達　布

達布，J.G. (Darboux，Jean Gaston) 1842 年 8 月 14 日生於法國尼姆 (Nimes)；1917 年 2 月 23 日卒於巴黎。數學。

達布之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Darboux.html

達　布

蔣　中　池

(鎮江師範專科學校)

達布， J.G. (Darboux， Jean Gaston) 1842 年 8 月 14 日生於法國尼姆 (Nimes)； 1917 年 2 月 23 日卒於巴黎。 數學。

達布生於淸寒之家， 父親早亡， 他早年在家鄉尼姆及蒙脫佩勒 (Montpellier) 讀完小學和中學， 1861 年秋， 他以第一名的成績同時考取了巴黎高等師範學校和工科大學， 但他選擇了前者。 一個如此富有才華的人， 竟放棄了將來可以成爲國家級工程師職位的機會， 而寧願要一個教師職業， 這是以往從未有過的， 當時著名的研究 F. 哥德 (Goethe) 的法國專家 J.J. 魏斯 (Weiss) 曾在當年 11 月 20 日的報刊上發表文章， 讚揚達布的選擇具有長久的價值和深遠的意義， 當時達布年僅十九歲， 便小有名氣了。

1864 年， 達布還在巴黎高等師範學校作學生時， 便發表了數學處女作， 內容是關於正交曲面 (sur les sections du tore) 的文章。 同年畢業， 在母校任助教， 這爲他開展深入研究正交曲面提供了機會。 1866 年 7 月他在母校通過了博士論文， 他的論文正是對正交曲面深入研究的成果。 以後， 他曾先後在家鄉尼姆公立中學、 路易斯公立中學、 法蘭西學院、 巴黎大學、 索邦大學任教。 1872 年他復受聘於母校再次任教， 從 1873 年到 1878 年他接替 J. 劉維爾 (Liouville) 主講理論力學的課程， 1878 年他任導師 M. 夏斯萊 (Chasles) 的助教， 1880 年他正式接替了夏斯萊的工作， 任高等幾何教授直至終身， 該年他所任教的高等幾何榮獲了夏斯萊獎。 從 1889 年至 1903 年， 他一直任理科部主任， 1884

年當選爲法國科學院院士， 1895 年被選爲聖彼得堡科學院通訊院士， 1900 年當選爲法國科學院終身院士， 1902 年被選爲英國皇家學會會員。 曾應聘爲巴黎大學教授、 巴黎大學理學院院長等職， 作爲一個著名人士出現在科學與社會的各種組織中。 他是許多科學學會、 教育團體、 行政機構的會員， 以及許多高等院校和科研團體等組織的榮譽成員， 總計超過 100 個。 他卒於巴黎馬札蘭宮官邸， 時爲巴黎科學院常務秘書。

十九世紀六十年代， 法國的數學如同德國一樣， 特別強調專門化。 C. 夏斯萊和 C. 埃爾米特 (Hermite) 正是當時數學界傑出的代表人物： 夏斯萊是地道的幾何學家， 埃爾米特是純正的分析學家。 而達布和 C. 喬丹 (Jordan) 卻使這兩個方面與自己的思想方法有機地結合了起來， 爲年輕一代更獨立地探討數學科學鋪平了道路。 1908 年達布出席在羅馬召開的國際數學家大會， 他在大會的報告中， 對十九世紀和二十世紀數學的特性進行了相互比較， 他認爲二十世紀以來數學研究已開始進入一個全新的階段， 並且開闢了完全未經探索的新領域； 他說到二十世紀那些勤奮而富有求知慾的英才， 他們甚至敢動搖數學大廈的基柱， 他們要求從根本上爲哲學提供新的、 而且是特別精確的數理文章， 注意研究數學起源、 自然規律和人們對事物的認識與理解； 他特別強調自己贊同年輕一代的這些傾向。

達布學識淵博， 同時擅長分析法與綜合法。 他是天才的幾何學家， 但他的研究一開始就有儘最大可能與數學所有不同的領域密切結合的思想， 他的幾何思想方法廣泛體現在分析學、 理論力學、 微分方程等學科中， 特別是在微分幾何的研究中表現得最突出， 所以達布研究的主要成就是在微分幾何和微分方程方面。

達布的研究思想方法和幾何學家 C. 蒙日 (Monge) 有所相似。 但他青年時代的三篇論文卻不是純幾何性質的： 第一篇論文 “偏導數方程” (*Sur Les équations aux dérivées partielles*， 1870)， 提出

了二階線性偏微分方程積分法，今天已以達布的名字命名，該論文發表後立即受到 M.S. 李 (Lie) 的重視，這種積分法是蒙日－安培理論進一步的發展；另兩篇論文是他研究 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 三角級數的成果。所謂達布上下積分便首次出現在他的“間斷函數理論” (*Sur la théorie des fonctions discontinues*) 中，此文還包含實數函數理論的許多結果。這些文章的發表，對法國數學強調嚴謹性產生了決定性的影響，尤以第三篇論文“大數字函數近似法” (*Sur Lápproximation des fonctions de très grands nombres*) 最爲典型，此論歸諸於 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的某些研究，並將其與 J.B.J. 傅里葉 (Fourier) 級數結合起來：用已知的實數奇點，估計一實數解析函數的傅里葉係數，然後將結果運用到多種多樣的、對應用來說有重要價值的特徵函數。J.H. 龐加萊 (Poincaré) 在估計擾動函數的高項時也經常使用達布的這一成果。

1873 年，達布在論文“代數曲線與曲面虛數理論” (*Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques et sur la thèorie des imaginaires*) 中論述了五球坐標 (pentaspherical coordinates)。1873－1878 年，他在巴黎大學講授力學，在此領域他同樣作了一系列研究，特別是關於力的平行四邊形公理及方向機械學的研究。

達布的主要成就，是對曲線和曲面理論的研究。正如其他幾何學家一樣，他也完全使用了解析式，尤其使用坐標系統解析法。他將多年下來教學講義的精髓彙集成兩本專著：《曲面通論教程》(*Leçons sur lathéorie général des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*，1896) 以及《正交系與曲線坐標》(*Leçons sur les systémes orthogonaux et les Coordonnées Currilignes*，1898)。在這兩本專著中，他對幾何學的擅長和幾何性的思想方法有了淋漓盡致的表現，他詳細研究了曲面理論、曲線坐標、曲線和曲面的變形、應用、與其它許多數學分支間的聯

繫， 不僅包括了他個人取得的許多重大研究成果， 而且還系統地介紹和總結了一個世紀以來曲線和曲面微分幾何學方面所取得的成就。

特別是《 曲面通論教程 》， 它不僅成爲一部曲面理論的經典著作， 而且是一部研究力學 、 變分法 、 偏微分方程 、 極値理論等學科的工具書， 這些學科之間的有機關聯從前沒有一個人比達布理解得更透徹 、 表達得更淸楚。 直到 A. 愛因斯坦 (Einstein) 發現引力論的時代才懂得充分估價如上研究的價値， 從而導致他的這部專著幾乎成爲每個數學家必備的手頭資料。

《 曲面通論教程 》的突出的特點， 是運用了移動三維坐標， 即活動標架。 在達布首創的活動坐標系中， 有一種稱爲達布標架， 用此標架可以展開有趣的曲面探討， 而不須要簡化到正規標架， 他把單參數標架族的概念推廣到依賴多個參數的情形， 從而使活動標架法與外微分結合， 成爲研究微分幾何學的有力工具。 在他這一專題研究中， 他以 C. 蒙日 、 K.F. 高斯 (Gauss)、 C. 迪潘 (Dupin) 的古典結果爲依據， 又充分運用了同時代人 J. 貝特朗 (Bertrand) 的結果。 在這個領域裡有許多概念是以他的名字命名的， 如達布二次曲面 、 達布曲線 、 達布切線 、 達布方法 、 達布定理等。

《 曲面通論教程 》的主要內容如下： (1) 曲線及曲面理論 、 運動學理論 、 構建移動三維坐標 、 一剛體的一或二參數運動化爲里卡特 (Riccatischen) 微分方程積分。 (2) 五球坐標理論及其在普通擺線理論中的應用。 (3) 提出並證明了曲率線達布定理： 設三函數 $x(u,v)$ 、 $y(u,v)$ 、 $z(u,v)$ 爲微分方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=A(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial u}+B(u,v)\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

的獨立解， 並且 $x^2+y^2+z^2$ 也是這個方程的一個解， 則曲面 $r(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$ 的參數曲線是它的曲率線， 而

且其逆也眞。他運用這一定理在 1872 年證明了李定理：在反演群的作用下，曲面的曲率線仍變爲曲率線。這是對微型曲面理論所作的深入而細膩的描述，已將 C. 蒙日、K.T.W. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 及 H.A. 施瓦茲 (schwarz) 的成果首次與李的思想進行了有機的聯繫。(4) 直、曲線重合理論的研究，探討了拉普拉斯方程和變換的應用。這些重合的焦點面與二階線性偏微分方程、拉普拉斯變換的關係以及方法的普遍化，黎曼已在研究聲波問題時考慮到，而達布對此作出了深入的研究。(5) 研究了變分計算的處理方法。(6) 研究曲面上的最短距離，提出一批大地投影和大地曲率概念。(7) 研究了 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 的微分參數以及魏因加滕 (Weingarten) 定律、恆定負曲率的曲面幾何學。(8) 研究了無限小變形、球面投影等。這些研究爲後來用於共軛微分方程的格林定理的完全推廣提供了理論基礎，事實上格林定理不是 G. 格林 (Green) 所證明的，1915 年達布證明並給出了現在通常所說的格林定理。

在正交系與曲線理論研究中，達布引入了所謂的“四圓坐標” (tetracyclic coordinates) 和“五球坐標”，對它們進行了幾何和分析的探討，並將這些理論充分應用在 N.H. 阿貝爾 (Abel) 代數整數定理關於 n 維正交系統的情形中，以及應用於其它新型的正交系統中，特別是對於曲線論的研究，他一反常人思想，以精緻的幾何直覺和對分析工具的熟練運用，不採用普通的方法，而獨樹一幟地利用了運動學的簡單原理：把曲線 $r(s)$ 看作質點運動的軌跡，把弧長 s 看作時間，則當 s 變化時，曲線在 s 點的活動標架一方面沿曲線

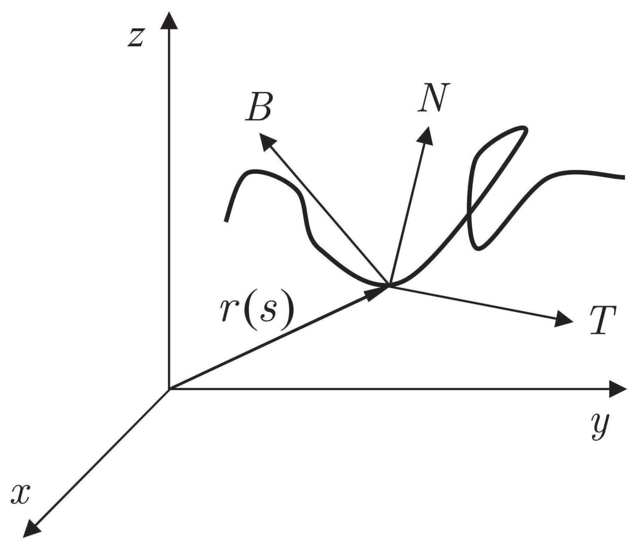

圖 1

作移動， 另一方面又繞 s 點作轉動 (見圖 1)。 轉動的瞬時角速度向量記爲 $\omega(s)$， 據運動學中速度疊加原理， 標架向量 $T(s)$ 的端點的瞬時速度是

$$\frac{d(r(s)+T(s))}{ds}=\frac{dr(s)}{ds}+\omega(s)\times T(s)\text{，}$$

於是有 $\frac{dT}{ds}=\omega\times T$。 同理得 $\frac{dN}{ds}=\omega\times N$， $\frac{dB}{ds}=\omega\times B$。 若記 $\omega=aT+bN+cB$， 注意到 N 的定義是 $N=\frac{dT}{ds}/|\frac{dT}{ds}|$， 就有 $0=B\cdot\frac{dT}{ds}=(\omega\times T)\cdot B=-\omega\cdot N$， 即 $b(s)\equiv 0$， 則

$$\frac{dT}{ds}=cN\text{、}\ \frac{dN}{ds}=-cT+aB\text{、}\ \frac{dB}{ds}=-aN\text{。}$$

由於 $c=|\frac{dT}{ds}|$ 是相鄰切線的交角對 s 的變化率， $|a|=|\frac{dB}{ds}|$ 是相鄰法線的交角對 s 的變化率， 表明 c 和 a 分別是曲線在 s 處的曲率和撓率， 則角速度向量爲 $\omega(s)=aT+cB=\rho^{-1}T+r^{-1}B$。 這一妙趣橫生的方法稱爲達布方法， 而向量 $\omega(s)$ 稱爲達布向量， 它爲曲線的整體性質研究帶來了方便。 關於測地線方面的研究， 他更緊扣動力學系統的關係， 獲得了求測地線的一種改進性方法： 若已知微分方程 $\nabla\theta=1$ 的一個解 $\theta=\theta(u,v,a)$， 即含有一個任意常數 a 的解， 則 $\frac{\partial\theta(u,v;a)}{a}=$ 常數， 便是測地線方程， 達布對此作了論證後也成爲一條定理。 達布還深入研究過極小曲面， 他證明了 $\mathcal{F}(u)=(A+B_i)u^{-2+ai}$ (A、 B、 a 爲實數) 所對應的曲面是渦線極小曲面， 並從中找到了許多規律。 例如 $f(u)=\frac{u^2}{2}$ 所對應的極小曲面的方程是 $x=\mathrm{Re}(3u-u^3)$、 $y=\mathrm{Re}(3iu+iu^3)$、 $z=\mathrm{Re}(3u^2)$， 也就是 $r=(3\xi+3\xi\eta^2-\xi^3$、 $\eta^3-3\eta-3\xi^2\eta$、

$3(\xi^2-\eta^2))$， 這是一個九次六階的代數曲面， 它的曲率線都是平面曲線， 漸近曲線均爲三次撓曲線。 達布不但研究並證明了這個曲面是極小曲面， 而且還提出了簡便的作圖法， 並據此引伸和歸納出一連串的規律： (1) 這曲面是九次代數曲面， 即它與任何一條直線有九個交點； (2) 直線 $z=0$、 $x=y$ 與直線 $z=0$、 $x=-y$ 都在曲面上， 而且是它的對稱軸； (3) 曲率線是曲線 ξ = 常數和 η = 常數， 各曲率線是虧格爲零的平面曲線， 而且所在平面是 $x+\xi z-3\xi-2\xi^3=0$、 $y+\eta z+3\eta+2\eta^3=0$； (4) 曲率線的球面像構成兩系圓周， 各圓周所在的平面都通過兩個定點， 而且這兩個定點又落到球面在一點的兩條直交切線上； (5) 漸近曲線的方程爲 $\xi+\eta$ = 常數， $\xi-\eta$ = 常數， 而且都爲三次撓曲線； (6) 曲面與旋轉面互爲變形； (7) 原曲面的附屬極小曲面都與原曲面有同一形狀； (8) 若已知二條拋物線 (焦點拋物線)$\rho_1(\xi)=(4\xi,\ 0,\ 2\xi^2-1)$、 $\rho_2(\eta)=(0,\ -4\eta,\ -2\eta^2+1)$， 連接 $\rho_1(\xi)$ 的任何點 ξ 與 $\rho_2(\eta)$ 的任何點 η， 並作連接線段的垂直平分平面， 則所有這些平面包絡成一個茵奈泊 (Enneper) 極小曲面。

在常微分方程方面， 達布研究了一階方程、 代數積分方程等， 他與 A. 凱萊 (Caylay) 在 1872 年間， 總結 H. M. 克雷洛夫 (Крылов)、 L. 歐拉 (Euler)、 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 等數學家在十九世紀發展起來的微分方程奇解的理論， 系統而完整地表達成爲現代的形式； 在全微分方程方面， 他利用交錯矩陣求秩適當選取坐標的方法， 簡明地解決了普法夫問題 (Pfaff's problem)， 亦稱爲達布定理； 在偏微分方面， 在對二階偏微分方程 $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0$ 的研究中， 他認識到如果根據問題的解中所含任意函數的數目來定義通解是不完全的， 他爲此重新給出了像現在所用的通解定義： 若一個解適當地選取它所含有的任意函數及常數後， 根據偏微分方程初值問題的柯西存在定理可以判定它的存在， 則這個解就稱爲一般偏微分方程的通解。 他總結了拉普

拉斯的級聯方法 (seriesś associations method)， 並將其應用於所有二階偏微分方程中， 他對用於非線性方程的蒙日方法作了比較精確的闡明， 被稱爲達布方程。

事實上， 達布在分析學理論方面也作過不少深入的研究， 他探討了連續的概念， 曾給出這樣的函數例子： 當從 $x=a$ 變到 $x=b$ 時， 這個函數取遍兩個給定值之間的一切值， 但它卻是不連續的函數， 比如函數

$$x=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}， & x\neq 0\\ 0， & x=0\end{cases}$$

取遍了從 $x=-1$ 到 $x=1$ 之間的一切值， 它卻在 $x=0$ 處不連續， 這樣， 連續函數的基本性質與保證函數連續性的條件便是兩回事， 這對分析基礎嚴密性產生了積極的影響， 它向人們提示了原先已被直觀地接受了的有關連續函數的性質， 還必須對它們進行嚴密的分析論證； 在定積分理論研究中， 他對閉區間上的有界函數可積性問題進行了仔細的研究， 1875 年他把黎曼提出但未給予證明的一個可積性條件闡述得十分完備， 證明了有界函數 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上可積的充要條件， 證明了推廣意義下可積函數的微積分基本定理的成立， 得到 “可測函數 L 可積的充要條件是測度爲零” 的定理， 提出了所謂的高積分、 低積分、 上限和、 下限和等許多後人以達布命名的概念。 例如， 1875 年引入的所謂達布和： 設 $f(x)$ 是定義區間 $[a,\ b]$ 上的一元實函數， 以任意方式在 a 和 b 之間插入一些分點 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$， 把整個區間分成若干小區間 $[x_{i-1},\ x_i]$， $i=1$、 2、 $\cdots$ 、 n。 設函數 $f(x)$ 在第 i 個小區間 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上的下確界和上確界分別爲 m_i 和 M_i， 作出和數

$$s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i、\ S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i，$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 是小區間 $[x_{i-1,}\ x_i]$ 的長度，稱 s 爲下積分或小和；S 爲上積分或大和，大和與小和統稱爲達布和。由此獲得定積分學的達布定理：當閉區間無限分細，且最大子區間的長度趨於零時，S 和 s 分別趨於 M 和 m，若 $M = m$，則有界函數在該閉區間上是可積的。他還進一步證明了，一個有界函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可積的充要條件是：$f(x)$ 的間斷點組成一個測度爲零的集合。1875 年他證明了不連續函數也可求定積分，而且不連續點可有無限多個，這些號稱 “病態函數” 的例證破壞了十八世紀以來古典數學 “天堂般的優美”，很快招致反對之聲，J.H. 龐加萊 (Poincaré) 尤其批評這種理論，但是眞理並不因權威的評判而改變，隨著科學的發展，以 H.L. 勒貝格 (Lebesgue) 爲代表的數學家們進行了一場積分革命，引出了可列可加測度理論，一門古典分析的延續學科 − 實變函數應運創立。從這種巨大的突破中，不難看出達布執著追求的學風和不畏險阻、相信眞理的品格。

達布在解析函數論方面也有重要的研究成果，他研究了球函數、正交函數、代數函數中包括 K.G.J. 雅可比 (Jacobi) 多項式的分解等問題；在物理學方面，他成功地解決了運動學、動力學、平衡、點系微振等各種問題，像數學一樣，許多物理上的概念，如矢量、張量、線、面、束等，都是與他的名字分不開的。1870 年他還創辦了《數學科學通報》(*Le Bulletin des Sciences Mathématiques*)。他對科學史的評論和關注，在許多文章中都有體現。

達布曾在新巴黎大學社會學系擔任系主任之職達十年之久，他在極端困難的情況下，領導並團結了一大批學者，爲該校的建設作了奉獻，並獲得公衆的愛戴。此外，他作爲高等教育委員會成員，重新組織了數學教學活動，C.F. 克萊因 (Klein) 的許多想法和志向都來源於他的建議。他也滿腔熱情地、盡全力地從事科學院國際協會的工作。

十九世紀中末期，在賦予法國數學發展特色的人物中，縱然龐加萊是一位非常傑出的人物，可是達布所起的領導作用不能低估，原因不僅是他具有大量的科學論著，他那出類拔萃的成長過程、他的組織才能、教學工作和整個品格都起著非常重要的作用。

文　　獻

原始文獻

[1] J.G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques et sur la thèorie des imaginaires*, Paris, 1873。

[2] J.G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, 4 vols, Paris, 1887－1896。

[3] J.G. Darboux, *Leçons sur les systémes orthogonaux et les coordonnées carrilignes*, Paris, 1898。

[4] J.G. Darboux, *Eloges académiques et discours*, Paris, 1912。

研究文獻

[5] E. Lebon, *Gaston Darboux*, Paris, 1910。

[6] L.P. Eisenhart, *Darboux's contribution to geometry*, American Mathematical Society, 24 (1918), 227－237。

[7] G. Parasad, *Some great mathematicians of the nineteenth century*, II, Benares, 1934, 144－182。