有力推廣。喬丹更一般地考慮所有 n 個變量的 m 次複係數齊次方程所成的向量空間，么模群 $SL(n, C)$ 作用於該空間；喬丹考察這種作用的軌跡 (即在么模代換下與一給定形式 F 等價的所有形式組成的集合)，考察該軌跡內具有 (複) 整係數 (即係數是高斯整數) 的形式。他把所有在 (複) 整數係數么模代換下等價的這種形式歸入同一個等價類中，其基本結果是，當 $m > 2$ 且 F 的判別式不爲零時，這些類的個數是有限的。

在分析學中，喬丹對嚴密證明的理解遠比他的大多數同時代人更確切。他把自己在綜合工科學校的講稿精心擴展而編出的《分析教程》(*Cours d'analyse*)，十九世紀八十年代初首次出版，被公認是當時最好的分析學教材。把《分析教程》第一版 (1882－1887) 同第二版 (1893－1896)、第三版 (3 卷，1909－1915) 作比較，可明顯看到嚴密性的改進。在該書的第一版中，喬丹給出了曲線的一個定義 (第 3 卷，593)，它是由連續函數 $x = f(t)$、$y = g(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ 表示的點的集合。喬丹要求他的曲線沒有多重點，因此對 t、$t' \in (t_0, t_1)$，有 $f(t) \neq f(t')$ 或 $g(t) \neq g(t')$，

或每個 $(x,\ y)$ 只存在一個 t。 這種曲線， 現稱爲 “喬丹曲線”。 在該書中， 喬丹還給出了閉曲線的概念， 它要求 $f(t_0) = f(t_1)$ 及 $g(t_0) = g(t_1)$； 敍述了簡單閉曲線把平面分成兩部分 (內部和外部) 的定理， 認識到該定理可進行數學證明並首次構思了這樣的證明 (雖然和許多數學家一樣， 喬丹本人給出的證明也有問題)， 這是喬丹對拓撲學的著名貢獻之一。 該定理第一個嚴密證明屬於 O. 維布倫 (Veblen)。 後來還被 J. 布勞威爾 (Brouwer) 及 S. 亞歷山德羅夫 (Alexandroff) 直接或間接推廣。

十九世紀最後十年， 喬丹積極參與現代分析的創立。 爲弄清平面區域 E 上的二重積分理論， 喬丹邁出了十九世紀容量 (他稱之爲 étendue) 理論中最先進的一步。 他對 $[a,\ b]$ 中的點集 E 引進內容量、 外容量及容量的概念， 並將之推廣到 n 維空間的點集， 還給出了可加性證明。 在他的《分析教程》第二版 (第一卷， 1893) 中， 寫進了他關於容量的研究及其對積分的應用， 還詳細說明了可由逐次積分求出重積分之值的條件。 喬丹的容量理論雖還不令人滿意， 卻比他的前人們 [包括 G. 皮亞諾 (Peano)] 優越。 有界變差函數概念的提出也歸功於他， 他還證明了這樣一個函數必可表爲兩個遞增函數之差。 此結果使他得以擴充曲線長度的定義 (最一般的定義是後人用測度的概念系統陳述的)， 並推廣熟知的傅里葉 (Fourier) 級數的收斂準則。 他指出： 可積函數的傅里葉級數在那樣一些點上收斂於

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]，$$

這些點各有一個鄰域， 使 $f(x)$ 在該鄰域內是有界變差的 (《分析教程》， 第二版， 1893， 67－72)。

對喬丹的《分析教程》， B.L. 范・德・瓦爾登 (van der Waerden) 評價說：“據我所知， 這是最早一部把整個經典分析作爲一個統一的、 完整的邏輯體系來描述的教科書， ⋯⋯ 對於我， 閱讀《分析教程》的每一章都是件愉快的事。”

文　　獻

原始文獻

[1] R. Garnier and J. Dieudonné, *Oeuvres de Camille Jordan*, eds., 4 vols., Paris, 1961－1964。 集中了喬丹的論文； 還載有 H. 勒貝格 (Lebesgue) 所寫訃文， 該文對喬丹的生平和工作作了介紹和評述 。

[2] C. Jordan, *Traité des Substitutions et des équations algebraique*, Paris, 1870； reper. Gauthier-Villars, 1957。

[3] C. Jordan, *Cours d'analyse*, 3 vols., 3rd edt., 1909－1915。

研究文獻

[4] J. Dieudonné, *Camille Jordan*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 7, 1973, 167－169。

[5] B. L. Van der Waerden, *A history of algebra*, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, New York, Tokyo, 1985。

[6] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。